SISTEMI DINAMICI

Sistemi dinamici discreti :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_n = f^n(x_0) \quad \begin{cases} \text{punti critici} \\ \text{punti periodici} \\ \text{biforcazioni} \end{cases}$$

mappa logistica discreta

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$$

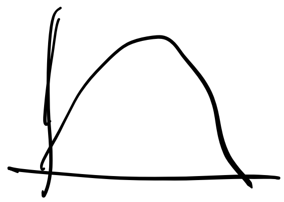
$$\lambda \leq 4$$

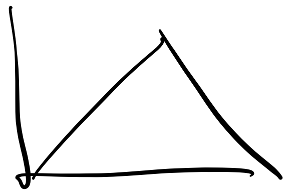
$\longrightarrow$ caotica

(mappa a Tenda)

- punti periodici sono densi $\leftarrow$
- transitività $\leftarrow$
- sensitività ai dati iniziali $\leftarrow$

mappa a Tenda $\rightarrow$ caotica





$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & I \arrow[d, "h"] \\ J \arrow[r, "g"] & J \end{tikzcd}$$

modo quantitativo di misurare il caos $\longrightarrow$ esponente di Lyapunov

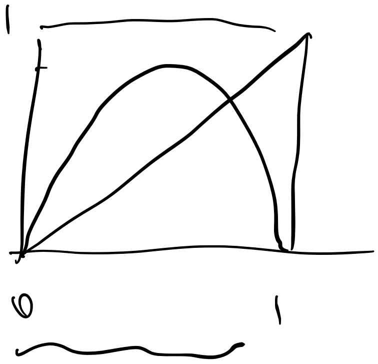
$$\lambda = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon \to 0}} \frac{1}{N} \log \frac{\left| f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0) \right|}{\varepsilon}$$

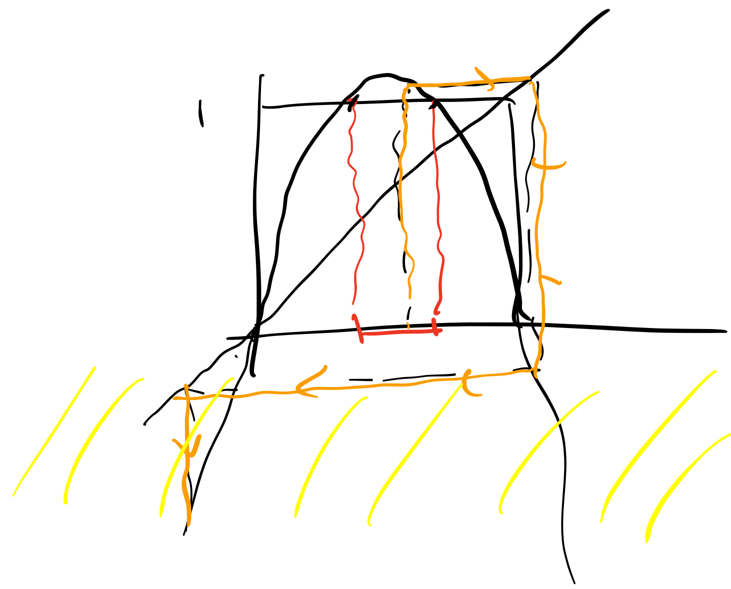
$$e^{\lambda N}$$

DINAMICA SIMBOLICA

Consideriamo $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$

con $\lambda > 4$. $\to$ $I = [0,1]$ non è più invariante, ci sono orbite che vanno a $-\infty$





Infatti se $\lambda > 4$, $\exists\, A_0$ tale che

$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) > 1$ centrato in $x = \frac{1}{2}$. Allora $f_\lambda^2(x) = f_\lambda(x' > 1)$ per $x \in A_0$

$= \lambda x'(\underbrace{1-x'}) < 0$

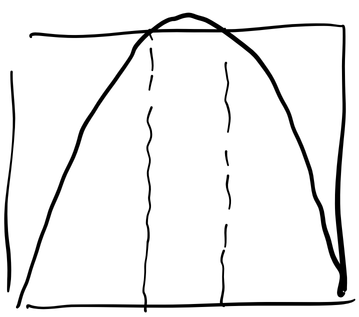
Queste orbite vanno a $-\infty$.

