SISTEMI DINAMICI

Dinamica simbolica : $\to \Sigma'$

$$f_\lambda(x) = \lambda x(1-x) \qquad \lambda > 4$$

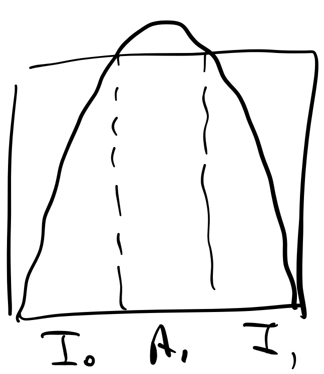
$\to$ $\exists$ orbite che escono da $I = [0,1]$

$$\Lambda = \{ \text{pti di } I \text{ tali che le loro orbite non escono da } I \}$$

$$\Lambda = I - \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

A_0 orbite escono subito

$$I - A_0 = I_0 \cup I_1$$



Ad un punto $x_0 \in \Lambda$ (non lascia I)

associamo $S(x_0) = (s_0\, s_1\, s_2 \,\text{----}\,)$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Si dice dove l'iterato i-esimo si trova: se in I_0 o in I_1

Σ' l'insieme di tutte le sequenze di 0 e 1.

Σ ha una metrica

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

$d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$ quando $s_i = t_i$ per $i = 0, \ldots, n$

$d(s,t)_{max} = 2$

<u>Teorema</u> la funzione itinerario

$S : \Lambda \longrightarrow \Sigma'$ è omeomorfismo (per $\lambda > 4$)

La mappa shift

$$\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma'$$

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$$

Notiamo che è due a uno

$$\sigma(0\, s_1 s_2 s_3 \dots) = \sigma(1\, s_1 s_2 s_3 \dots)$$
$$= (s_1 s_2 s_3 \dots)$$

$\cancel{0}110011\dots$
$\cancel{1}110011\dots$

Vedremo che: σ è caotica, coniugata a f_λ, ma molto più facile.

Proposizione $\sigma : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$ è continua

Dim $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$.

Prendiamo un $\epsilon > 0$ e un n tale che $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Scegliamo $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$

Se abbiamo $t = (t_0 t_1 \dots)$ tale che $d(s,t) < \delta$, allora (per una proposizione precedente) $s_i = t_i$ per $i = 0, \dots, n+1$. Quindi

$$\sigma(s) = (s_1 s_2 \dots)$$

$$\sigma(t) = (s_1 s_2 \dots s_n s_{n+1} t_{n+2} t_{n+3} \dots)$$

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$$ e quindi

σ è continua

Punti periodici di σ?

$$\sigma(\overline{0}) = \sigma(0000 \dots) = (000 \dots)$$
$$\sigma(\overline{1}) = \sigma(1111 \dots) = (111 \dots)$$

$$(\overline{01}) = (01010 \dots)$$ sono 2 cicli
$$(\overline{10}) = (101010 \dots)$$

In generale un punto periodico di periodo n è $(\overline{s_0 s_1 \dots s_{n-1}})$

perché ogni iterazione di σ si mangia la prima entrata della stringe.

<u>Teorema</u> $S : \Lambda \to \Sigma$ è una coniugazione tra f_λ $(\lambda > 4)$ e σ.

<u>Dim</u> Abbiamo visto che S è un omeomorfismo. Dobbiamo solo dimostrare

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & \Lambda \\ \downarrow S & & \downarrow S \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array} \qquad S \circ f_\lambda = \sigma \circ S$$

Prendiamo $x_0 \in \Lambda$. $S(x_0) = (s_0 s_1 s_2 \cdots)$

$x_0 \in I_{s_0}$, $f_\lambda(x_0) \in I_{s_1}$, $f_\lambda^2(x_0) \in I_{s_2}$, ...

$$S(f_\lambda(x_0)) = (s_1 s_2 \cdots)$$

$$= \sigma(S(x_0))$$

☺

Possiamo costruire esplicitamente

$$s^* = (\underbrace{0 \quad 1}_{\text{blocco } 1} \,|\, \underbrace{00 \quad 01 \quad 10 \quad 11}_{\text{blocco } 2} \,|\, \underbrace{000 \quad 001 \cdots}_{\text{blocco } 3} \,|\, \cdots)$$

nel blocco i-esimo ci sono tutte le possibili sequenze di 0 e 1 di lunghezza i

In particolare prendo un qualsiasi $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$. Considero i primi n termini: posso sempre trovarli dentro s^*. $\exists\, k$ tale che

$$\sigma^k(s^*) = (t_0 t_1 \dots t_n s_{n+1} s_{n+2} \dots)$$

Quindi $d(\sigma^k(s^*), t) \leq \frac{1}{2^n}$

L'orbita di s^* sotto σ passa arbitrariamente vicino ad ogni punto di Σ. Quindi l'orbita è densa.

