Prop. Per un moto centrale con $V(r) = -\frac{k}{r}$, $k>0$, le ORBITE sono CONICHE con FUOCO nell'ORIGINE (centro delle forze) di ep.

$$\boxed{r(\theta) = \frac{\eta}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}}$$

con parametro η ed eccentricità e dati da

$$\eta = \frac{\ell^2}{mk} \qquad e = \sqrt{1+\frac{2E\ell^2}{mk^2}}$$

Esse sono ellissi, parabole o iperboli per

$E<0$ $\qquad$ $E=0$ $\qquad$ $E>0$

$$L_{eff} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \underbrace{- V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}}_{-V_{eff}(r)}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \text{cost. del moto}$$

$\dot{r} = \pm\sqrt{\;}$

scelto (+) cioè formula è valida per pezzi di orbita dove $\dot{r}>0$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff}(r))} \Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff}(r))}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = t_0 + \int_{r_0}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V_{eff}(r))}}$$

$$\Rightarrow t(r) \xrightarrow[\text{la funz.}]{\text{invertire}} r(t)$$

Ricordiamo che $\dot{\theta}(t) = \frac{\ell}{mr^2(t)} \to d\theta = \frac{\ell}{mr^2}dt \to$

$$\to \theta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\ell\, dt'}{mr^2(t')}$$

$$\rightsquigarrow \quad d\theta = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

ovvero $\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}}\Big|_{t=t(r)} = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{1}{r^2\sqrt{E-V_{eff}(r)}}$

$$\downarrow$$

$$\theta(r) = \theta_0 + \int_{r_0}^{r} \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E-V_{eff}(r')}}$$

Consideriamo moti con $E<0$ (orbite limitate nel piano; nel piano di fase sono curve chiuse)

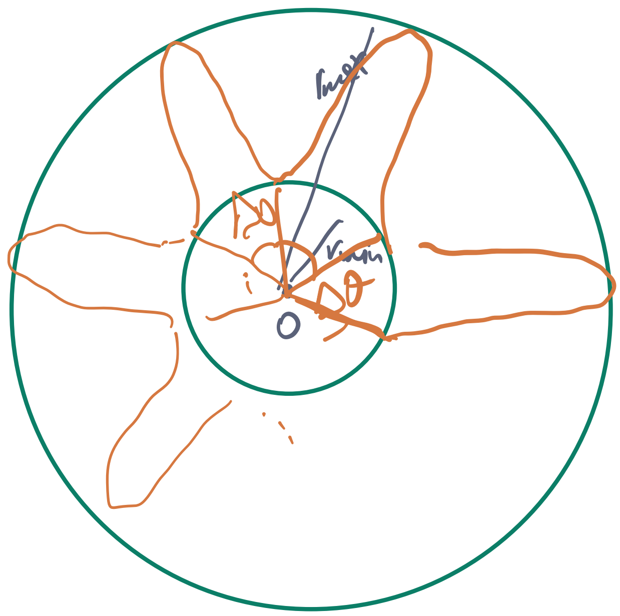
- moto $r(t)$ è periodico con periodo $T_r(E,\ell)$

- ogni periodo di r, $\theta(t)$ avanza di una quantità

$$\Delta\theta = 2\frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-V_{eff}(r)}}$$

- θ è una variabile periodica di periodo 2π

$\Rightarrow$ l'orbita nel piano è CHIUSA se $\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$



Se $\frac{2\pi}{\Delta\theta} \in \mathbb{Q}$ prima o poi l'orbita si chiude.

Altrimenti è detto "moto a rosetta" (l'orbita non chiude)

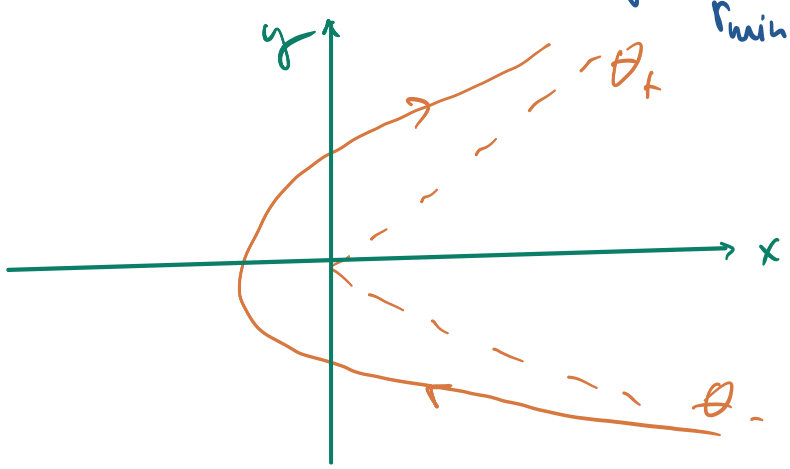
Consideriamo il caso $E > 0$ (orbite illimitate) ← processo d'urto

$$r \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \infty \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \theta(t) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} \theta_\pm \quad \text{cost.}$$

$$\Delta\theta = \theta_+ - \theta_- = \frac{2\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - V_{eff}(r)}}$$

