

**Università di Trieste**  
**Dipartimento di Ingegneria e Architettura**

**Corso di**  
**Tecnica delle Costruzioni**

**LE TRAVI INFLESSE**

**Prof. Ing. Natalino Gattesco**

# **BIBLIOGRAFIA**

**Toniolo G., Di Prisco M., “Cemento Armato – Calcolo agli stati limite”, Vol. 2a, terza edizione, Ed. Zanichelli, 2010.**

**Park R., Paulay T., “Reinforced Concrete Structures”, John Wiley & Sons, New York, 1975.**

**Mac Gregor J., “Reinforced Concrete – Mechanics and Design”, Prentice Hall, New Jersey, 1988.**

**Santarella L., “Prontuario del Cemento Armato”, XXXVIII edizione, Ed. Hoepli, Milano.**

# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

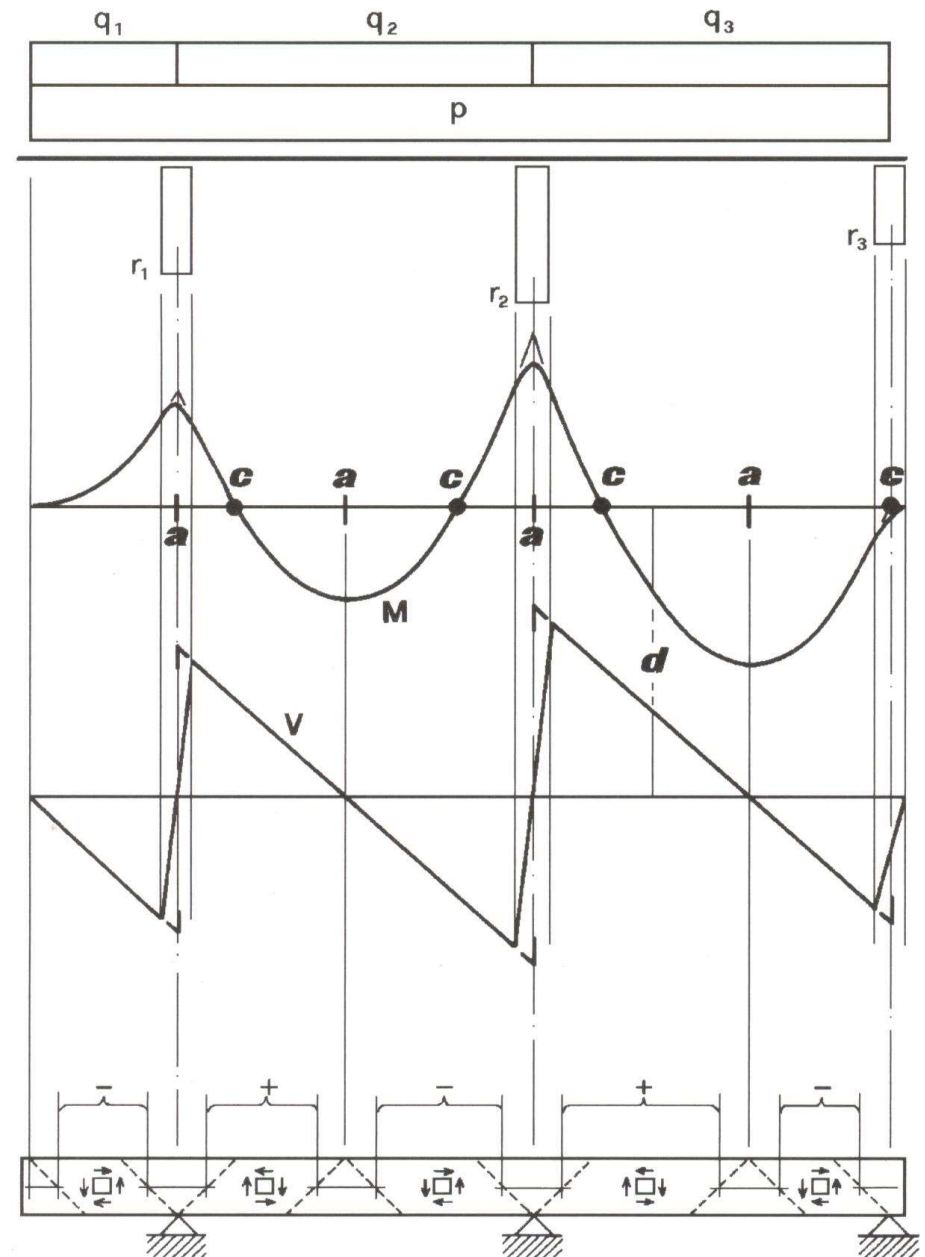
Quanto visto in precedenza per il taglio è riferito a moduli elementari corrispondenti a conci di trave con caratteristiche costanti

