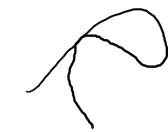
Integrazione complessa e funzioni analitiche

Curva in $\mathbb{C}$ $\rightsquigarrow$ curva in $\mathbb{R}^2$

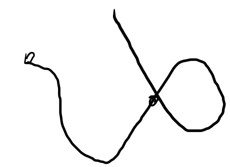
$\gamma : I \to \mathbb{C}$ $\qquad \gamma(t) = x(t) + i y(t)$ $\qquad \rightsquigarrow \qquad \tilde{\gamma}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$

I intervallo $\subseteq \mathbb{R}$ $\qquad\qquad \tilde{\gamma}'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right)$

γ continua; $\quad \gamma$ si dice regolare se è C^1 (derivabile) con $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.



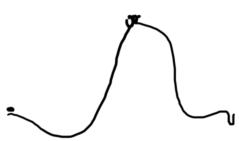
γ si dice chiusa se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma(a) = \gamma(b)$



γ si dice semplice, se γ non è chiusa ed è iniettiva

se γ è chiusa se $\gamma|_{[a,b[}$ e $\gamma|_{]a,b]}$ sono iniettive

$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$



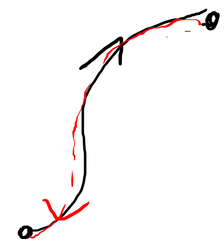
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b[\\ \gamma_2(t) & t \in [b,c] \end{cases}$$

γ si dice regolare a tratti se $\gamma = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j$ γ_j regolari

γ e φ sono equivalenti se esiste un diffeomorfismo h tale che $\gamma = \varphi \circ h$

$h = I_1 \to I_2$ C^1 invertibile con $h^{-1} \in C^1$. $h'(t) \neq 0$ $\forall t \in I_1$

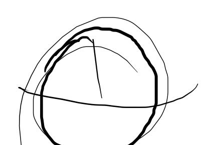
se $h'(t) > 0$ $\forall t$ le due curve hanno lo stesso verso



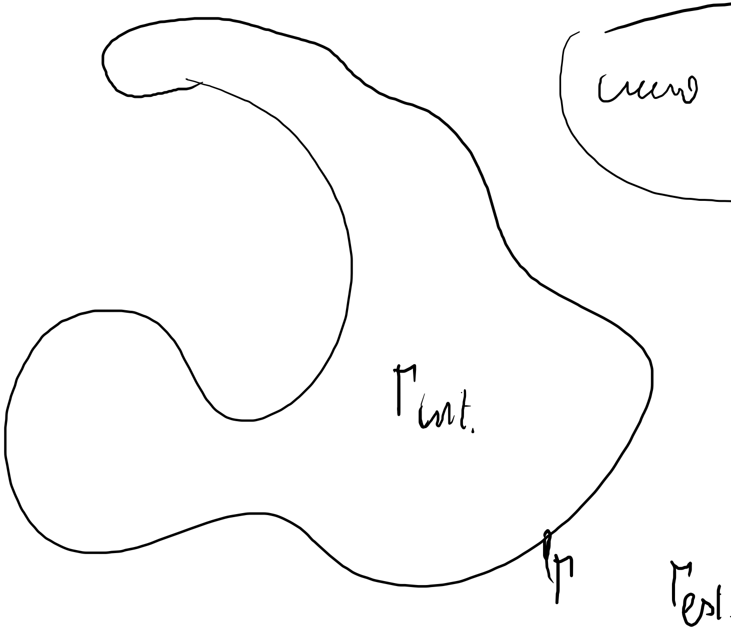
$h'(t) < 0$ $\forall t$ le due curve hanno orientazione opposta

$-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\quad -\gamma(t) = \gamma(\widetilde{a+b-t})$ $\quad \gamma + (-\gamma)$

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

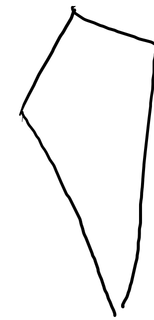


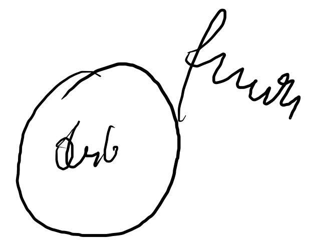
Sostegno della curva



curva chiusa semplice regolare / regolare a tratti
chiusa continua

curva di Jordan





Teorema della curva di Jordan

Sia γ una curva continua semplice chiusa. Allora il sostegno di γ divide il piano in due regioni, una limitata (Γ_{int}) e una illimitata (Γ_{est}) $\mathbb{R}^2 = \Gamma_{int} \cup \Gamma \cup \Gamma_{est}$

