Zeri di una funzione analitica

$f: A \to \mathbb{C}$ funzione analitica

$p(z) = (z-\alpha)^k q(z)$

$q(\alpha) \neq 0$

Sia $z_0 \in A$, $f(z_0) = 0$; diremo che z_0 è uno zero di molteplicità k se esiste $g: A \to \mathbb{C}$ analitica tale che $g(z_0) \neq 0$

e $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$

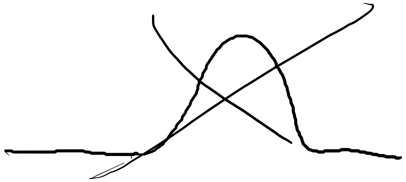
Cioè f è infinitesimo di ordine k in z_0 $\left[\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} \right| = l \in \mathbb{C},\ l \neq 0 \quad \mathrm{ord}_{z_0} f = k \right]$

Lemma di Peano

$\mathrm{ord}_{z_0} f = k \in \mathbb{N}$ se e solo se $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in 0, 1, .., k-1 \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Se f ha uno zero di molteplicità k

$$f(z) = \sum_{\substack{\cancel{n=0} \\ n=k}}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = (z-z_0)^k \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^n}_{= g(z)}$$



Teorema (zeri di una funzione analitica)

$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ A aperto connesso, $f \not\equiv 0$ (f non identicamente nulla).

Allora $Z(f) = \{ z \in A : f(z) = 0 \}$ è un insieme discreto.

D si dice discreto se non ha punti di accumulazione.

Lemma (zeri di molteplicità infinita) A aperto connesso

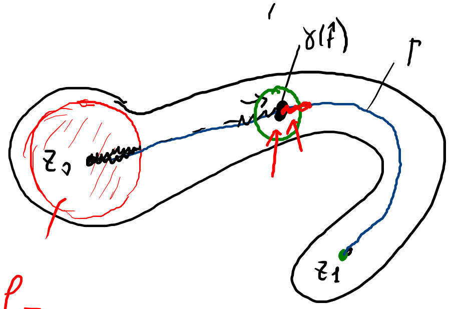
Sia $f : A \to \mathbb{C}$ $z_0 \in A$ tale che $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $f \equiv 0$.

Dim Se $A = B(z_0, R)$ è chiaramente vero perché

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n = 0 \qquad \forall z \in A$$

$\hat{t} = 0$

Sia A connesso, sia $z_0 \in A$ $f^{(n)}(z_0) = 0$ $\forall n$. supponiamo esista $z_1 \in A$ $f(z_1) \neq 0$.



$f \equiv 0$

Sia $\gamma : [0,1] \to A$ $\gamma(0) = z_0$ $\gamma(1) = z_1$

Γ è compatto

Sia $\hat{t} \in]0,1]$ $\hat{t} = \sup\{t \in [0,1] : \forall n \in \mathbb{N} \ f^{(n)}(\gamma(t)) = 0\}$

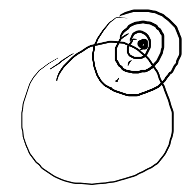
insieme non vuoto

$f^{(n)}(\gamma(\hat{t})) = 0$ $\forall n$ per continuità

Sia $B(\gamma(\hat{t}), \varepsilon) \subset A$ allora $f \equiv 0$ nella palla ; esistono $t > \hat{t}$ $f^{(n)}(\gamma(t)) = 0$ $\forall n$

assurdo.

Dim. del teorema



$B\left(\alpha, \frac{1}{n}\right)$

Sia α un punto di accumulazione di $Z(f)$; allora si può costruire una successione $(z_n)_n$ con $z_n \in Z(f)$ e $z_n \neq \alpha$ $\forall n$ tale che $\lim_{n \to +\infty} z_n = \alpha$

osserviamo che $f(\alpha) = 0$ $\left(f(z_n) = 0 \ \forall n \quad 0 = \lim_{n \to +\infty} f(z_n) = f(\alpha) \right)$ $\alpha \in Z(f)$

α non può avere molteplicità infinita; sia $j \in \mathbb{N}$ tale che $f(z) = (z-\alpha)^j g(z)$ e $g(\alpha) \neq 0$ g analitica.

