LEGGE ORARIA (cioè soluzione delle eq. del moto)

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_{eff}(r)\right)}} \longrightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^{r} \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{\frac{k}{\tilde{r}} - \frac{\ell^2}{2m\tilde{r}^2} + E}} \to t(r) \xrightarrow[\text{inversione}]{} r(t)$$

(a)

$$d\theta = \frac{\ell}{mr^2}\, dt \longrightarrow t = \frac{m}{\ell} \int_{\theta_0}^{\theta} r(\tilde{\theta})^2 \, d\tilde{\theta} \to t(\theta) \xrightarrow[\text{inv}]{} \theta(t)$$

$$= \underbrace{\frac{m}{\ell}\, q^2}_{\frac{\ell^3}{mk^2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{\left[1 + e\cos(\tilde{\theta} - \theta')\right]^2}$$

Integrali da fare non sono complicati e quindi $t(r)$ e $t(\theta)$ sono esprimibili in termini di funzioni elementari. Quello che è complicato spesso è l'INVERSIONE di tale funzioni per ottenere $r(t)$ e $\theta(t)$

Esempio: prendiamo $\theta' = 0$ ($\theta = 0$ è il perielio, cioè $r_{min}$) e consideriamo la traiettoria PARABOLICA ($e = 1$)

$$\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$t = \frac{\ell^3}{mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{(1+\cos\tilde{\theta})^2} = \frac{\ell^3}{4mk^2} \int_0^{\theta} \frac{d\tilde{\theta}}{\left(\cos\frac{\tilde{\theta}}{2}\right)^2 \left(\cos\frac{\tilde{\theta}}{2}\right)^2}$$

$$x = \tan\frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{\sin\tilde{\theta}/2}{\cos\tilde{\theta}/2}$$

$$= \frac{\ell^3}{2mk^2} \int_0^{\tan\theta/2} dx\,(1+x^2) = \frac{\ell^3}{2mk^2}\left[\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right] = t(\theta)$$

$t(\theta)$ è funz. semplice, ma per ottenere $\theta(t)$ dobbiamo risolvere un'eq. cubica (complicato) e infine invertire la tangente.

[Osservazione: $\theta = 0 \leftrightarrow t = 0$ $\quad \theta = \pm\pi \leftrightarrow t \to \pm\infty$
(consist. con traiettoria parabolica) ]

Una volta che abbiamo ottenuto $\theta(t)$, per trovare $r(t)$:

1) risolvere $(\bullet)$

2) siccome conosciamo $r(\theta)$:

$$r(t) = r(\underline{\theta(t)})$$

Metodo alternativo: prima risolvere $(\bullet) \to r(t)$
e poi mettere $r(t)$ in $d\theta = \frac{\ell}{mr^2}\,dt$ e integrare
per trovare $\theta(t)$.

# ORBITA utilizzando il vettore di (Laplace-) Runge-Lenz.

Finora abbiamo calcolato $r(\theta)$ in 2 modi:

Valido per ogni potenziale $V=V(r)$

1) risolvendo le eq. di Lagrange (Eq. diff. 2° ord.) per il problema <u>RIDOTTO</u> (usando cost. del moto $\bar{M}$)

2) abbiamo usato un'altra cost. del moto, l'ENERGIA, per ridurre l'eq. diff. del 2° ord. a un'eq. diff. al 1° ord. (risolvibile per quadrature)

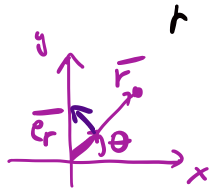
Introduciamo un'ulteriore cost. del moto che ci permetterà di ridurre il problema del calcolo di $r(\theta)$ alla risoluzione di eq. diff. "del 0° ordine" cioè un'eq. algebrica.