Sia $\gamma : I \to \mathbb{C}$ curva C^1; sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ f continua;

diciamo integrale di f su γ il numero

$f = u + iv$

$\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$

$$\boxed{\int_\gamma f\,dz = \int_I f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}$$

$$= \int_a^b \left[u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right] dt + i \int_a^b \left[u(x(t), y(t)) \cdot y'(t) + v(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \right] dt$$

(Se γ è regolare a tratti $\displaystyle \int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n} f\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f\,dz$)

$\triangle$ Ricordo che se $f: \mathbb{R}^2 \to \cancel{\mathbb{R}}\ \mathbb{C}$, $f = f_1 + i f_2$, e γ è una curva in $\mathbb{R}^2$, $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\int_\gamma f \, ds}_{} = \int_I f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt$$

$$= \int_I f_1(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt + i \int_I f_2(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt$$

$$\int_\gamma f \, dz = \int_I f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

$$\int_\gamma f \, |dz|$$

OSS: se γ_1 e γ_2 sono equivalenti

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$$ se γ_1 e γ_2 hanno lo stesso orientamento

$$\int_{\gamma_1} f\,dz = -\int_{\gamma_2} f\,dz$$ se γ_1 e γ_2 hanno verso opposto

$$\int_{-\gamma} f\,dz = -\int_{\gamma} f\,dz$$

Esempi $\qquad I = [a,b]$

$f(z) = 1 \qquad \gamma(t) = x(t) + i y(t)$

$\hat{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$

$$\boxed{\int_{\hat{\gamma}} ds} = \int_I 1 \, |\gamma'(t)| \, dt = \text{lunghezza della curva}$$

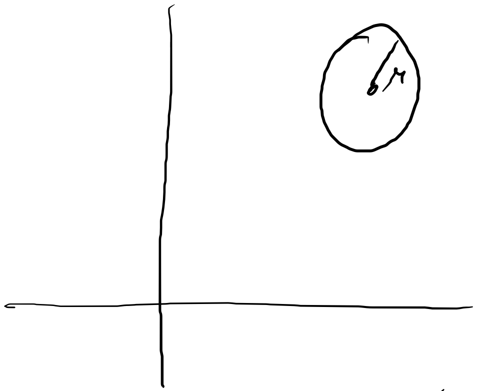
$$\underbrace{\int_\gamma dz} = \int_a^b \gamma'(t) \, dt = \int_a^b x'(t) \, dt + i \int_a^b y'(t) \, dt = \big(x(b) - x(a)\big) + i \big(y(b) - y(a)\big)$$

$$= \gamma(b) - \gamma(a)$$

es: γ chiuso $\qquad \int_\gamma dz = 0$

$\tilde{\gamma}(t) =$

$\gamma(t) = z_0 + r e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$



$\int_{\tilde{\gamma}} ds = 2\pi r$

$\int_\gamma dz = 0$

$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{z_0} + r e^{it} - \cancel{z_0}} \cancel{r} i \cancel{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i$

non dipende né da z_0 né da r

$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$

$z = z_0 + r e^{it}$

$\gamma'(t) = r i e^{it}$

Proprietà dell'integrale

Additività

$$\int_{\gamma+\beta} f\,dz = \int_\gamma f\,dz + \int_\beta f\,dz \qquad \int_\gamma f\,dz + \int_{-\gamma} f\,dz = 0$$

Linearità

$$\int_\gamma (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1\,dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2\,dz$$

Stime del modulo

$\mathbb{R}$ $$\left|\int_I f(x)\,dx\right| \le \int_I |f(x)|\,dx$$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$ $$\left\|\int_I f(x)\,dx\right\| \le \int_I \|f(x)\|\,dx$$

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \overset{?}{\le} \cancel{\int_\gamma |f|\,dz}\ ??$$

$$\le \int_\gamma |f|\,ds$$

Teorema

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ regolare $\quad f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua $\quad \Gamma \subset A$. Allora

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \int_\gamma |f|\,ds$$

$$\left[= \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt\right]$$

Dim

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| = \left|\int_a^b (ux'-vy')\,dt + i\int_a^b (uy'+vx')\,dt\right| = \left\|\left(\int_a^b (ux'-vy')\,dt,\ \int_a^b (uy'+vx')\,dt\right)\right\|_{\mathbb{R}^2}$$

$$\overset{(*)}{\le} \int_a^b \|(ux'-vy',\ uy'+vx')\|_{\mathbb{R}^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{u^2x'^2 - \cancel{2ux'vy'} + v^2y'^2 + u^2y'^2 + \cancel{2uy'vx'} + v^2x'^2}\,dt$$

$$\sqrt{u^2(x'^2+y'^2) + v^2(y'^2+x'^2)}$$

$$= \int_a^b \sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt = \int_a^b |f|\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma |f|\,ds$$

