$z = x + iy \qquad z = \rho e^{i\vartheta} \qquad x = \rho \cos\vartheta$

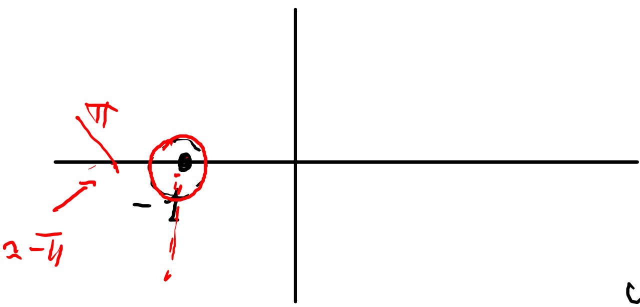
$y = \rho \sin\vartheta$

se $\vartheta \in]-\pi, \pi]$

$\vartheta = \operatorname{Arg} z \qquad \operatorname{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to]-\pi, \pi]$

Arg è continua sul suo dominio?

$e^{i(-\pi)} = -1$



$\operatorname{Arg}(-1) = \pi$

$e^{i\vartheta} = -1$

$\cos\vartheta + i \sin\vartheta$

$\varepsilon = \frac{1}{100}$

cerchiamo δ tale che $\forall z \in B(-1, \delta)$

$|\operatorname{Arg}(z) - \pi| < \frac{1}{100}$

$\operatorname{Arg}\left(-1 - \frac{i}{n}\right) < 0$

$\operatorname{Arg} z$ è continuo su $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$

De Moivre $\quad (\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{in\vartheta}$

$n \in \mathbb{N}$

$$(\rho e^{i\vartheta})^{-1} = \frac{\cancel{e^{i\vartheta}}\cdot 1}{\rho \cancel{e^{i\vartheta}}} \overset{?}{=} \frac{1}{\rho} \underbrace{e^{-i\vartheta} \cdot e^{i\vartheta}}_{=1} \qquad e^{i\vartheta - i\vartheta} = e^0 = 1$$

[moltiplico per $e^{i\vartheta}$ e verifico OK]

$$(\rho e^{i\vartheta})^{-n} = \rho^{-n} e^{-in\vartheta}$$

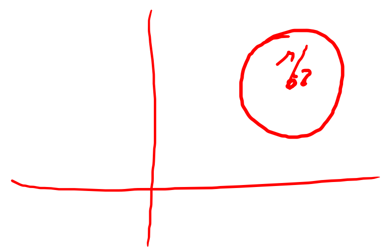
$$\bar{z} = \overline{\rho\, e^{i\vartheta}} = \rho\, \overline{(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)} = \rho\,(\underbrace{\cos\vartheta}_{\|} \underbrace{- i \sin\vartheta}) $$

$$= \rho\, e^{-i\vartheta} \qquad = \rho\,(\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta))$$

<u>OSS</u> $\forall \vartheta \in \mathbb{R} \quad |e^{i\vartheta}| = 1$

La circonferenza di centro ~~0~~ z_0 e raggio r si può rappresentare come

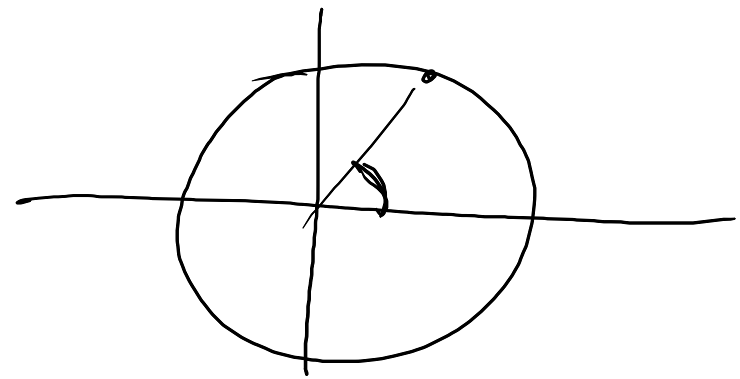
$$\{ z_0 + r\, e^{i\vartheta} : \vartheta \in\,]-\pi, \pi] \}$$



$\gamma : \underbrace{]-\pi, \pi]}_{[-\pi, \pi]} \to \mathbb{C} \qquad \underbrace{\gamma(t) = z_0 + r\, e^{it}}$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\qquad |z_0| = 1$

$f(z) = z_0 \cdot z$



$z_0 = e^{i\vartheta_0}$

$z = \rho e^{i\vartheta}$ $\qquad z_0 \cdot z = \rho e^{i\vartheta} \cdot e^{i\vartheta_0} = \rho e^{i(\vartheta+\vartheta_0)}$

rotazione di angolo ϑ_0

Rotazione nel piano $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \\ -\operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$

Forma matriciale di un numero complesso

$z = x + iy$

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + x_2y_1 \\ -(x_1y_2 + x_2y_1) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}$$

$|z| = 1$

z

Radice n-esima di un numero complesso

$w \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^n = w$ ha soluzioni in $\mathbb{C}$?