$\rightarrow$ σ è transitiva

Possiamo trovare ∞ punti con

orbite dense semplicemente

permutando i blocchi.

Punti periodici sono densi

$\forall\ \tau = (\tau_0 \tau_1 \cdots)$ allora prendo

i primi i-termini, costruisco

$s = (\overline{\tau_0 \cdots \tau_i})$

$\Rightarrow \quad d(s, \tau) \leq \frac{1}{2^i} \quad \Rightarrow$ i punti periodici sono densi.

Per finire: σ è sensitivo ai

dati iniziali. Costruiamo

$s = (s_0 s_1 s_2 \cdots s_n s_{n+1} s_{n+2} \cdots)$

$s' = (s_0 s_1 s_2 \cdots s_{n-1} \hat{s}_n \hat{s}_{n+1} \hat{s}_{n+2} \cdots)$

dove $\hat{s}_i = \begin{cases} 0 & \text{se } s_i = 1 \\ 1 & \text{se } s_i = 0 \end{cases}$ "nega s"

$d(s, s') \leq \frac{1}{2^n}, \quad d(\sigma^{n+1}(s), \sigma^{n+1}(s')) = 2$

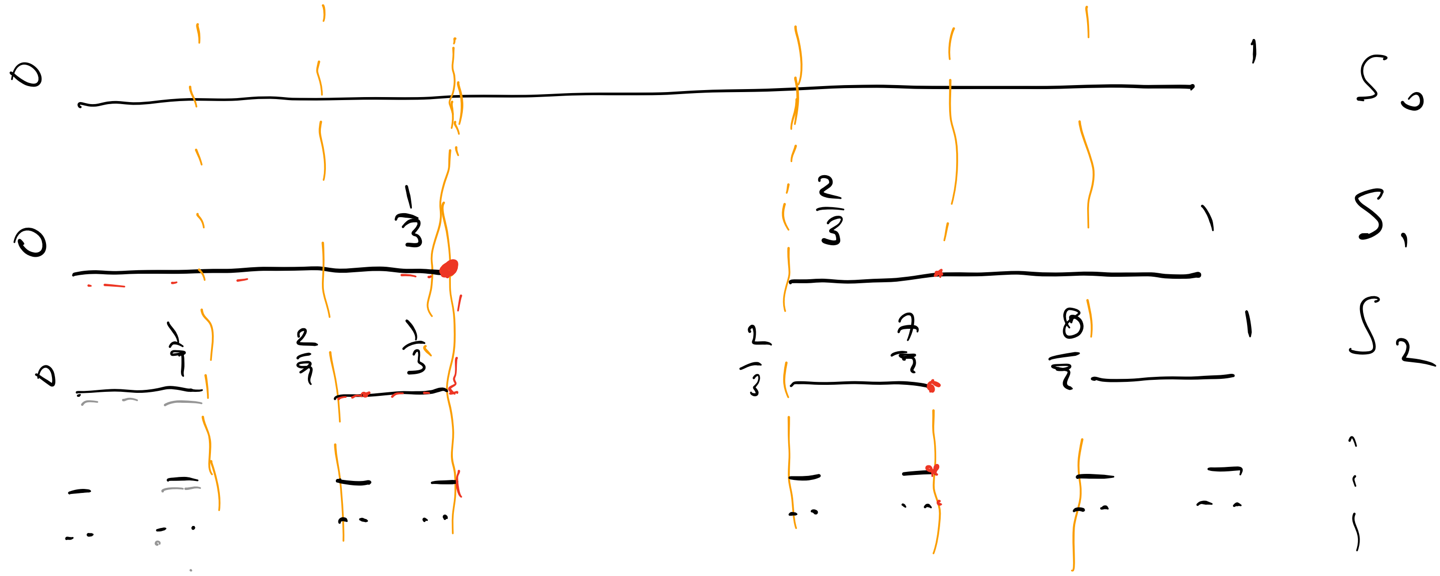
Teorema: σ è caotica in Σ. Quindi, f_λ è caotica in Λ per $\lambda > 4$.