## Travi senza armature d'anima

In questo caso il modello fondamentale per il calcolo della resistenza è il

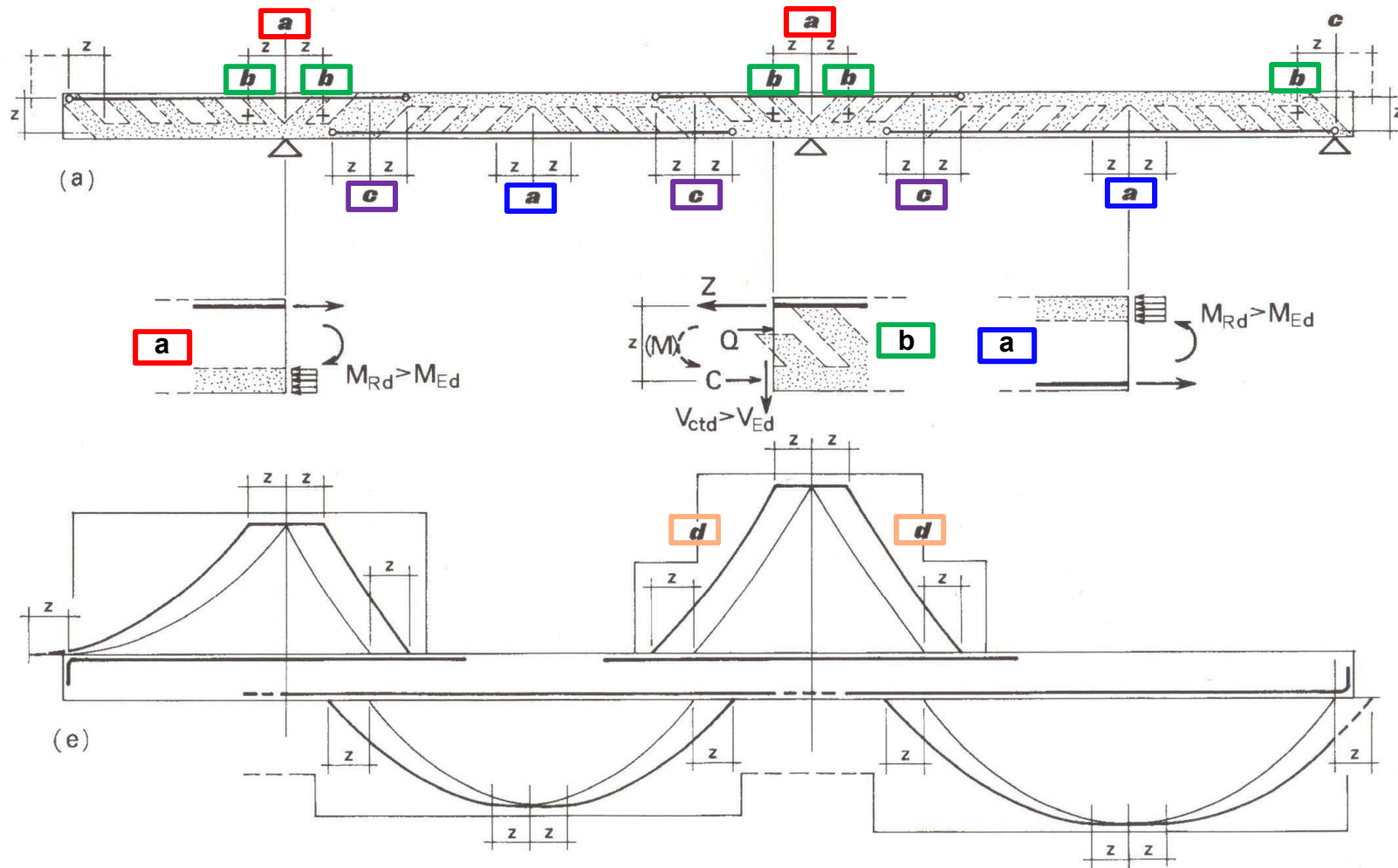
### Modello a pettine

Il modello è costituito da tratti con taglio a segno costante, separati da zone di transizione nelle quali cambia l'orientamento dei denti inclinati.



# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

Si possono quindi individuare 4 tipi di sezione: a, b, c, d



# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

**Si possono quindi individuare 4 tipi di sezione: a, b, c, d**

*Tipo a: sezioni soggette a momento massimo*

*Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo*

*Tipo c: sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento*

*Tipo d: sezioni soggette a taglio e momento diversi da zero*

**Per le sezioni a e b si possono utilizzare direttamente le formule:**

$$M_{Ed} < M_{Rd} \quad (a) \qquad V_{Ed} < V_{ctd} \quad (b)$$

**con l'aggiunta della regola della traslazione dei momenti.**

**L'applicazione di tale regola sistema automaticamente la sovrapposizione delle armature sulle sezioni c.**

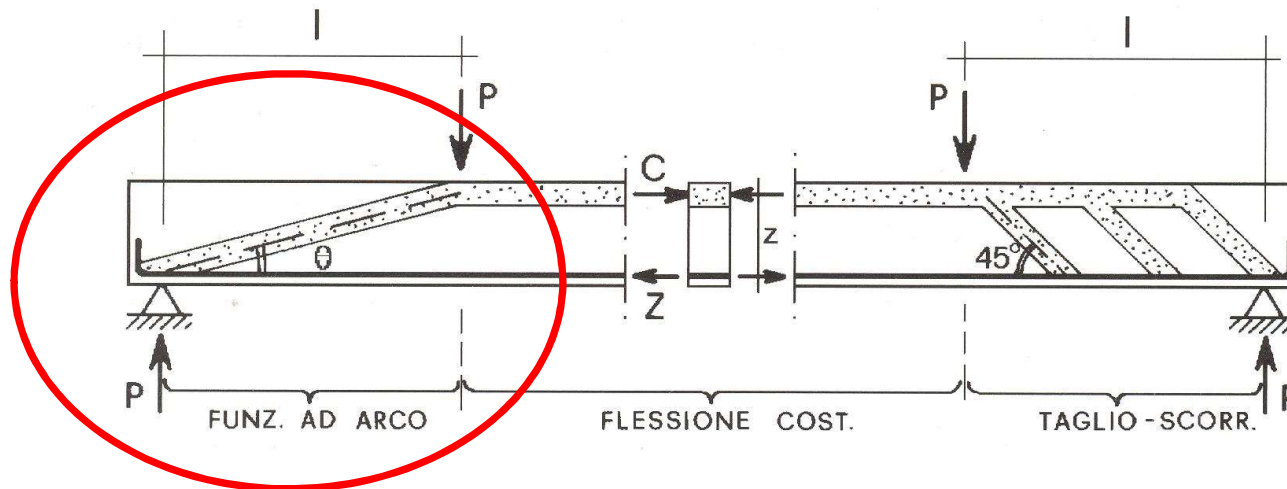
**Naturalmente dovranno essere eseguite entrambe le verifiche di cui sopra nelle sezioni d quando si hanno variazioni di sezione o di armatura (*distribuzione staffe o ferri piegati non costante*).**

# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Comportamento ad arco

Come già anticipato, nelle zone delle travi interessate da fenomeni diffusivi di azioni concentrate, si ha un comportamento ad arco.

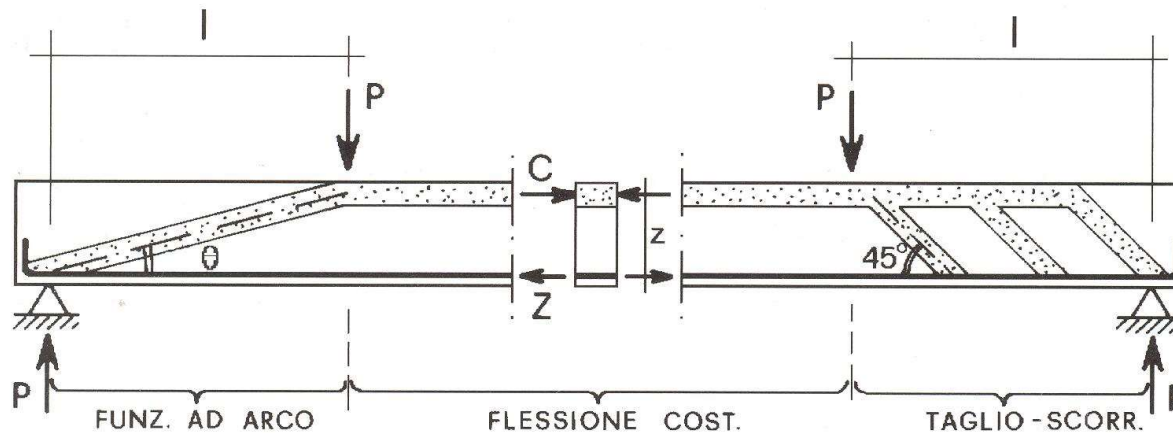
Tale comportamento può essere esteso considerando una deviazione delle azioni su un flusso di compressioni direttamente orientato sull'appoggio.



# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Comportamento flessionale delle travi

Considerando la trave di figura, il collasso può avvenire per



- Rottura per momento flettente di una sezione del tratto centrale
- Rottura per taglio-scorrimento di un concio laterale secondo il meccanismo a pettine
- Rottura con funzionamento ad arco di una sezione laterale con cedimento a compressione del cls o a trazione dell'acciaio

# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Comportamento flessionale delle travi

Nel primo caso, lo stato limite di rovina è definito dal mom. resistente

$$M_{Rd} \cong 0.2 db f_{cd} z = \rho_s db f_{yd} z \quad \bar{x} \cong 0.2 d \quad \rho_s = A_s / db$$

Nel secondo caso, invece, è definito dal taglio resistente

$$V_{Rd} = 0.18 bd \kappa \frac{(100 \rho_s f_{ck})^{1/3}}{\gamma_c}$$

Il prevalere di un meccanismo di rottura sull'altro dipende dal rapporto di forma della trave

$$\lambda = \frac{l}{z} = \text{ctg } \vartheta = \frac{M}{Vz} \quad l = \text{luce di taglio}$$

Si cerca quindi di correlare le situazioni sopraddette con il fattore di snellezza della trave. Per rappresentare le situazioni di rottura si sceglie il valore del momento  $P_E l$ , corrispondente al carico  $P_E$  di collasso.



# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Comportamento flessionale delle travi

Se si adimensionalizza con il momento resistente, il primo tipo di rottura è ovviamente caratterizzato da un valore costante unitario

$$\mu = \frac{M_{Rd}}{M_{Rd}} = 1$$

La rottura per taglio-scorrimento fornisce:

$$\mu = \frac{V_{Rd} l}{M_{Rd}} = \frac{0.18 db (100 \rho_s f_{ck})^{1/3}}{\rho_s db f_{yd} \gamma_c} \cdot \frac{l}{z}$$

Che, con  $\gamma_c f_{yd} / f_{ck}^{1/3} \sim 250$ , diventa

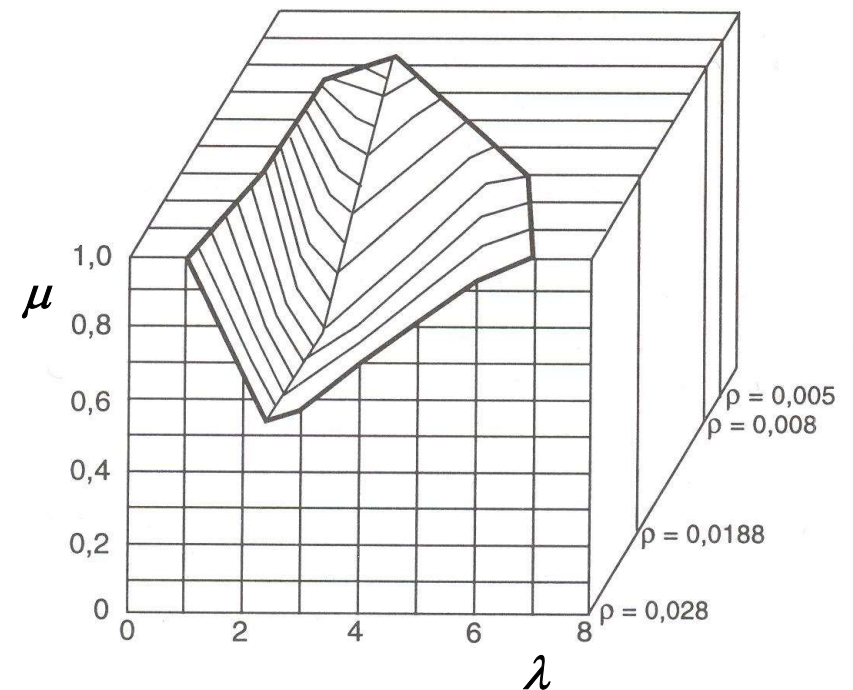
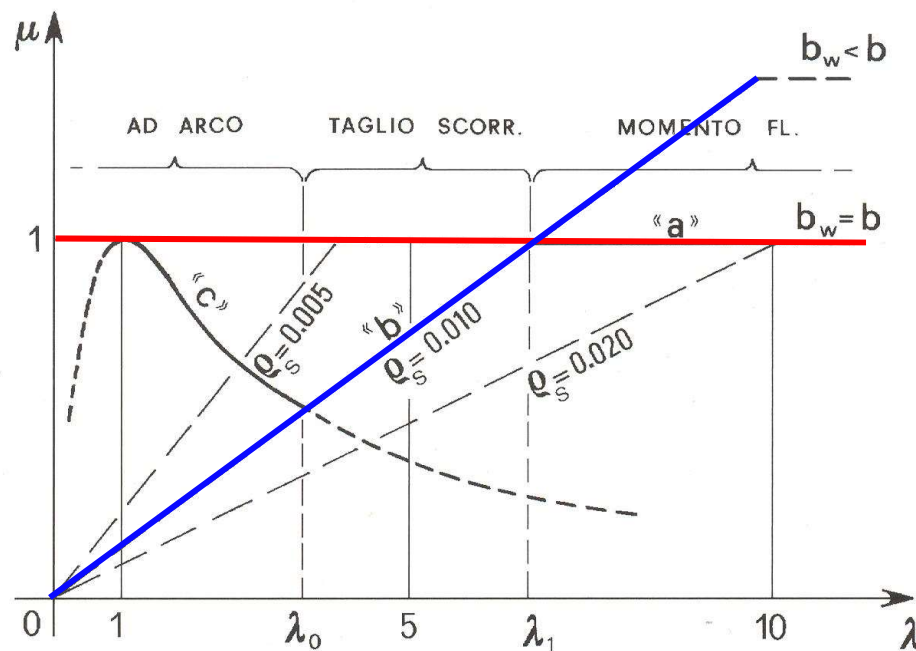
$$\mu = \frac{\lambda}{300 \rho_s^{2/3}}$$

Dipende linearmente dalla snellezza. Tale retta ha una pendenza più blanda al crescere della percentuale di armatura longitudinale.

# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Comportamento flessionale delle travi

I due meccanismi sopra descritti corrispondono alle rette “a” e “b”. Nella trave devono rimanere integri sia i correnti, teso e compresso, sollecitati dal momento e sia i conci d’anima sollecitati dallo scorrimento. Quindi il più debole limita la resistenza della trave.

