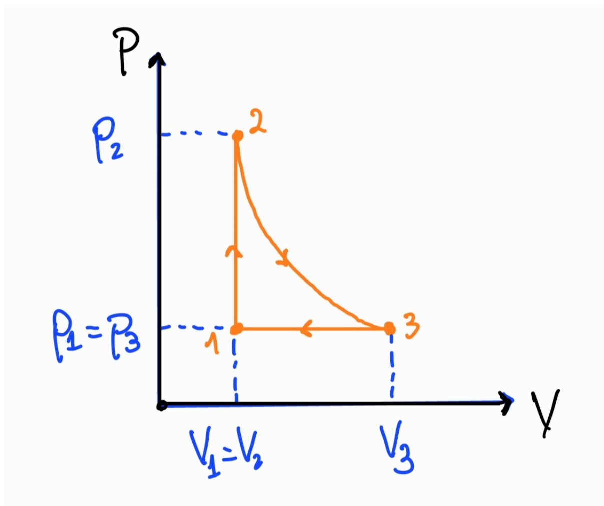
Soluzione esercizio (E) del 23/07/2021 - Ciclo termodinamico

1. Il ciclo nel piano (P, V) può essere rappresentato nel modo seguente:



infatti, la trasformazione $1 \to 2$ è isocora e quindi rappresentata da una linea verticale; per la legge dei gas perfetti ($PV = nRT$) ho

$$V = \frac{nRT}{P} = cost$$

e quindi se il gas si riscalda (T aumenta), deve aumentare anche p affinchè il volume rimanga costante. La trasformazione $2 \to 3$ è adiabatica, per cui deve valere

$$PV^{\gamma} = cost$$

e quindi ad un'espansione (aumento di volume) deve corrispondere una diminuzione di pressione con un andamento quasi iperbolico fino alla pressione iniziale del gas. Infatti la trasformazione $2 \to 3$ è isobara e quindi deve connettere il punto 3 col punto 1 mediante una linea orizzontale (a pressione costante).

2. L'efficienza di qualsiasi ciclo può essere vista come il rapporto tra l'energia utile generata e l'energia spesa per far funzionare il ciclo. Una macchina termica produce lavoro W assorbendo calore Q_c da una sorgente calda: utilizzando la convenzione che il lavoro sia negativo se prodotto dal sistema, possiamo dunque definire l'efficienza come la quantità positiva

$$e = \frac{-W}{Q_c}$$

dove W è il lavoro *totale* (ottenuto come somma dei lavori sulle singole trasformazioni) compiuto dal ciclo e Q_c è il calore assorbito. Ricordando che in un ciclo la variazione di energia interna ΔU è nulla (in quanto funzione di stato) si ha, per il primo principio della termodinamica ($\Delta U = Q + W$):

$$W = -Q = -(Q_c + Q_f)$$

dove Q è il calore totale scambiato dal sistema e sarà dato dalla somma (algebrica: ciascun calore avrà un suo segno!) del calore Q_c assorbito e Q_f ceduto. Sostituendo posso allora calcolare l'efficienza mediante i calori scambiati:

$$e = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}\,.$$

L'esercizio si riduce dunque a capire in quali trasformazioni del ciclo si assorbe e si cede calore e a calcolare queste quantità. Nella trasformazione $2 \to 3$ il calore scambiato è sicuramente nullo, in quanto la trasformazione è adiabatica. La trasformazione $1 \to 2$ è isocòra, per cui il calore scambiato sarà:

$$Q_{1\to 2} = \int_1^2 \delta Q = \int_1^2 nc_V dT = nc_V \int_1^2 dT = nc_V(T_2 - T_1)$$

mentre per la trasformazione isobara $3 \to 1$ il calore scambiato sarà:

$$Q_{3\to 1} = \int_3^1 \delta Q = \int_3^1 nc_P dT = nc_P \int_3^1 dT = nc_P(T_1 - T_3)$$

dove c_V e c_P sono rispettivamente i calori specifici molari a volume e pressione costanti. Essendo $T_1 < T_2$ e $T_1 < T_3$ (relazioni facilmente deducibili dalla natura delle trasformazioni e dalla legge dei gas perfetti) si osserva chiaramente che $Q_{1\to 2}$ avrà segno positivo e sarà quindi il calore assorbito Q_c e $Q_{3\to 1}$ avrà segno negativo e sarà quindi il calore ceduto Q_f. Allora l'efficienza del ciclo è:

$$e = 1 + \frac{nc_P(T_1 - T_3)}{nc_V(T_2 - T_1)} = 1 + \gamma\frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_1} = 1 + \gamma\frac{\cancel{T_1}(1 - \frac{T_3}{T_1})}{\cancel{T_1}(\frac{T_2}{T_1} - 1)}$$

dove si è usato $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$. A questo punto dobbiamo semplicemente esprimere le temperature in funzione dei volumi noti V_1 e V_3. La trasformazione $3 \to 1$ è isobara e quindi

$$P = \frac{nRT}{V} = cost \to \frac{T_3}{V_3} = \frac{T_1}{V_1} \to \frac{T_3}{T_1} = \frac{V_3}{V_1} = x$$

mentre la trasformazione $1 \to 2$ è isocora e quindi

$$V = \frac{nRT}{P} = cost \to \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_3}$$

in quanto $P_1 = P_3$. Ma la trasformazione $2 \to 3$ è adiabatica, per cui

$$PV^\gamma = cost \to P_2V_2^\gamma = P_3V_3^\gamma \to \frac{P_2}{P_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^\gamma = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\gamma = x^\gamma$$

in quanto $V_2 = V_1$. In definitiva notiamo che l'efficienza del ciclo può essere espressa in funzione del solo fattore $x = \frac{V_3}{V_1}$:

$$e = 1 + \gamma\frac{1 - x}{x^\gamma - 1} = 1 - \gamma\frac{x - 1}{x^\gamma - 1}\,.$$