→ questo è vero se $V(r) = -\frac{k}{r}$

**Prop.** Nel moto Kepleriano la seguente variab. dinamica (vettoriale) si conserva:

$$\bar{A} = \bar{p} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r} = m\dot{\bar{r}} \times \bar{M} - mk\frac{\bar{r}}{r} \qquad (\bar{M} = l\bar{e}_z)$$

↑ giace sul piano dell'orbita




**Dim.** Valutiamo $\bar{A}$ in $r(t)$ e $\theta(t)$

$$\bar{r} = r\,\bar{e}_r$$

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\,\dot{\bar{e}}_r = \dot{r}\,\bar{e}_r + r\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_r = -\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\bar{e}_y = \dot{\theta}\,\bar{e}_\theta$$

$$\bar{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\bar{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{e}_x - \dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\bar{e}_y = -\dot{\theta}\,\bar{e}_r$$

$$\ddot{\bar r} = \ddot r\, \bar e_r + \dot r \dot\theta\, \bar e_\theta + \dot r \dot\theta\, \bar e_\theta + r \ddot\theta\, \bar e_\theta - r\dot\theta^2\, \bar e_r$$
$$\overset{!}{=} (\ddot r - r\dot\theta^2)\bar e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\bar e_\theta$$

$\bar e_r \times \bar e_\theta = \bar e_z$ , $\underline{\bar e_r \times \bar e_z = -\bar e_\theta}$ , $\underline{\bar e_\theta \times \bar e_z = \bar e_r}$

$M = l\bar e_z$

$$\bar A = m\,\dot{\bar r} \times \bar M - mk\,\frac{\bar r}{r}$$
$$\overset{!}{=} -ml\dot r\, \bar e_\theta + mr\dot\theta l\, \bar e_r - mk\, \bar e_r$$

$$\dot{\bar A} = -ml\ddot r\, \bar e_\theta + 2ml\dot r\dot\theta\, \bar e_r + mr\ddot\theta l\, \bar e_r + mr\dot\theta^2 l\, \bar e_\theta - mk\dot\theta\, \bar e_\theta$$

valutiamola in $r(t)$ e $\theta(t)$ che soddisfano le eq. del moto

$$\dot\theta = \frac{l}{mr^2} \qquad \ddot r = -\frac{k}{mr^2} + \frac{l^2}{m^2r^3}$$
$$\downarrow$$
$$\ddot\theta = -\frac{2l}{mr^3}\dot r$$

$$= \bar e_\theta\, m\left[-l\left(\cancel{-\frac{k}{mr^2}} + \cancel{\frac{l^2}{m^2r^3}}\right) + \cancel{rl\,\frac{l^2}{m^2r^4}} - \cancel{k\,\frac{l}{mr^2}}\right]$$
$$+\bar e_r\, m\left[2\cancel{l\dot r\left(\frac{l}{mr^2}\right)} + lr\cancel{\left(-\frac{2l}{mr^3}\dot r\right)}\right] = 0\,!$$

questo avviene solo quando $r(t)$ e $\theta(t)$ soddisf. eq. del moto //

[Ricordiamoci come abbiamo utilizzato che $\frac{m\dot x^2}{2} + V(x)$ è cost. del moto: abbiamo preso una cost. E

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \rightsquigarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Scegliamo una cost. $\quad a\cos\theta_0\,\bar{e}_x + a\,\text{sen}\,\theta_0\,\bar{e}_y$

↳ imponiamo la condiz.

$$a\cos\theta_0\,\bar{e}_x + a\,\text{sen}\,\theta_0\,\bar{e}_y = \bar{A}(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta})$$

Eq. in $r(\theta)$ e $r'(\theta)$

Si può scegliere sist. di rif. t.c. $\bar{A}$ punti lungo $\bar{e}_x$, cioè $\bar{A} = a\bar{e}_x$.

$\bar{e}_r = \cos\theta\,\bar{e}_x + \text{sen}\,\theta\,\bar{e}_y$

$\bar{e}_\theta = -\text{sen}\,\theta\,\bar{e}_x + \cos\theta\,\bar{e}_y$

$$a\cos\theta_0\,\bar{e}_x + a\,\text{sen}\,\theta_0\,\bar{e}_y =$$

$$= -ml\dot{r}\,\bar{e}_\theta + mr\dot{\theta}l\,\bar{e}_r - mk\,\bar{e}_r$$

$$=(ml\dot{r}\,\text{sen}\,\theta + mr\dot{\theta}l\cos\theta - mk\cos\theta)\,\hat{e}_x +$$
$$+(-ml\dot{r}\cos\theta + mr\dot{\theta}l\,\text{sen}\,\theta - mk\,\text{sen}\,\theta)\,\bar{e}_y$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow mr\dot{\theta} = lu \qquad u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