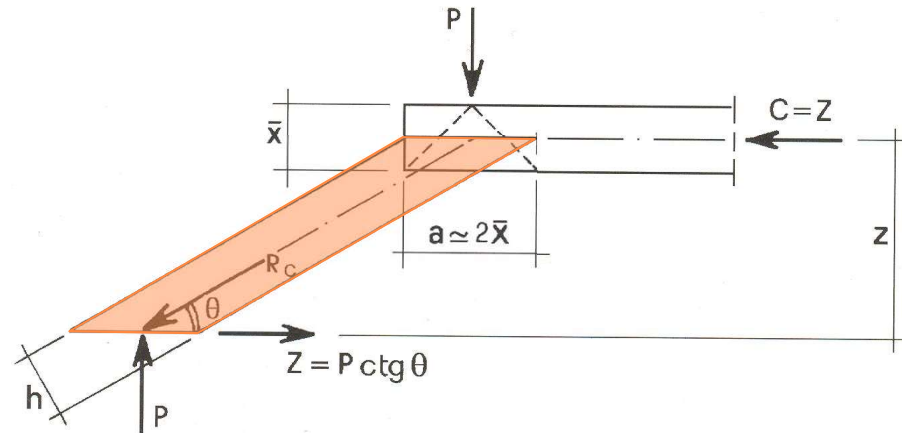


“Valle di taglio” ottenuta da Kani

# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Comportamento ad arco

La rottura per funzionamento ad arco può essere riferita a quella del puntone di calcestruzzo nel quale si convogliano le compressioni provenienti dalle impronte concentrate del carico P.



$$a \approx 2\bar{x} = 0.4d$$

$$R_c = P / \sin \vartheta$$

$$R_{cR} = h b f_c = a b f_c \sin \vartheta$$

$$P_R = a b f_c \sin^2 \vartheta \cong 0.4 d b f_c \sin^2 \vartheta$$

# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Comportamento ad arco

Adimensionalizzando come in precedenza si ottiene

$$\mu = \frac{P_R l}{M_{Rd}} = \frac{0.4 d b f_{cd} l}{0.2 d b f_{cd} z} \sin^2 \vartheta = 2 \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{l}{z} = \operatorname{ctg} \vartheta$$

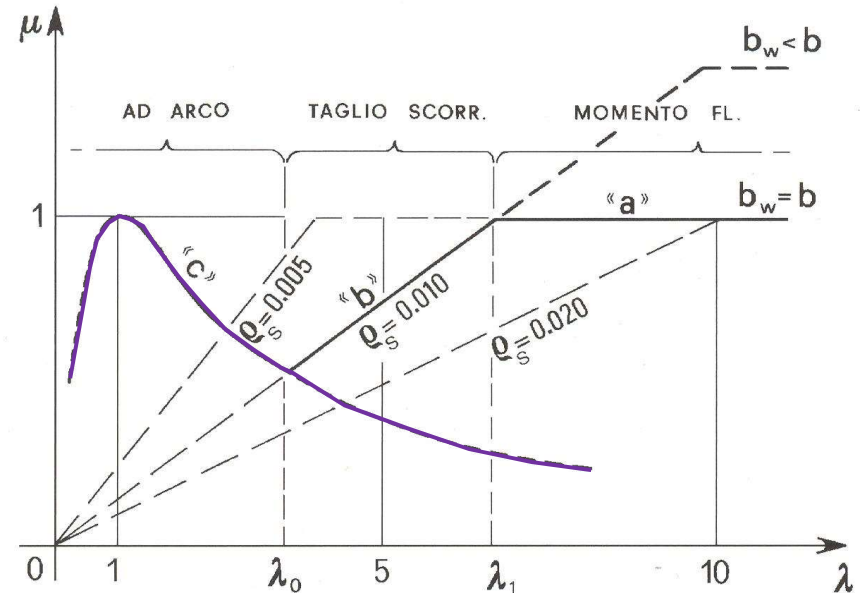
$$\sin^2 \vartheta = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Riferito alla resistenza del tirante

$$Z_R = A_s f_y = \rho_s d b f_y = P_R \lambda$$

$$\mu = \frac{P_R l}{M_{Rd}} = \frac{\rho_s d b f_y l / \lambda}{\rho_s d b f_y z} = 1$$

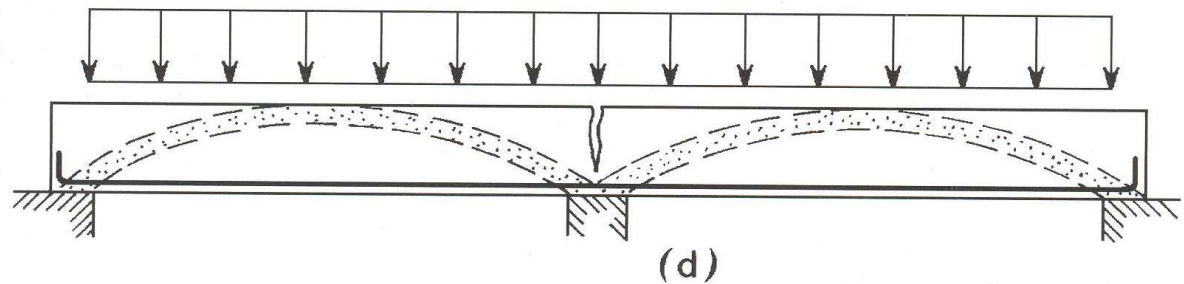
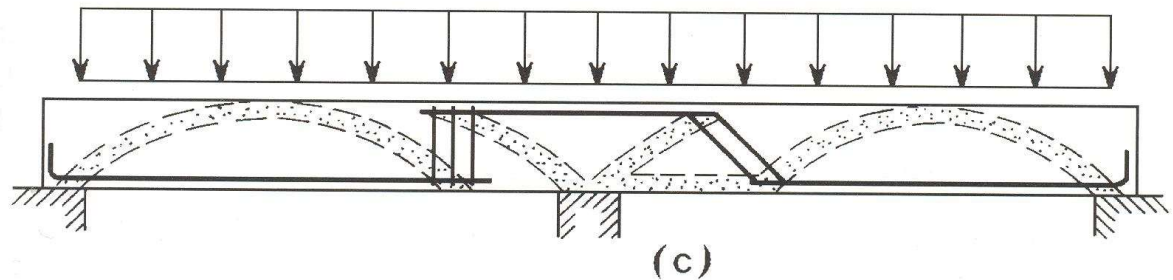
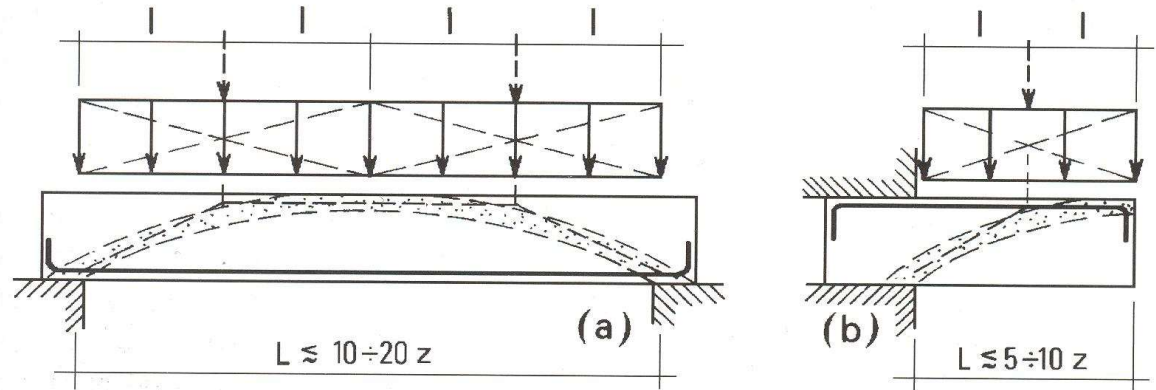
**Il meccanismo ad arco fornisce un valore costante superiore corrispondente a quello flessionale**



# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

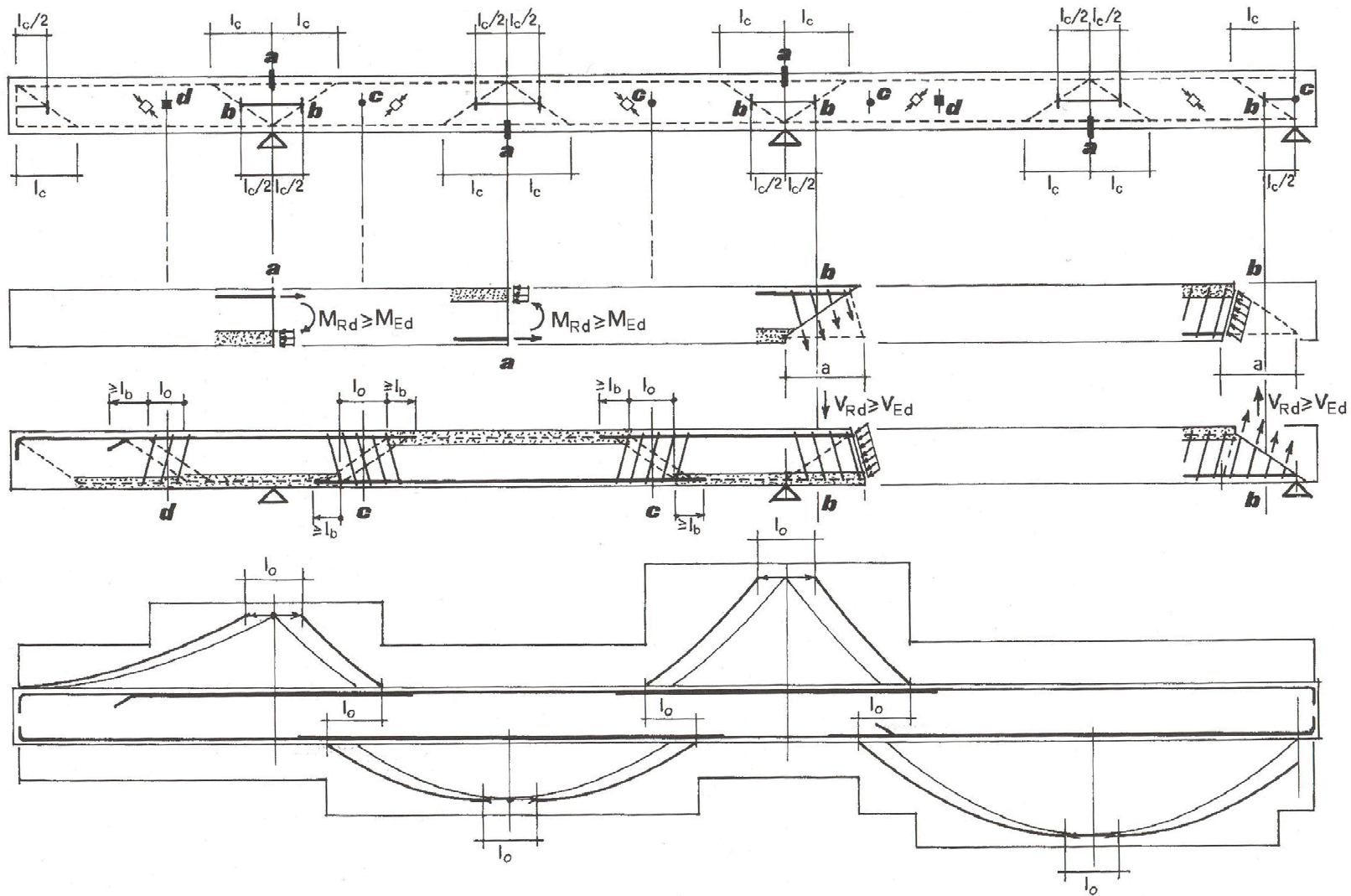
## Comportamento ad arco

Esempi di schemi ad arco a seconda di come sono disposte le armature.



# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Travi con armatura d'anima – Modello a traliccio



# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

Anche qui si possono individuare 4 tipi di sezione: a, b, c, d

*Tipo a: sezioni soggette a momento massimo*

*Tipo b: sezioni soggette a taglio massimo*

*Tipo c: sezioni al centro delle zone di cambiamento di segno del momento*

*Tipo d: sezioni soggette a taglio e momento diversi da zero*

**Per le sezioni a e b si possono utilizzare direttamente le formule:**

$$M_{Ed} < M_{Rd} \quad (a) \qquad V_{Ed} < V_{ctd} \quad (b)$$

**con l'aggiunta della regola della traslazione dei momenti.**

**L'applicazione di tale regola sistema automaticamente la sovrapposizione delle armature sulle sezioni c.**

**Naturalmente dovranno essere eseguite entrambe le verifiche di cui sopra nelle sezioni d quando si hanno variazioni di sezione o di armatura (*distribuzione staffe o ferri piegati non costante*).**

# MODELLI DI CALCOLO – TRAVI INFLESSE

## Passi di dimensionamento e verifica

**Per le sezioni “c” è sufficiente applicare la traslazione dei momenti.  
Per gli altri tipi di sezione il calcolo può articolarsi come segue:**

*Passo 1: dimensionamento dell'armatura con l'assunzione approssimata dei necessari parametri geometrici ( $z=0.9d$  e  $\lambda_c=2$ );*

*Passo 2: verifica con formula più rigorosa della resistenza così come deducibile dal dimensionamento preventivamente operato;*