$w = \rho_0 e^{i\vartheta_0}$ $\quad z = \rho e^{i\vartheta}$ $\quad (\rho e^{i\vartheta})^n = \rho_0 e^{i\vartheta_0}$

$$\boxed{\rho^n e^{in\vartheta} = \rho_0 e^{i\vartheta_0}}$$

$\rho_0 > 0$

$\rho^n = \rho_0 \rightsquigarrow \rho = \sqrt[n]{\rho_0}$

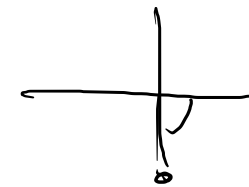
$n\vartheta = 2k\pi + \vartheta_0 \quad k \in \mathbb{Z}$

$\vartheta_k = \dfrac{\vartheta_0}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \quad k \in \mathbb{Z}$ avrò n soluzioni distinte

$(\rho e^{i\vartheta})^3 =$

$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\rho = 1 \qquad e^{3i\vartheta} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

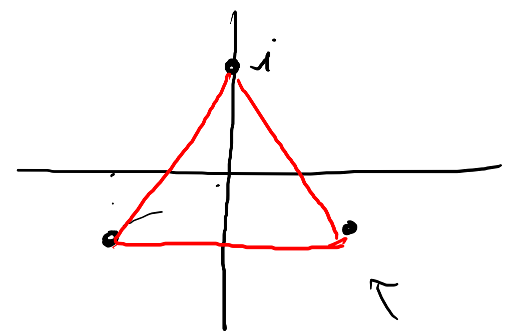


$\vartheta = \frac{-\pi/2}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

$-\pi/6$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{7}{6}\pi$

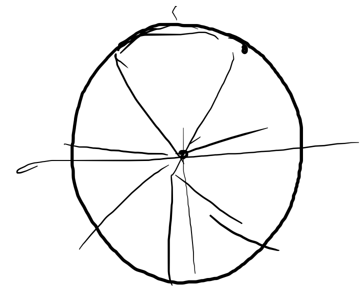


$-\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$i^3 = -1 \cdot i = -i$

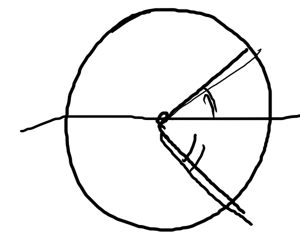
OSS: (se $|w| = 1$) le radici n-esime di w sono i vertici di un poligono regolare di n lati



Determinazione principale della radice n-esima

Radice n-esima di un numero complesso $\sqrt[n]{w}$:

$$\boxed{\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg} w}{n}}}$$



cioè considero l'inverso della funzione potenza z^n ristretta ai numeri z con argomento $\theta \in \left]-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}}$ se $z \neq 0$ $\quad f(0) = 0$

f è continua su $\mathbb{C}$ tranne nei punti $]-\infty, 0[$

f è continua anche in 0

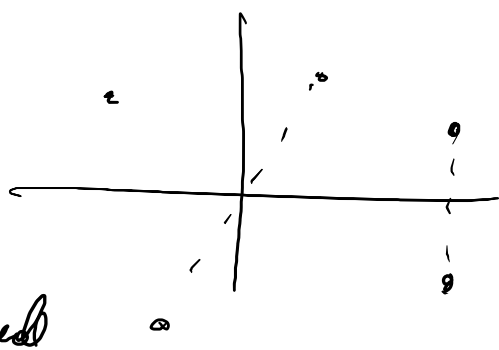
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z_0 \in \mathbb{C}$ fissato

$f(z) = z_0 \cdot z$ rotazione

$f(z) = z + z_0$ traslazione

$f(z) = -z$ riflessione risp. 0



$f(z) = \bar{z}$ riflessione risp. asse reale

$f(z) = -\bar{z}$ riflessione risp. asse immaginario

Teoremi sulle funzioni continue

continuità della somma, del prodotto, composta, quoziente

Teorema di Weierstraß

$f: E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ E compatto, f continua $\Rightarrow \exists$ max f min f