Passaggio del limite sotto il segno integrale

γ $\qquad f_n : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ misurabili $\qquad f_n \to f$

e $|f_n| \leq g$ integrabile allora f_n è integrabile e

(*) $$\lim_{n \to +\infty} \int_\gamma f_n \, dz = \int_\gamma \lim_{n \to +\infty} f \, dz$$

[si applica il teorema di convergenza dominata di Lebesgue alle funzioni $f_n(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

$\to f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

In particolare se $f_n \to f$ uniformemente, si ha (*)

Funzioni primitivabili

Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ f si dice primitivabile se esiste $F: A \to \mathbb{C}$ olomorfa, tale che $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in A$ [F si dice una primitiva di f]

OSS: se A è connesso (per archi) sia F_0 una primitiva di f, allora F è una primitiva di f se e solo se $F(z) - F(z_0) = c$ costante.

Formula di Torricelli-Barrow $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ primitivabile, F una primitiva,

$\gamma : I \to A$, $I = [a,b]$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b \underbrace{f(\gamma(t))}_{=F'(\gamma(t))} \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

In particolare se γ è chiusa si ha $\int_\gamma f\,dz = 0$

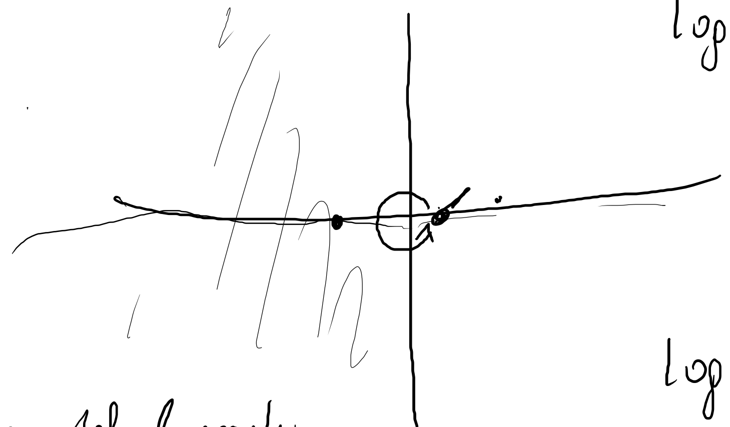
$\frac{1}{z}$ non è primitivabile

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

γ chiuso

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

$$\frac{1}{z-z_0}$$



log z non va bene.

$$\mathrm{Log}(\rho e^{i\theta}) = \ln\rho + i\theta$$

$\theta \in]-\pi, \pi]$

prendiamo una diversa determinazione del logaritmo

$$F(\rho e^{i\theta}) = \ln\rho + i\theta$$

$\theta \in]0, 2\pi]$

$$F'(z) = \frac{1}{z}$$

$\frac{1}{z}$ è localmente primitivabile; cioè per ogni $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esiste un intorno U ed esiste $F_U : U \to \mathbb{C}$ tale che $F_U'(z) = \frac{1}{z}$.

$\frac{1}{z}$ è localmente primitivabile ma NON è primitivabile.

---

se f è primitivabile $\int_\gamma f\,dz = 0$

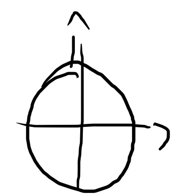
Teorema di Cauchy

$A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f: A \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $\gamma : [a,b] \to A$ chiusa regolare a tratti e tale che

$$\boxed{\Gamma_{int} \cup \Gamma \subset A}$$

Allora $\int_\gamma f \, dz = 0$

Es: $f(z) = \frac{1}{z}$ $\gamma(t) = e^{it}$



$\Gamma_{int} \not\subset \text{dom} f$!

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

Dim (caso semplificato con $f \in C^1(A)$)

Useremo Gauss-Green

$$g(x,y) = (X(x,y),\ Y(x,y))$$

$$\boxed{\int_\gamma \langle g, \tau \rangle\, ds \quad \underbrace{\int_\gamma X\,dx + Y\,dy}_{} \qquad \text{lavoro}}$$

C.R. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

$$\int_{\gamma = \partial\Omega^+} \langle g, \tau \rangle\, ds = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad \text{Gauss-Green}$$

Dim

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b (u x' - v y')\,dt + i \int_a^b (v x' + u y')\,dt = \int_a^b \langle (u,-v), (x',y') \rangle\,dt +$$

