

MOTO CENTRALE

Due corpi con interazione che dip. solo della posizione relativa:

$$L = T - V$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

6 gradi di libertà
 ↑
 coord. lib.
 $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$

Nuove coord.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

coord. del centro di massa (c.m.)

$$M \equiv m_1 + m_2$$

Sostituisco
 in L

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}}^2 + \cancel{\frac{2m_2}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}} + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}}^2 - \cancel{\frac{2m_1}{M} \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}} + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{\vec{r}}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2}}_{\equiv m} \dot{\vec{r}}^2$$

$$\frac{(m_1 + m_2) m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \equiv m \quad \text{MASSA RIDOTTA}$$

$$V = V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = V(\vec{r})$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{\text{particella libera con massa } M \text{ e pos. c.m.}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})}_{\text{raggruppo di un corpo di massa } \mu \text{ soggetto a un potenziale } V}$$



Dati due corpi con en. pot. $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, allora questo sist. è descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$M = m_1 + m_2$$

Ci restringiamo al caso di potenziale

$$V(\vec{r}) = V(\|\vec{r}\|)$$

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - V(\|\vec{r}\|) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}\|^2 - V(\|\vec{r}\|)$$

↳ L dipende solo dalle norme dei vettori \vec{r} e $\dot{\vec{r}}$

⇒ L è INVARIANTE in ROTAZIONI ⇒

⇒ Momento angolare \vec{M} è cost. del moto

↪ 3 cost. del moto scalari (le tre componenti del momento angolare)

Se \vec{M} è cost. del moto, i moti $\vec{r}(t)$ che soddisfanno le eq. di Lagr. sono f.c.

$$\vec{r}(t) \times m \dot{\vec{r}}(t) = \vec{M}_{\text{cost.}} \quad (*)$$

↳ ⇒ $\vec{r}(t)$ e $\dot{\vec{r}}(t) \perp \vec{M}$

Se $\vec{M} \neq 0$ è fisso durante il moto, vuol dire che

$\vec{r}(t)$ e $\dot{\vec{r}}(t)$ stanno sempre nel piano \perp al man.

ang. \vec{M}

\Rightarrow il moto avviene su un PIANO

(Se $\vec{M}=0$, $\vec{F} \parallel \dot{\vec{r}} \rightarrow$ il moto è rettilineo.)

\rightsquigarrow possiamo prendere l'asse $z \parallel \vec{M}$ cost.

$$\Rightarrow \vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 \quad \dot{\vec{r}} = \dot{x} \vec{e}_1 + \dot{y} \vec{e}_2$$

\rightarrow ridotto il problema a 2 GRADI DI LIBERTA'

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \swarrow \vec{M} \parallel \text{asse } z$$

- per scrivere L a 2 gradi di libertà, abbiamo usato la DIREZIONE di \vec{M} , cioè 2 cost. del moto. Rimane il modulo (ovvero M_z , se $\vec{M} = M_z \vec{e}_z$)
 \rightarrow ci aspettiamo di ritrovare qta cost. del moto nel problema a $n=2$.
 $\begin{matrix} \uparrow \\ M_x = 0 \\ M_z = 0 \end{matrix}$

Passiamo a COORD. POLARI

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ y = r \sin \theta & \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - V(r)$$

→ θ è una COORDINATA CICLICA

→ $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}$ è COST. DEL MOTO

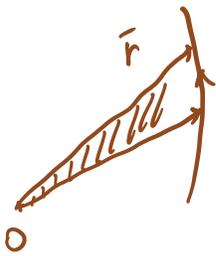
$M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$

⇒ $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \right) = 0$ descrive un moto che risolve eq. Lap.

VELOCITÀ
AREOLARE

Velocità
angolare è
cost. del moto

↔ 2^a legge di
Keplero



$A(t) = \int_{\theta_0}^{\theta(t)} \int_0^{r(\theta')} r' dr' d\theta' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} r(\theta')^2 d\theta'$

$\frac{dA}{dt} = \frac{r(t)^2}{2} \dot{\theta}(t)$

$m r^2 \dot{\theta} = l$ costante

⇓

$\dot{\theta} = \frac{l}{m r^2} > 0$
(sempre)

→ $\theta(t)$ è una funzione
MONOTONA (crescente)