Per la continuità di g esiste un intorno $B(\alpha, \varepsilon)$ di α dove $g(z) \neq 0$.

Ora $\lim_{n \to +\infty} z_n = \alpha$ quindi per $n > n_\varepsilon$ $z_n \in B(\alpha, \varepsilon)$ quindi $g(z_n) \neq 0$

Ma $0 = f(z_n) = \underbrace{(z_n - \alpha)^j}_{\neq 0} \cdot g(z_n) \neq 0$ contraddizione.

Principio di identità delle funzioni analitiche

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $E \subseteq A$ E non discreto; siano $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ analitiche e tali che $f_1(z) = f_2(z)$ $\forall z \in E$. Allora $f_1 = f_2$.

$[\ f = f_2 - f_1 \quad Z(f) \supseteq E \implies f \equiv 0\ ]$

<u>Prolungamento analitico</u>

$f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad E \subseteq A$; $\tilde{f} : A \to \mathbb{C}$ si dice un prolungamento analitico di f se $\tilde{f}$ è analitica e $\tilde{f}(z) = f(z)$ $\forall z \in E$.

Se E è non discreto e esiste un prolungamento analitico di f, questo è unico.

Applicazioni:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \qquad \operatorname{sen}(z_1+z_2) = \operatorname{sen}(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\operatorname{sen}(z_2)$$

- - - - .

consideriamo $x_1 \in \mathbb{R}$

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad f_1(x) = e^{x_1+x} \qquad \hat{f}_1(z) = e^{x_1+z}$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \qquad f_2(x) = e^{x_1} \cdot e^{x} \qquad \hat{f}_2(z) = e^{x_1} \cdot e^{z}$

$f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ non è discreto) $\Rightarrow \hat{f}_1(z) = \hat{f}_2(z) \quad \forall z$

$$e^{x_1+z} = e^{x_1} \cdot e^{z} \qquad \forall x_1 \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$e^{x+z_0} = e^{x} \cdot e^{z_0} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g_1(x) = e^{x+z_0} \rightsquigarrow \hat{g}_1(z) = e^{z+z_0}$

$g_2(x) = e^{x} \cdot e^{z_0} \qquad \hat{g}_2(z) = e^{z} \cdot e^{z_0}$

$$\Rightarrow e^{z} \cdot e^{z_0} = e^{z+z_0} \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Punti singolari di una funzione analitica

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $z_0 \in \mathbb{C} \setminus A$ ma supponiamo che esiste un intorno U di z_0 tale che $U \setminus \{z_0\} \subset A$

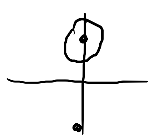
$U \setminus \{z_0\}$ si dice un "intorno forato" di z_0.

Si dice in questo caso che z_0 è un punto singolare isolato per f.

Es: $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad$ 0 è punto singolare isolato

Es: $f(z) = \operatorname{Log} z$ $\quad$ i punti $x \in]-\infty, 0]$ sono punti singolari non isolati per f

Es $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ $\quad$ i e $-i$ sono punti singolari isolati



$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} & \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

$$1 = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

$z = 0$ è singolarità isolata

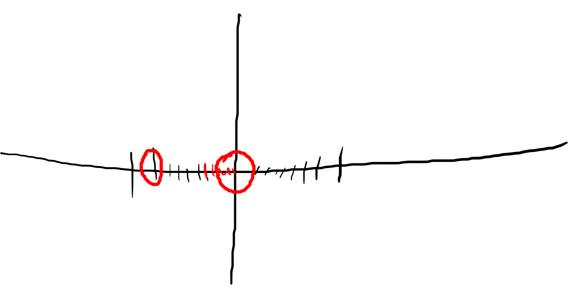
"rimuovo la singolarità"