ANGOLO DI SCATTERING



Ricaviamo le orbite con un altro metodo:

Utilizziamo $\Theta(r) = \Theta_0' + \int_{r_0}^{r} \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E - V_{eff}(r')}}$ per

calcolare le ORBITE per $V(r) = -\frac{K}{r}$, cioè

$$V_{eff}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}} = \sqrt{1 + \frac{2E\eta}{K}}$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{mK}{\ell^2}$$

$$\Theta(r) - \Theta_0' = \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mK}{\ell^2\rho} - \frac{1}{\rho^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \left(\frac{2}{\eta\rho} - \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\eta^2}\right) + \frac{1}{\eta^2}}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{2E}{\eta K} + \frac{1}{\eta^2} - \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\eta}\right)^2}} = \int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{\frac{1}{\eta^2}\left[\left(\frac{2E\eta}{K} + 1\right) - \left(\frac{\eta}{\rho} - 1\right)^2\right]}}$$

$$= \int_{r_0}^{r} \frac{\eta\, d\rho}{\rho^2\sqrt{e^2 - e^2\left(\frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}\right)^2}} = \frac{\eta}{e}\int_{r_0}^{r} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{1 - \left(\frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}\right)^2}}$$

$$w = \frac{\eta}{e\rho} - \frac{1}{e}$$

$$dw = -\frac{\eta}{e\rho^2}\, d\rho$$

Siccome $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, allora $\arcsin(x) = -\arccos(x) + \frac{\pi}{2}$

$$= -\int_{\frac{\eta}{er_0}-\frac{1}{e}}^{\frac{\eta}{er}-\frac{1}{e}} \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}} = \arccos\left(\frac{\eta}{er}-\frac{1}{e}\right) + \text{cost.}$$

$$\| \quad \theta(r) - \theta_0'$$

$$\Rightarrow \theta(r) = \arccos\left(\frac{\eta}{er}-\frac{1}{e}\right) + \underbrace{\theta_0' + \text{cost}}_{\theta_0}$$

$\downarrow$ invertiamo

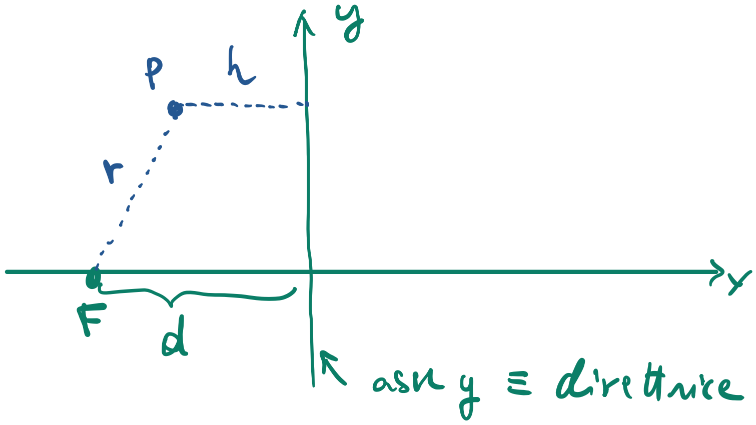
$$\frac{\eta}{er(\theta)} - \frac{1}{e} = \cos(\theta - \theta_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\eta}{\cancel{e}r(\theta)} = \frac{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}{\cancel{e}}$$

$$r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}$$

Coniche

Coniche : curve del piano date dal luogo dei pti P per cui è costante il rapporto delle distanze r e h da un pto (FUOCO) e da una retta (DIRETTRICE)



$$\frac{r}{h} \equiv e \qquad d \equiv \frac{h}{e}$$

$P = (x, y)$

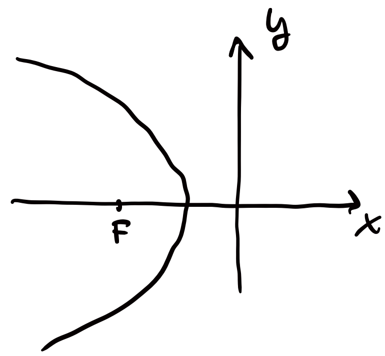
In coord. cartesiane

$$r = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

$$h = |x|$$

→ eq. della conica: $\frac{r^2}{h^2} = e^2$ cioè

$$(x+d)^2 + y^2 = e^2 x^2$$



$$x^2 + 2dx + d^2 + y^2 - e^2 x^2 = 0$$

$$x^2(1-e^2) + 2d \cdot x + y^2 = -d^2$$

- se $e = 1$ → $x = -\frac{1}{2d} y^2 - \frac{1}{2} d$

- se $e \neq 1$ → $x^2 + 2\frac{d}{1-e^2} x + \frac{d^2}{(1-e^2)^2} + \frac{y^2}{1-e^2} = -\frac{d^2}{1-e^2} + \frac{d^2}{(1-e^2)^2}$