↓
 $\theta(t)$ è invertibile

→ mi dà una buona
trasformazione di coordinate

θ può essere usata come variabile in luogo di t

ciò possiamo descrivere le TRAIETTORIE
(ORBITE) con le funt.

$$r(\theta) \equiv r(t(\theta))$$

Coord. ciclica θ , $\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$ $L = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - V(r)$

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} &= \left(L - \dot{\theta} p_{\theta} \right) \Big|_{\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}} \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{l}{mr^2} \right)^2 - V(r) - \left(\frac{l}{mr^2} \right) l \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - V_{\text{eff}}(r) \quad \text{con } V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$$

↳ risolvereb eq. di Lap.

otteniamo $r(t)$

Poi prendo $\dot{\theta}(t) = \frac{l}{mr(t)^2} \rightarrow \theta(t)$

Se riusciamo a risolvere il problema
a 1 grado di lib. con Lap. L_{eff} , siamo

poi in grado di ottenere il cost $(r(t), \theta(t))$
sul piano.

→ nel piano (x, y) le orbite sono LIMITATE
(ma non necessariamente CHIUSE)

$E_a)$ - min. del pot. eff. $\dot{r}(t) = 0 \rightarrow r(t) = \text{cost.}$

→ ORBITA è CIRCOLARE ($\dot{\theta} \neq 0$)

Caso Kepleriano $V(r) = -\frac{K}{r}$

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{K}{r} - \frac{l^2}{2mr^2}$$

Ep. di Lagr.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r}$$

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3}$$

$$\ddot{r} = -\frac{K}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2 r^3} \quad (*)$$

Invece di trovare la funzione $r(t)$ che risolve $(*)$,

possiamo cambiare variabili $t \mapsto \theta$ e cerchiamo

$$r(\theta) \equiv r(t(\theta)) \leftrightarrow r(t) = r(\theta(t)) \quad \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \leftarrow \dot{r}(\theta)$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \dot{r}(\theta) \cdot \dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \left(-\frac{l}{m} \right) \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\ddot{r} = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{u^2 r^3} \iff -\frac{l^2}{u^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{u^2 r^3}$$

$$\rightarrow -\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{km}{l^2} + \frac{1}{r}$$

$$\left(\begin{array}{l} u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \\ \frac{1}{\eta} = \frac{km}{l^2} \end{array} \right.$$

$$u'' + u = \frac{1}{\eta}$$

Eq. lin. 2° ordine.

Solut. partic. : $u(\theta) = \frac{1}{\eta}$

Solut. gen. omog. ass. ($u'' = -u$) : $u(\theta) = C \cos(\theta - \theta_0)$

$$C = \frac{e}{\eta}$$

$$u(\theta) = \frac{1}{\eta} (1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

↑
invers. di E

Equazione di
una CONICA nel
piano
(in coord. polari)

Prob. meccan. $L_{eff} = T_{eff} - V_{eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \left(-\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \right)$

$\leadsto E = T_{eff} + V_{eff}$ cost. del moto

Dato E , r_{\min} t.c. $V_{\text{eff}}(r_{\min}) = E$.

$$r_{\min} = \frac{\eta}{1+e} \quad (\text{da solut. gen. } r(\theta))$$

$$V_{\text{eff}}(r_{\min}) = E \Rightarrow -\frac{k}{r_{\min}} + \frac{l^2}{2\mu r_{\min}^2} = E \rightarrow \text{eq. di 2° grado in } \frac{1}{r_{\min}}$$

$$\frac{l^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_{\min}} \right)^2 - k \left(\frac{1}{r_{\min}} \right) - E = 0$$

$$\left(\frac{1}{r_{\min}} \right)_{1/2} = \frac{k\mu}{l^2} \pm \frac{\mu}{l^2} \sqrt{k^2 + \frac{2El^2}{\mu}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = \frac{k\mu}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right)$$

$$\Rightarrow r_{\min} = \frac{l^2 / \mu k}{1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$$

$$\text{ma } r_{\min} = \frac{\eta}{1+e}$$
$$\frac{1}{\eta} = \frac{k\mu}{l^2}$$

e è l'eccentricità della conica

$0 \leq e < 1 \rightarrow$ ELLISSE $\leftarrow E < 0$

$e = 1 \rightarrow$ PARABOLA $\leftarrow E = 0$

$e > 1 \rightarrow$ IPERBOLE $\leftarrow E > 0$