($f: E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ... $f(E)$ è compatto)

Teorema di Heine: f continua definita su un compatto, allora f è uniformemente continua (cioè $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in E \; |x_1 - x_2| < \delta$
$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$)

Teorema di connessione

$E \subseteq \mathbb{C}$ E connesso, $f : E \to \mathbb{C}$ continua $\Rightarrow$ $f(E)$ è connesso

[corollario: Teorema di esistenza degli zeri]

— o —

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\qquad f(t) = f_1(t) + i f_2(t)$

f è integrabile su I se f_1 e f_2 sono integrabili $\quad f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$

$$\int_I f \, dt = \int_I f_1 \, dt + i \int_I f_2 \, dt$$

Sia $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = f_1(z) + i f_2(z) \qquad z = x + iy$$

$$f(z) = \tilde{f}(x,y) = \tilde{f}_1(x,y) + i \hat{f}_2(x,y)$$

f un campo vettoriale da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\rho e^{i\vartheta}) = \alpha(\rho,\vartheta) + i\,\beta(\rho,\vartheta)$$

$$= r(\rho,\vartheta) \cdot e^{i\varphi(\rho,\vartheta)} \qquad \ldots$$

$$f(z) = \underline{\underline{z^2}}$$

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,V(x,y)$$

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

$$V(x,y) = 2xy$$

$$f(z) = 1/z$$

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$V(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

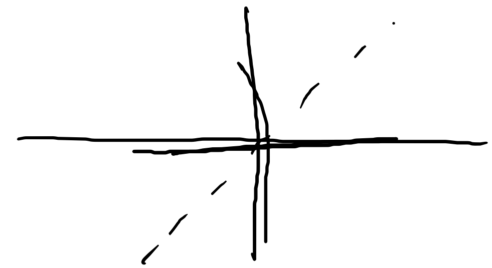
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$$

$$\frac{z^2-\bar{z}^2}{|z|^2} = \frac{\cancel{x^2-y^2}+2ixy-(\cancel{x^2-y^2}-2ixy)}{x^2+y^2} = 4i\,\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 4i\,\frac{xy}{x^2+y^2}$$

se $y=0$

$f=0$



se il limite esiste è 0

$y=x$ $\qquad 4i\,\frac{x^2}{2x^2} = 4i\cdot\frac{1}{2} = 2i$!!

$2i\cos\vartheta\sin\vartheta$

Funzioni derivabili in $\mathbb{C}$

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad z_0 \in A$ (se A non è aperto si deve chiedere $z_0 \in A$ e z_0 punto di accum. per A)

se esiste finito diremo derivata di f in x_0 il limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

es: $f(z) = c$ costante $\quad \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(z) = 0 \quad \forall z$

$f(z) = z \qquad f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \dfrac{z - z_0}{z - z_0} = 1$

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dots$$

la serie converge uniformemente in ogni compatto $\overline{B(0,R)}$; quindi vale il teorema di derivazione a termine a termine di una serie

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z^n)' = \sum_{\substack{n=1 \\ \uparrow}}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot n \, z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k = e^z$$

$k = n-1$

$$f'(z) = f(z)$$

Valgono i teoremi:

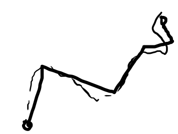
derivata della somma, prodotto, quoziente, composta;

$D z^n = n z^{n-1}$

funzioni razionali sono derivabili con le stesse formule viste in $\mathbb{R}$

Teorema f derivabile in z_0 $\Rightarrow$ f continua in z_0

[Dim $\lim_{z\to z_0} \left((f(z)-f(z_0)) \dfrac{z-z_0}{z-z_0} \right) = 0$]



Teorema $A \subseteq \mathbb{C}$ è aperto connesso, $f'(z)=0 \ \forall z\in A$ $\Rightarrow$ f è costante

Siano $z_1, z_2 \in A$; sia $\gamma : [0,1] \to A$ una curva continua $\gamma(0)=z_1$ $\gamma(1)=z_2$

(posso supporre che γ sia derivabile) Allora $(f\circ\gamma) : [0,1] \to \mathbb{C}$ è derivabile

$(f\circ\gamma)'(t) = \underbrace{f'(\gamma(t))}_{=0}\cdot\gamma'(t) = 0$ $\Rightarrow$ $f\circ\gamma$ è costante $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1))$ $\Rightarrow$ $f(z_1) = f(z_2)$.

$$f(z) = 2x + 3iy$$