Commento: σ è un modello calcolabile di una funzione caotica.

L'insieme di Cantor

Il nostro Λ è un esempio di insieme di Cantor.

Descriviamo l'esempio più semplice: prendiamo $I = [0,1]$ e applichiamo la regola: ad ogni intervallo chiuso togliamo l'aperto centrale di lunghezza $\frac{1}{3}$ dell'intervallo di partenza



Al passo n abbiamo 2^n chiusi di lunghezza $\frac{1}{3^n}$

L'insieme di Cantor è definito per $n \to \infty$

<u>Definiamo</u>: "l'indirizzo" di ciascun punto di C: ad ogni passo un punto di C si trova o a destra (R) o a sinistra (L) del pezzo rimosso

Ad ogni punto di C associamo una stringa infinita LRRLRLLL---

Ad esempio:

0 : LLLL ---

1 : RRRR ---

$\frac{1}{3}$: LRRR ---

$\frac{7}{9}$: RLRR ---

Ad esempio LRLRLRLR ---

$$\left[0, \tfrac{1}{3}\right] \cap \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}\right] \cap \left[\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{27}\right] \cap \left[\tfrac{20}{81}, \tfrac{7}{27}\right] \cap \cdots$$

<u>Proposizione</u> C non è numerabile

<u>Dim</u> Assumiamo per assurdo che sia numerabile:

1. LLLL ---
2. RRRR ---
3. LRLR ---
4. RLRL ---

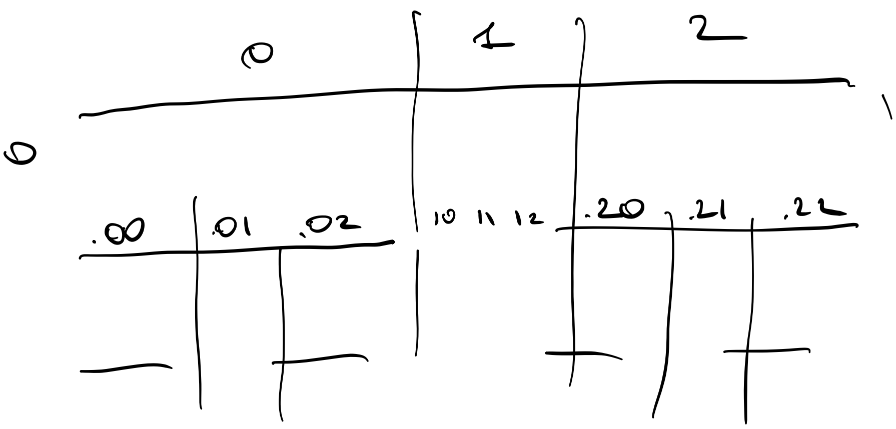
⋮

RLRR - -

Costruisco una sequenza tale che al posto i-esimo c'è la negazione ($\bar{L}=R$, $\bar{R}=L$) dell'entrata i-esima della lista i-esima.

Questa sequenza non appartiene alla lista $\rightarrow$ assurdo.

Possiamo descrivere C come



$x \in [0,1]$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

con $a_i = 0,1,2$

$\rightarrow$ scriviamo x in base 3.

Allora i punti di C sono tutti quelli che possono essere scritti in base 3 senza che appaia 1.

⌐ l'espansione in base 3 non è unica

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 0 + 0 + 0 + \dots = 0.1000\dots$$

$$= \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots = 0.02222\dots$$

$$= \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{2}{9}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

→ basta che esista una rappresentazione senza 1 ⌟

<u>Proposizione</u>: C ha tanti punti quanti $[0,1]$.

<u>Dim</u>: $x \in C$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$, $a_i = 0, 2$

Rinomino 2 come 1. → trovo una sequenza infinita a_i di $0, 1$

Penso alla stringa che ho ottenuto

come all'espansione in base 2 di un numero qualsiasi in $[0,1]$

<u>Proposizione</u> C ha misura nulla.

<u>Dim</u> La lunghezza di tutti gli intervalli rimossi è:

$$\frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{9} + 4\,\frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$$

$$C = I \setminus \text{complemento}$$