$$\Big(\underbrace{x + \frac{d}{1-e^2}}_{\equiv \tilde{x}}\Big)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\tilde{x}^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{\tilde{x}^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{(ed)^2}{1-e^2}} = 1$$

se $e>1$ iperbole

se $e<1$ ellisse

ellisse

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

iperbole

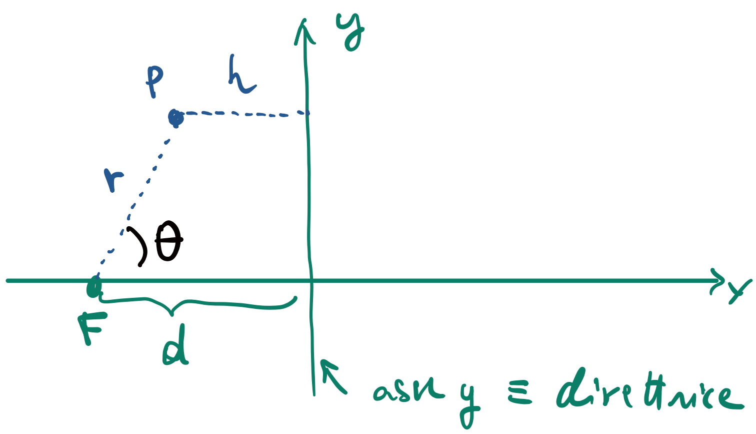
$$a = \frac{ed}{1-e^2} \qquad b = \frac{ed}{\sqrt{|1-e^2|}}$$

ELLISSE:

$$a = \frac{\eta}{1-e^2} \qquad b = \frac{\eta}{\sqrt{1-e^2}}$$

$a > b$

$$b^2 = \eta a$$



$$\frac{r}{h} \equiv e \qquad d \equiv \frac{\eta}{e}$$

In coord. polari (con origine in F)

$$e = \frac{r}{h} \qquad h = d - r\cos\theta \rightarrow$$

$$\frac{r}{e} = d - r\cos\theta \rightarrow r\left(\frac{1}{e} + \cos\theta\right) = d$$

$d = \eta/e$

$$\rightarrow r(\theta) = \frac{\eta}{1 + e\cos\theta}.$$

Leggi di Keplero

1) Pianeti si muovono descrivendo delle ellissi, con fuoco sul SOLE

2) $\bar{r}(t)$ (con origine nel Sole) descrive aree uguali in tempi uguali ($\Rightarrow$ velocità areolare è cost.)

3) Detto T il periodo di rivoluzione, T^2 è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse.

1) e 2) già dimostrate

Prop. Periodo di T del moto sulle ellissi è legato al semiasse maggiore dalla relazione

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k}$$

Dim. Usiamo la 2) legge:

$$T = \frac{\text{area ellisse}}{\text{velocità areolare}} = \frac{\pi a b}{\frac{1}{2} r \dot{\theta}} = \frac{\pi a b}{\ell/2m}$$

$$T^2 = \frac{4 m^2 \pi^2 a^2 b^2}{\ell^2} = \frac{4 m^2 \pi^2 a^2}{\ell^2}\,\eta a = \frac{4 \cancel{m^2} \pi^2 a^3}{\cancel{\ell^2}} \frac{\cancel{\ell^2}}{\cancel{m} k} =$$

$$= \frac{4\pi^2 m}{k} a^3 \quad //$$

ELLISSE:

$a = \frac{r}{1-e^2}$ $b = \frac{r}{\sqrt{1-e^2}}$ $b^2 = r a$

$a > b$

$K = G m M_s$ dove Keplero interpreta m come la massa del pianeta

$\downarrow$

$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$ $\rightarrow$ cioè T è indip. dalla massa del pianeta

In realtà $m = \frac{m_p M_s}{m_p + M_s} \neq m_p$

e $K = G \underline{m_p} M_s$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{K} = \frac{4\pi^2 m_p M_s}{m_p + M_s} \cdot \frac{1}{G m_p M_s} =$$

$$= \frac{4\pi^2}{G M_s} \frac{1}{1 + \frac{m_p}{M_s}}$$

per $m_p \ll M_s$ $\frac{m_p}{M_s} \ll 1$

$$\sim \frac{4\pi^2}{G M_s} \left(1 - \frac{m_p}{M_s} + \dots \right)$$

trascurabile