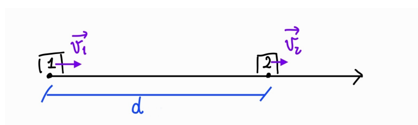
Soluzione esercizio (C) del 23/07/2021

Chiamiamo d la distanza tra le due automobili nell'istante t_i in cui il conducente dell'automobile 1 inizia a frenare. Ponendo l'origine del sistema di riferimento (solidale con la Terra) nella posizione dell'auto 1 a quest'istante, si ha che le leggi orarie delle due auto (ovvero le loro posizioni al variare del tempo) sono, rispettivamente:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a(t - t_i)^2 + v_1(t - t_i)$$

$$x_2(t) = v_2(t - t_i) + d$$

in quanto l'auto 1 all'istante iniziale si trova all'origine del sistema di riferimento e presenta un'accelerazione a costante e una velocità iniziale pari a v_1, mentre l'auto 2 continua a muoversi a velocità v_2 costante e all'istante iniziale si trova alla posizione iniziale d. Una rappresentazione grafica della situazione all'istante $t = t_i$ è la seguente:



Possiamo supporre per semplicità (senza perdere di generalità) che $t_i = 0$ s. Allora:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_1 t$$

$$x_2(t) = v_2 t + d$$

Le due auto si scontrano se esiste un istante di tempo t al quale le posizioni delle due auto sono uguali, e cioè $x_1(t) = x_2(t)$; vale a dire, sostituendo le equazioni sopra e riarrangiando i termini:

$$at^2 + 2(v_1 - v_2)t - 2d = 0\,.$$

Affinchè le due auto non si scontrino mai, dobbiamo imporre che questa equazione di secondo grado non abbia soluzioni, e cioè che

$$\Delta = 4(v_1 - v_2)^2 + 8ad < 0$$

da cui ottengo che

$$d > -\frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}\,.$$

(NB: a è una quantità negativa, dunque devo cambiare il verso della disequazione dividendo per a!). Dunque la richiesta che non si incontrino mai si traduce in un limite inferiore per d, che non può essere minore di una certa quantità, precisamente:

$$d_{min} = -\frac{(v_1 - v_2)^2}{2a}\,.$$

Commenti:

1. L'intuizione potrebbe portare a calcolare il tempo di arresto dell'automobile 1 e a imporre che la posizione dell'auto 1 nell'istante in cui si ferma sia minore della posizione dell'auto 2 nello stesso istante. Tuttavia, questo non è un approccio corretto in quanto se la distanza d iniziale tra le due automobili è troppo piccola, l'impatto avverrebbe ben prima che l'auto 1 si fermi del tutto: dunque il tempo di frenata non è la chiave per risolvere l'esercizio. Piuttosto dovrei richiedere che sia $x_1(t) < x_2(t)$ per ogni valore di t e non soltanto al tempo di frenata di 1!

2. Per lo stesso motivo, non è neanche risolutivo considerare il tempo che l'auto 1 impiega per diminuire la sua velocità fino a raggiungere quella dell'auto 2, in quanto anche qui, se d è troppo piccola, l'impatto può avvenire prima di questo tempo.

3. L'esercizio può anche essere risolto ponendosi in un sistema di riferimento solidale con l'automobile 2. In questo sistema di riferimento, l'automobile 2 è ferma, e vede l'automobile 1, inizialmente a distanza d, avvicinarsi a velocità $v_1 - v_2$ (provate a pensarci...). Allora la legge oraria dell'automobile 1 sarà

$$x_1(t) = \frac{1}{2}at^2 + (v_1 - v_2)t\,.$$

   In questo caso, la minima distanza d che serve ad evitare l'impatto è esattamente lo spazio di frenata di 1. Infatti, il problema è sostanzialmente equivalente a una situazione in cui 1 si muove a velocità $v_2 - v_1$ e frena per evitare l'automobile 2 che è ferma davanti a sè a distanza d. L'unico modo affinchè non si scontrino, dato che l'accelerazione è fissata, è allora supporre che lo spazio di frenata di 1 sia minore della distanza che separa le due auto nell'istante in cui essa inizia a frenare... provate a fare i calcoli e verificate che viene esattamente lo stesso risultato!