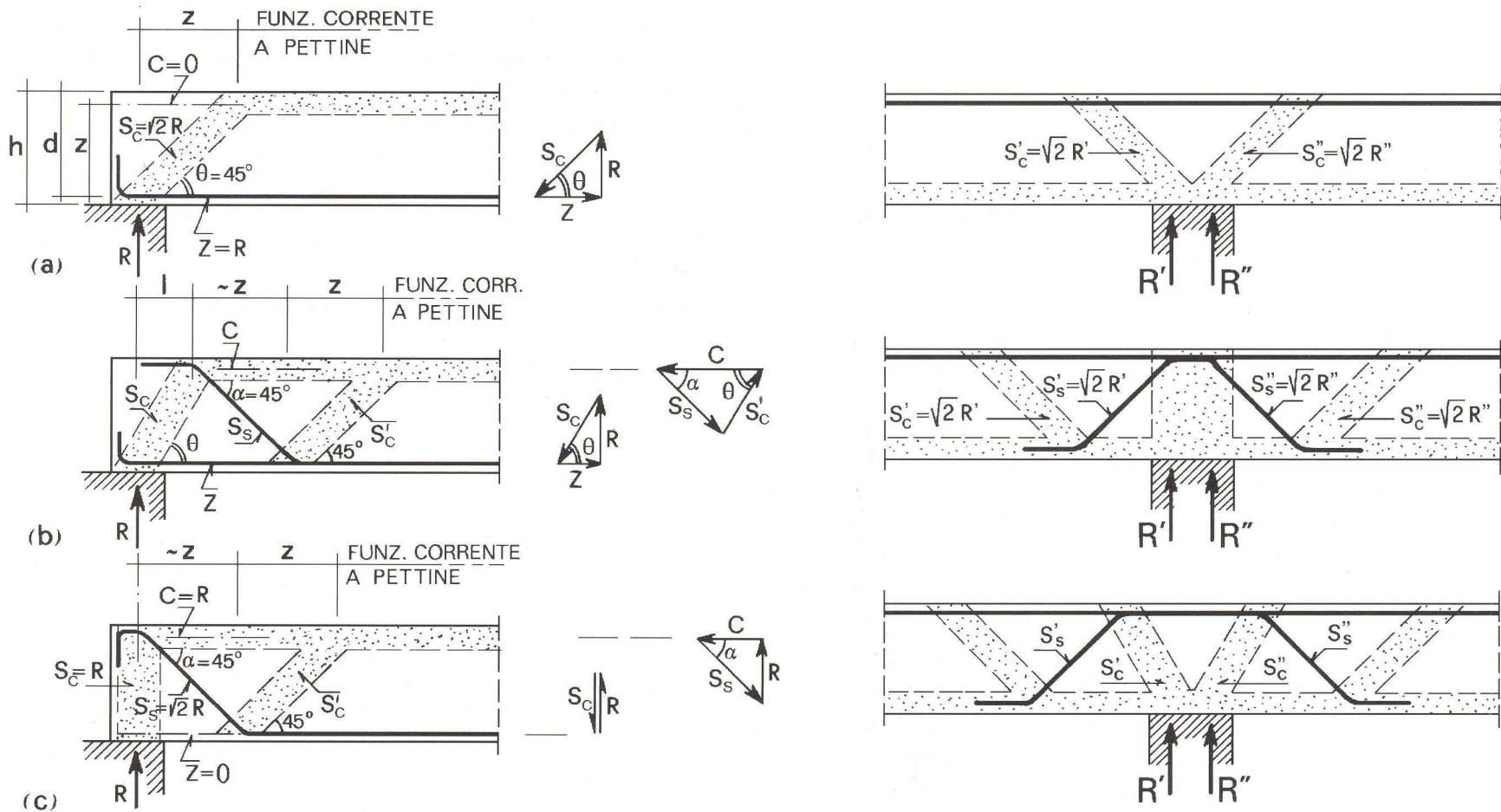
*Passo 3: calcolo aggiuntivo delle tensioni nei materiali sotto i carichi di esercizio per le necessarie verifiche di durabilità e fessurazione*

*A queste calcolazioni vanno aggiunte le verifiche locali dei particolari nodi, altrettanto importanti per garantire la sicurezza della struttura.*



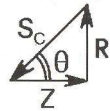
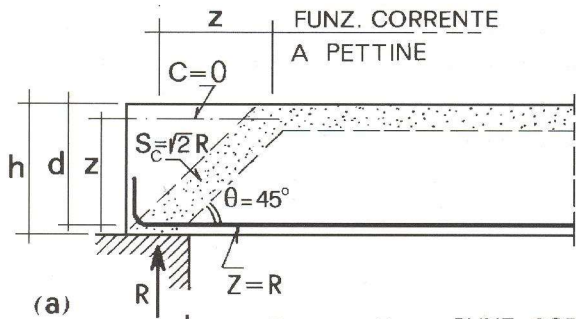
# ZONE DI DIFFUSIONE

Nelle zone di diffusione, se si esclude il funzionamento ad arco, si ha un comportamento differente da quello corrente e va analizzato separatamente.



# ZONE DI DIFFUSIONE

Nelle zone di diffusione le relazioni di verifica sono:

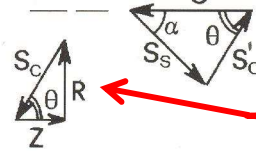
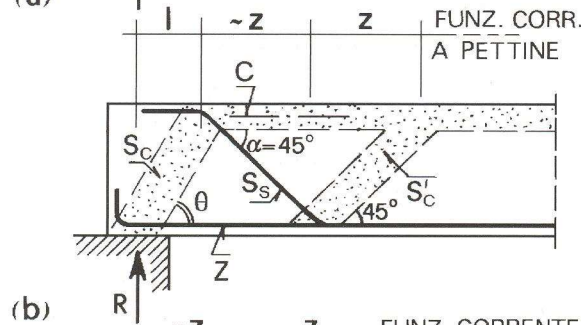


**Cedimento puntone di calcestruzzo ( $\vartheta=45^\circ$ )**

$$R_{Rc} \cong 0.4 dbf_{cd} \sin^2 \vartheta = 0.2 dbf_{cd}$$

**Cedimento barre di acciaio inferiori**

$$R_{Rs} \cong A_s f_{yd} / \text{ctg} \vartheta = A_s f_{yd}$$



**Cedimento puntone di calcestruzzo ( $\vartheta$ )**

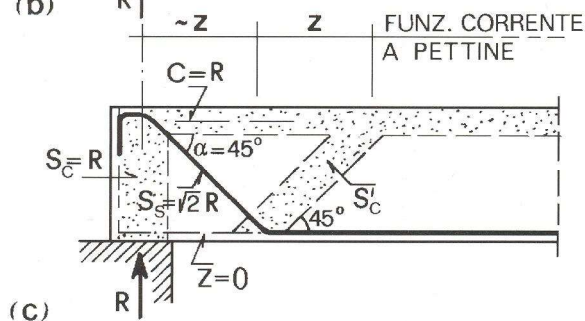
$$R'_{Rc} \cong 0.4 dbf_{cd} \sin^2 \vartheta$$