Invece gli estremi di A_0 $(f_\lambda(x) = 1)$ vanno a zero

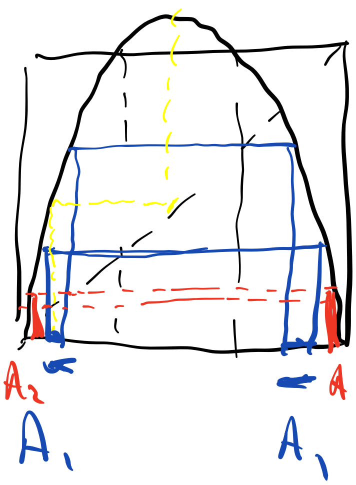
Vogliamo capire come è fatto

$\Lambda = \{$ Tutti i punti di $I = [0,1]$ Tali che le orbite non escono da I $\}$

Andiamo all'indietro, A_1 è la preimmagine di A_0, cioè f_λ $\lambda > 4$ manda A_1 in A_0



A_0



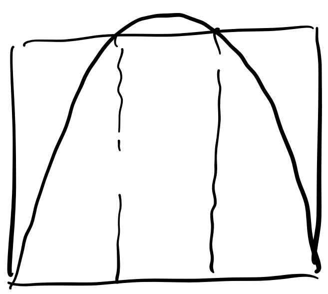
A_1 sono due intervalli

La preimmagine di A_1, la denotiamo A_2, consiste di 4 intervalli

A_n è costituito da 2^n intervalli aperti di I, dove l'iterata n-esima giace in A_0 (e quindi esce da I).

I punti che <u>non</u> escono da I sono $\Lambda = I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

Dividiamo $I - A_0 = I_0 \cup I_1$
sinistra destra



I_0 A_0 I_1

Prendiamo $x_0 \in \Lambda$ (non esce da I) l'intero orbita di x_0 sta dentro $I_0 \cup I_1$.

Gli associamo una sequenza

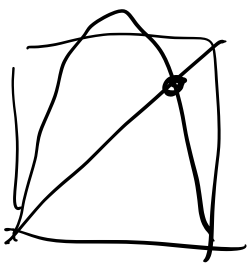
$$S(x_0) = (s_0\, s_1\, s_2\, s_3 \, \text{----})$$

$$s_j = k \;, \; k = 0,1 \iff f_\lambda^j(x_0) \in I_k$$

$$s_0 = 0,1 \;, \quad s_1 = 0,1$$

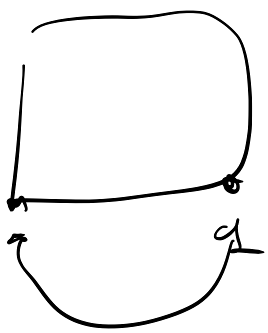
Ad esempio $S(0) = (0000\cdots)$

c'è un punto fisso in I, x^*



$$S(x^*) = (11111\cdots)$$

$$S(1) = (1000\cdots)$$



$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) = 0$$

Definiamo Σ = l'insieme di tutte le sequenze di 0 e 1.

Un punto di Σ è $s = (s_0 s_1 s_2 \cdots)$

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "S"'] & \Lambda \arrow[d, "S"] \\ \Sigma \arrow[r, "\sigma"] & \Sigma \end{tikzcd}$$

← vogliamo questo

Una metrica (o distanza) su Σ

è $d(s,t)$ tale che

1. $d(s,t) \geq 0$, $d(s,t) = 0 \iff s = t$

2. $d(s,t) = d(t,s)$

3. Δ : $d(s,u) \leq d(s,t) + d(t,u)$

Def : $$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Questo sequente converge, perché i numeratori sono 0, 1 :

$$d(s,t) \leq \underline{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{2}$$

$$\left(\sum x^n = \frac{1}{1-x} \right)$$

Ad esempio :

$$d\left((\overline{01}), (\overline{10}) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

010101 ...
101010

$$d\left((\overline{01}), (\overline{1}) \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

010101 —
111111

Proposizione

1. Se $s_i = t_i$ per $i = 0, \dots, n$

$\Rightarrow \quad d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$

2. Viceversa se $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \quad s_i = t_i$ per $i = 0, \dots, n$

Dim

1. $$d(s,t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

primi $n+1$ termini uguali

$$\leq 0 + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$j = i - (n+1)$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\overbrace{s_i - t_i}^{0,1}|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\underbrace{n+1+j}_{i}}}$$

2. Viceversa se $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$ deve essere $s_j = t_j$ per ogni $j \leq n$, altrimenti:

$$d(s,t) \geq \frac{|s_j - t_j|}{2^j} = \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$$

è uno dei sommandi

se $s_j \neq t_j$

$j \leq n$

Teorema: La funzione itinerario $S : \Lambda \to \Sigma$ è un omeomorfismo per $\lambda > 4$.

Dim Per semplicità, assumiamo

$$|f'_\lambda(x)| > k > 1$$

per qualche k $\forall x \in I_0 \cup I_1$

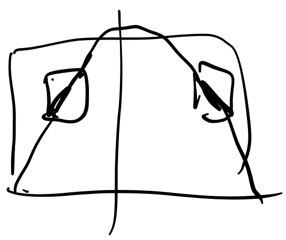
(scegliamo λ "grande")

• Dimostriamo che è 1 a 1.