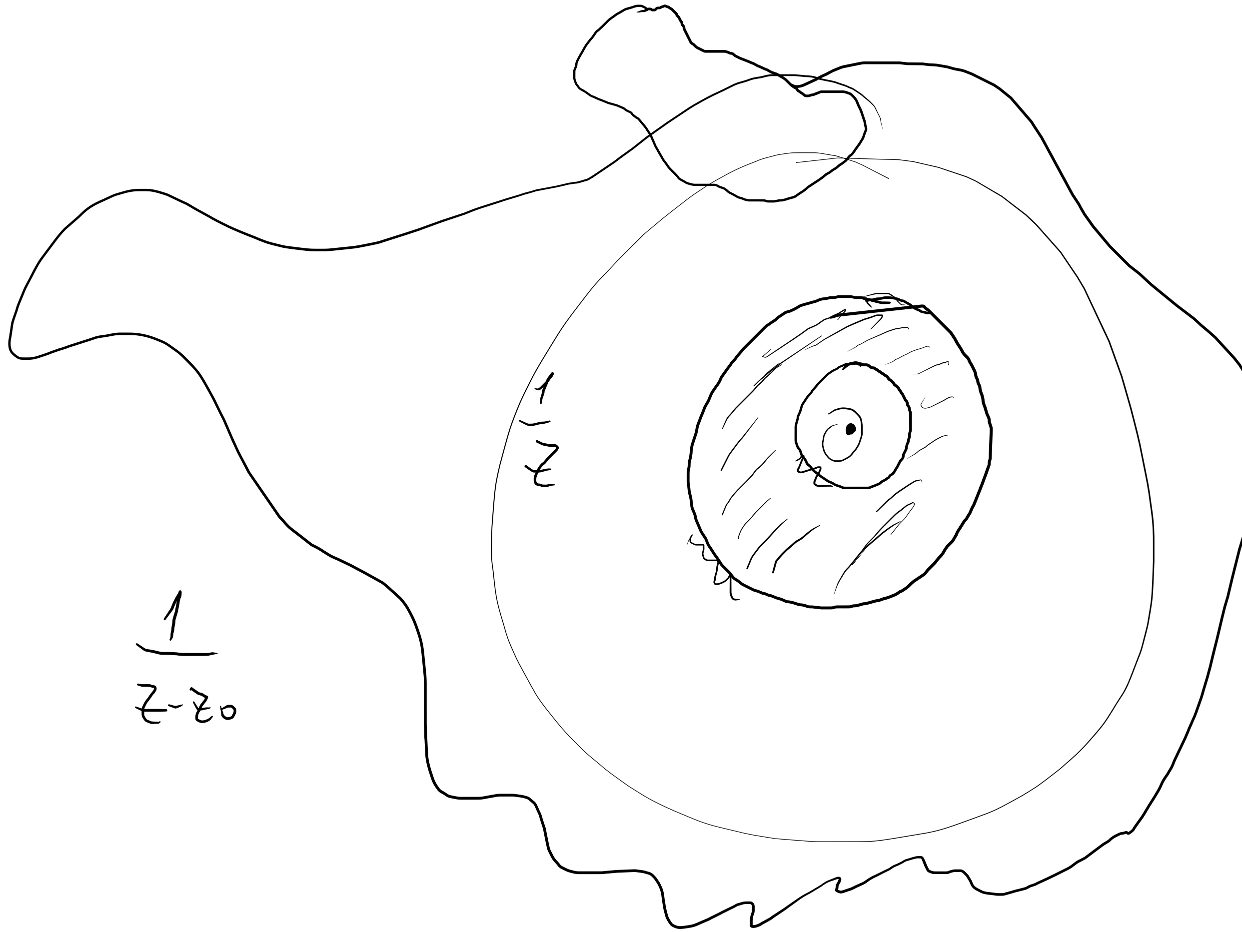
$$+ i \int_a^b \langle (v,u), (x',y') \rangle\,dt = \int_\gamma \langle (u,-v), \tau \rangle\,ds + i \int_\gamma \langle (v,u), \tau \rangle\,ds =$$

$$= \iint_{\Gamma_{int}} \Big(\underbrace{\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0} \Big)\,dx\,dy + i \iint_{\Gamma_{int}} \Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0} \Big)\,dx\,dy = 0$$

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

(condizioni di Cauchy-Riemann)

Teorema dei 2 circuiti



Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso $f: A \to \mathbb{C}$ olomorfa

Siano $\gamma_1 : I_1 \to A$ $\gamma_2 : I_2 \to A$ curve regolari chiuse con medesima orientazione

Sia $\Gamma_1 \subset \Gamma_{2\,int}$ e $\Gamma_{2\,int} \setminus \Gamma_{1\,int} \subset A$

Allora $\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$.