**Cedimento barre di acciaio inferiori**

$$R'_{Rs} \cong A_{sl} f_{yd} / \text{ctg} \vartheta$$

**Cedimento ferri piegati**

$$R''_{Rs} \cong A_{st} f_{yd} \sin \alpha$$



**Cedimento puntone di calcestruzzo ( $\vartheta=45^\circ$ )**

$$R_{Rc} \cong 0.4 dbf_{cd} \sin^2 \vartheta = 0.2 dbf_{cd}$$

**Cedimento ferri piegati**

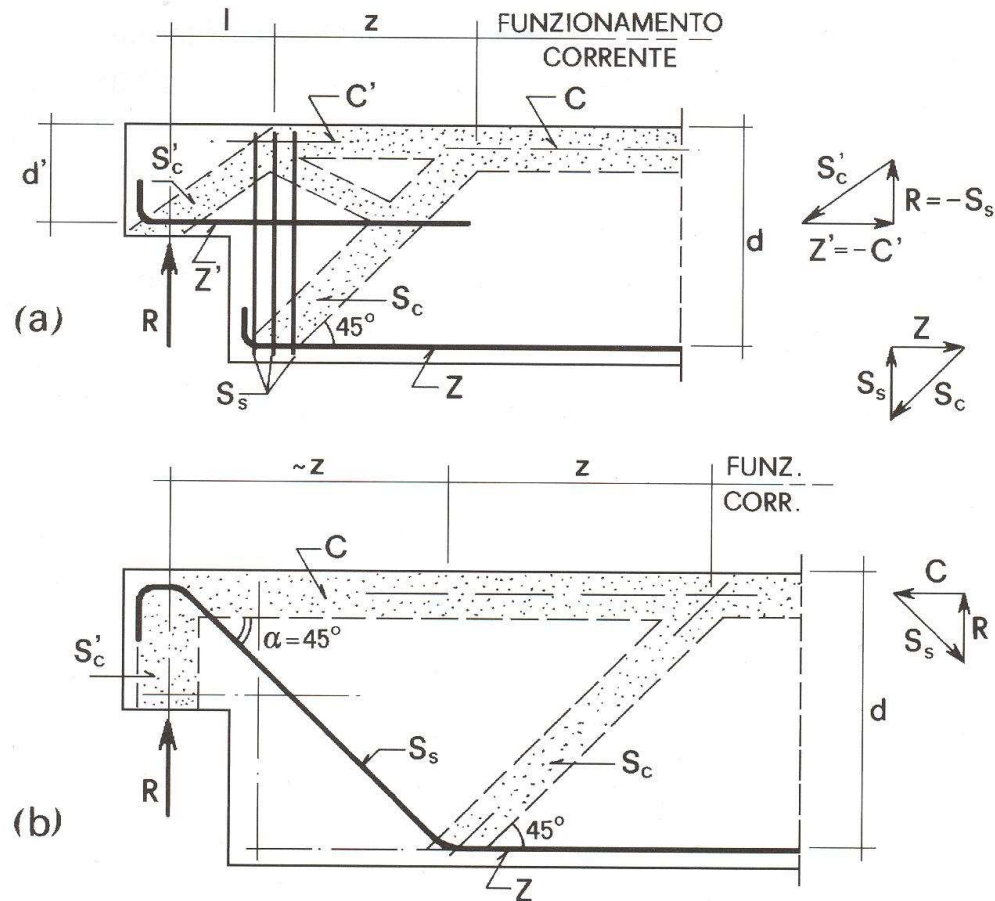
$$R_{Rs} \cong A_s f_{yd} \sin \alpha$$

**Verifica locale all'appoggio**

$$R_{Ed} \leq \min( R_{Rc} , R_{Rs} )$$

# SELLE GERBER

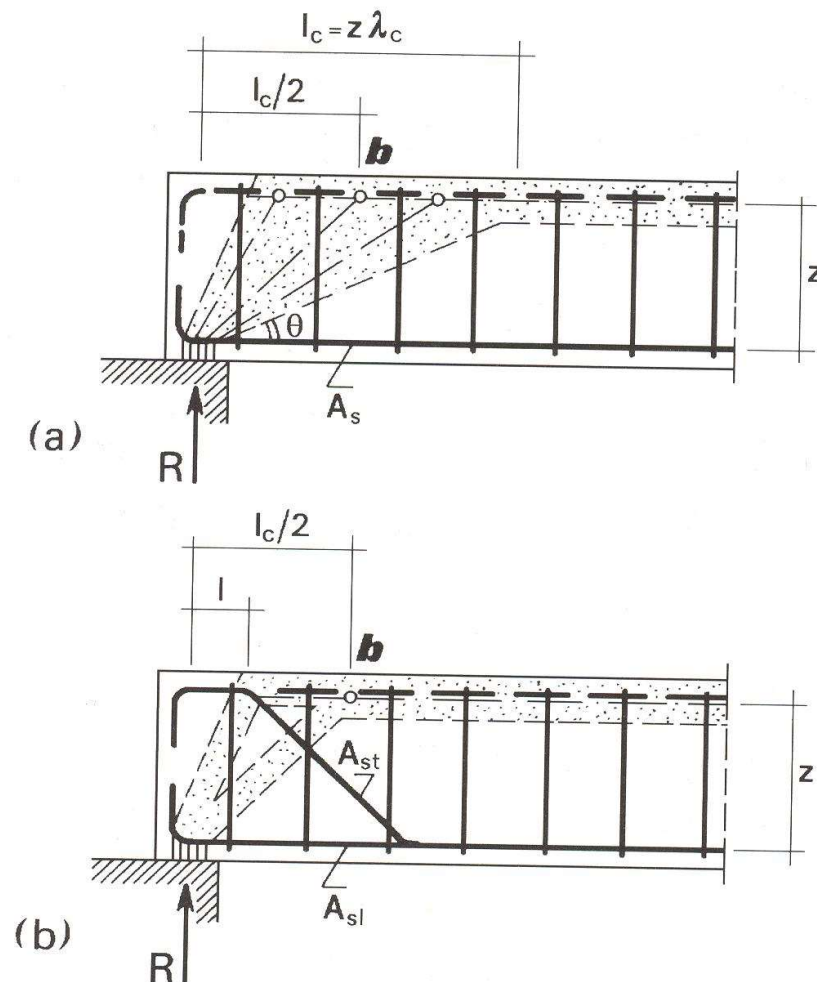
Frequentemente si utilizzano soluzioni combinate delle due.