$x, y \in \Lambda$ e supponiamo $S(x) = S(y)$

Allora $\forall n$, $f_\lambda^n(x)$, $f_\lambda^n(y)$ stanno dallo stesso lato rispetto a $\frac{1}{2}$

(o in I_0, o in I_1)



f_λ è monotona nel intervallo fra $f_\lambda^n(x)$ e $f_\lambda^n(y)$

Siccome $|f'_\lambda| > k > 1$, ad ogni iterazione successiva l'intervallo viene espanso di un fattore k

(vedi: dimostrazione pozzo, sorgente ...)

Quindi la distanza cresce ed eventualmente finiranno dai lati opposti di $\frac{1}{2}$ $\to$ contraddizione perché abbiamo assunto $S(x) = S(y)$.

- Dimostriamo che è surgettiva.

Se $s = (s_0 s_1 s_2 \ldots)$, troviamo

$x \in \Lambda$ t.c. $S(x) = s$

Prima: sia $J \subset I$ intervallo chiuso

$$f_\lambda^{-n}(J) := \{ x \in I \mid f_\lambda^n(x) \in J \}$$

preimmagine di J sotto f_λ^n

Si può vedere (dal grafico) che

$f_\lambda^{-1}(J)$ consiste di due

sottointervalli, uno in I_0, l'altro

in I_1.

Definiamo

$$I_{s_0 s_1 \ldots s_n} = \{ x \in I \mid x \in I_{s_0},$$

$f_\lambda(x) \in I_{s_1}, f_\lambda^2(x) \in I_{s_2}, \ldots, f_\lambda^n(x) \in I_{s_n}\}$

$= I_{s_0} \cap f_\lambda^{-1}(I_{s_1}) \cap f_\lambda^{-2}(I_{s_2}) \cap \cdots \cap f_\lambda^{-n}(I_{s_n})$

$= I_{s_0} \cap f_\lambda^{-1}(I_{s_1 \cdots s_n})$

perché $I_{s_1 \ldots s_n} = \{ x \in I \mid x \in I_{s_1},$
$f_\lambda(x) \in I_{s_2}, \ldots \}$

Se $I_{s_1 \ldots s_n}$ è non vuoto, $f_\lambda^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})$ è costituito da due intervalli, uno in I_0 e l'altro in I_1. Quindi questo implica che $I_{s_0} \cap \underbrace{f_\lambda^{-1}(I_{s_1 \ldots s_n})}_{\text{due intervalli}}$ è un intervallo chiuso singolo

Quindi

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap f_\lambda^{-n}(I_{s_n})$$

$$\subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}$$

Allora: $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}$ è non vuoto

e $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}$ è tale che

$x \in I_{s_0}$, $f_\lambda(x) \in I_{s_1}$, $f_\lambda^2(x) \in I_{s_2}$, ...

cioè $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$

Visto che S è 1 a 1, abbiamo

che $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ consiste di

un punto solo.

- Per finire, dimostriamo che è

continua

Prendiamo $x \in \Lambda$ e supponiamo che $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$

Prendiamo $\epsilon > 0$ e n t.c. $\frac{1}{2^n} < \epsilon$

$\forall$ combinazione $t_0 \dots t_n$, consideriamo gli intervalli $I_{t_0 \dots t_n}$. Sono 2^{n+1} combinazioni, 2^{n+1} intervalli e $I_{s_0 \dots s_n}$ è uno di questi.

Inoltre $\Lambda \subset \bigcup I_{t_0 \dots t_n}$

Allora possiamo scegliere δ tale che $|x-y| < \delta$ e $y \in \Lambda$ implica

$y \in I_{s_0 \dots s_n}$

$\Rightarrow$ i primi $n+1$ termini di $S(y)$ coincidono con i primi $n+1$ termini di $S(x)$.

$$d\left(S(x), S(y) \right) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

e quindi S è continua rispetto a $d(\ ,\ )$.

:-)

x	$f(x)$
$x-y$	$f(x)-f(y)$
$\lim_{n \to \infty} x_n = c$	$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c)$
$\lim_{n \to N} x_n$	$\lim_{n \to N} f(x_n)$

Vogliamo usare Σ come compagno di f_λ con $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$

$\lambda > 4$

$$\sigma(s_0 s_1 \ldots) = (s_1 \ldots\ldots)$$

$$\lambda x(1-x) \longrightarrow \underline{\lambda x_n (1-x_n)}$$

$\uparrow$