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$z = 0$ singolarità

z : $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ sono singolarità

$\frac{1}{z} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \qquad z_k = \frac{1}{k\pi} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$



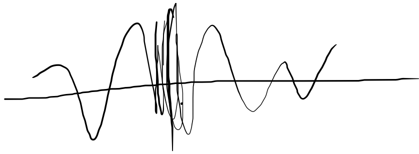
z_k è isolato

0 non è isolato $\forall\, B(0,\varepsilon)$

k grande $\Rightarrow$ $z_k \in B(0,\varepsilon)$

Classificazione delle singolarità isolate

Sia z_0 una singolarità isolata per f $\qquad f: U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ analitica



1) Singolarità eliminabile

z_0 si dice eliminabile se f è localmente limitata in z_0

__Teorema__ Una singolarità isolata è eliminabile per f se e solo se esiste finito il limite

$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lambda$. In questo caso ponendo $\tilde{f}(z) = \begin{cases} \lambda & \text{se } z = z_0 \\ f(z) & \text{se } z \in U \setminus \{z_0\} \end{cases}$ si

ottiene il prolungamento analitico di f.

__Dim__ $\quad g(z) = (z - z_0)^2 f(z) \qquad$ esiste $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$

estendiamo g per continuità a z_0 ponendo $\underline{g(z_0) = 0}$

g è derivabile

$$g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$$

$$g'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)^2 f(z) - 0}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$$

limitata

quindi g è olomorfa e quindi analitica

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} (z-z_0)^n$$

$$a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$$

$\tilde{f}(z)$ è il prolungamento analitico di f

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} f(z) = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$f(z) = \frac{\pi - 2z}{\cos z}$$

$z = \frac{\pi}{2}$ è singolarità eliminabile

Polo di ordine $k \in \mathbb{N}^+$

z_0 si dice un polo di ordine k se la funzione $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$ è localmente limitata in z_0 ma $(z-z_0)^j f(z)$ non è localmente limitata in z_0 $\forall j < k$

cioè z_0 è una singolarità eliminabile per la funzione $g(z)$

Se $k = 1$ polo semplice, se $k = 2$ polo doppio ...

Teorema

Una singolarità isolata z_0 è un polo per f se e solo se $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

in particolare, è polo di ordine k se

$$\lim_{z \to z_0} |(z-z_0)^j f(z)| = +\infty \quad \forall j = 0, 1, \dots, k-1 \qquad \lim_{z \to z_0} |(z-z_0)^k f(z)| = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Dim: z_0 è singolarità eliminabile per $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$;

sia $\bar{g}(z)$ il prolungamento analitico di g

$$\bar{g}(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}$$

può essere $a_0 = 0$?

avrei $(z-z_0) \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-1}}$

$f(z)(z-z_0)^{k-1}$ è localmente limitata in z_0

quindi $a_0 \neq 0$

in particolare $\lim_{z \to z_0} \bar{g}(z) = a_0 \neq 0$

sia $z \neq z_0$

$$|f(z)| = \left| \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} \right| = \left| \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z-z_0} + \underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}} \right|$$

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$$

Supponiamo ora $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

Per definizione di limite esiste un intorno V di z_0 tale che $|f(z)| > 1$ se $z \in V$ $z \neq z_0$

posso considerare la funzione

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} \quad \text{se } z \in V \setminus \{z_0\}$$

g è olomorfa ed è limitata in $V \setminus \{z_0\}$

quindi z_0 è una singolarità eliminabile per g; sia $\tilde{g}$ il prolungamento analitico di g

$$\tilde{g}(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & z \in V \; z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$\tilde{g}$ non è identicamente nulla, esiste allora $k \in \mathbb{N}$ tale che z_0 è uno zero di molteplicità k per g.

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^k \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}$$

$$\boxed{(z-z_0)^k \cdot f(z) =} \frac{1}{\sum_{n=k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-k}}$$

è localmente limitato in z_0

quindi z_0 è un polo di ordine k per f.