$$\dot{r} = r'(\theta)\cdot\dot{\theta} = \frac{r'l}{mr^2} = -\frac{l}{m}u' \Rightarrow m\dot{r} = -lu'$$

$$= (-l^2u'\,\text{sen}\,\theta + l^2u\cos\theta - mk\cos\theta)\,\bar{e}_x +$$
$$+(l^2u'\cos\theta + l^2u\,\text{sen}\,\theta - mk\,\text{sen}\,\theta)\,\bar{e}_y$$

2 equazioni nelle incognite $u$ e $u'$

↓ sistema lineare

$$\begin{cases} -u' \operatorname{sen}\theta + u\cos\theta = \dfrac{mk}{\ell^2}\cos\theta + \dfrac{a}{\ell^2}\cos\theta_0 & \cdot\cos\theta \\ & + \\ u'\cos\theta + u\operatorname{sen}\theta = \dfrac{mk}{\ell^2}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{a}{\ell^2}\operatorname{sen}\theta_0 & \cdot\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$u\cos^2\theta + u\operatorname{sen}^2\theta = \overbrace{\frac{mk}{\ell^2}}^{1/\eta}\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + \frac{a}{\ell^2}\left(\cos\theta_0\cos\theta + \operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$a = e\ell^2/\eta$$

$$u = \frac{1}{\eta} + \frac{a}{\ell^2}\cos(\theta-\theta_0)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{1}{\eta} + \frac{e}{\eta}\cos(\theta-\theta_0)$$

$$\longrightarrow \quad r(\theta) = \frac{\eta}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

[ Dal sist. lineare, $\begin{matrix}\cdot\,\operatorname{sen}\theta \\ - \\ \cdot\,\cos\theta\end{matrix}$ $\rightarrow$

$$\rightarrow u' = \frac{e}{\eta}\left(\cos\theta\operatorname{sen}\theta_0 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta_0\right) = -\frac{e}{\eta}\operatorname{sen}(\theta-\theta_0)$$

cioè $u' = \dfrac{du}{d\theta}$ // ]

$\bar{P} \longleftrightarrow$ traslazioni

$\bar{M} \longleftrightarrow$ rotazioni in 3d $SO(3)$ $OO^T = \mathbb{1}$

$\uparrow$ 3 parametri continui

$SO(4)$

$\uparrow$ 6 parametri continui

$\bar{A} \longleftrightarrow$ ?

+ 3 parametri continui

Simmetrie di $L$

moto centrale: $SO(3)$

3 param. cont.

$\downarrow$ Teor. Nöth

3 cost. del moto

$(M_x, M_y, M_z)$

moto kepleriano $SO(4)$

6 param. cont.

$\downarrow$ Teor. Nöth

6 cost. del moto

$(M_x, M_y, M_z, A_x, A_y, A_z)$

$SO(d)$: rotazioni in $\mathbb{R}^d$ $\rightarrow$ parametrizzate dalle rotazioni su piani indip.

$\hookrightarrow$ ce ne sono $\binom{d}{2} = \frac{d!}{2!(d-2)!}$

$SO(2)$: rotaz. in $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ In $\mathbb{R}^2$ ho $\binom{2}{2} = 1$ piano indip. (1 angolo)

$SO(3)$: rotaz. in $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ In $\mathbb{R}^3$ ho $\binom{3}{2} = 3$ piani indip. (3 angoli)

$SO(4)$: rotaz. in $\mathbb{R}^4$ $\rightarrow$ In $\mathbb{R}^4$ ho $\binom{4}{2} = 6$ piani indip. (6 angoli)

$SO(2)$ : $\binom{2}{2}=1$ piano $\rightarrow$ 1 parametro (1 angolo)

$SO(3)$ : $\binom{3}{2}=3$ piani $\rightarrow$ 3 "

$SO(4)$ : $\binom{4}{2}=6$ " $\rightarrow$ 6 "

$SO(d)$ $\binom{d}{2}$ piani $\rightarrow$ $\frac{d(d-1)}{2}$ angoli