# ZONE DI DIFFUSIONE

## Travi con armature d'anima

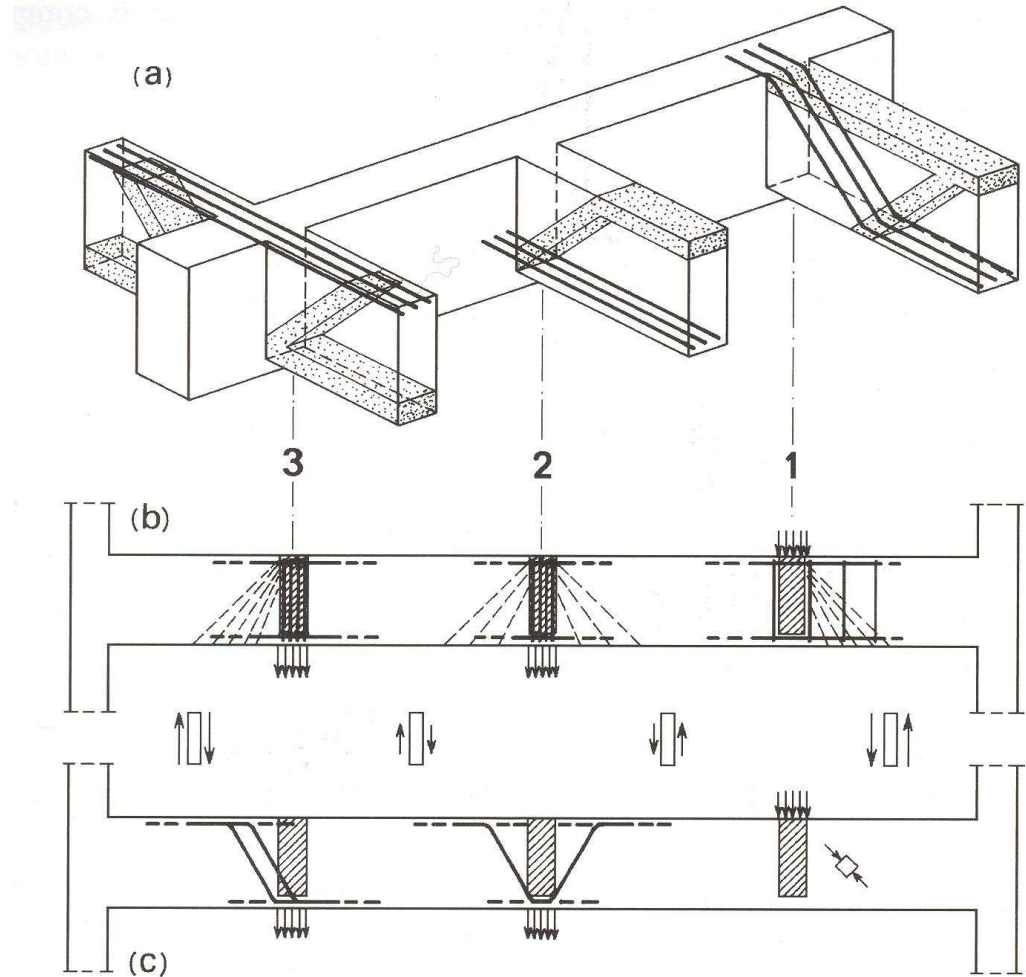
Le zone di estremità devono essere verificate con equilibri locali che si basano su schemi come quelli indicati in figura.



# APPOGGI INDIRETTI DI TRAVI

Nel caso non ci siano ferri piegati nella trave sostenuta (caso 2 e 3) è doveroso utilizzare armature di sospensione nella trave principale per consentire il trasferimento di tale carico appeso agli appoggi della trave stessa.

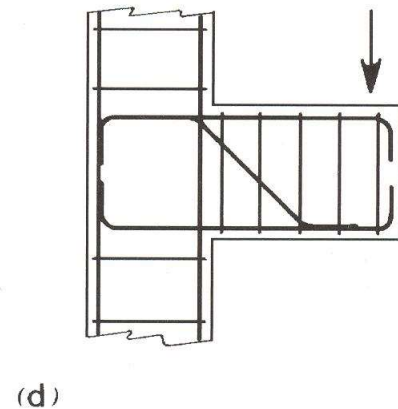
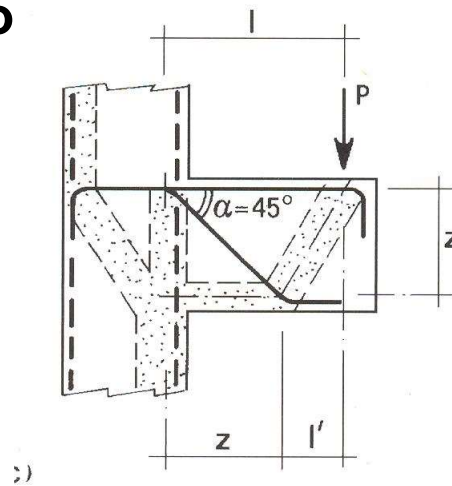
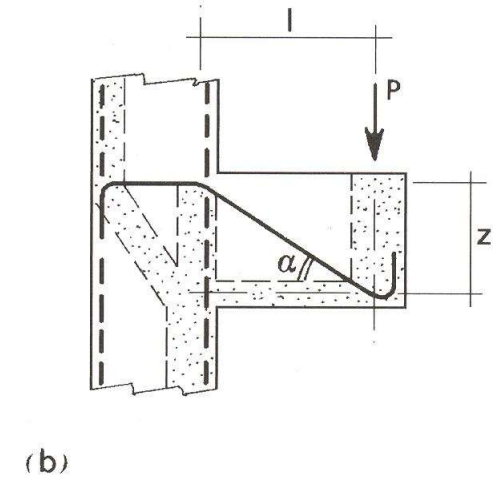
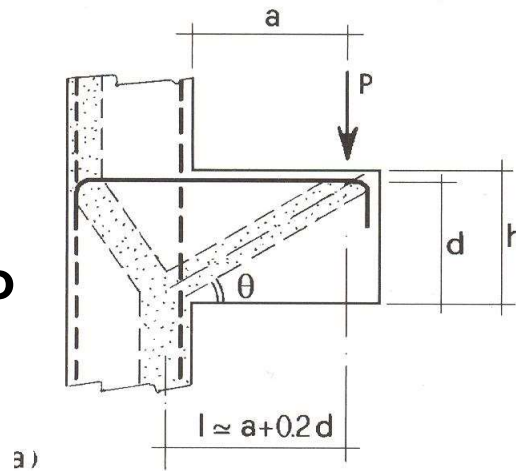
Queste armature possono essere costituite da staffe (b) o da ferri piegati (c).



# MENSOLE TOZZE

Nel caso di mensole tozze si fa riferimento a modelli a traliccio come quelli indicati che dipendono da come sono disposte le armature.

I meccanismi resistenti si analizzano con le formule dedotte per il comportamento ad arco





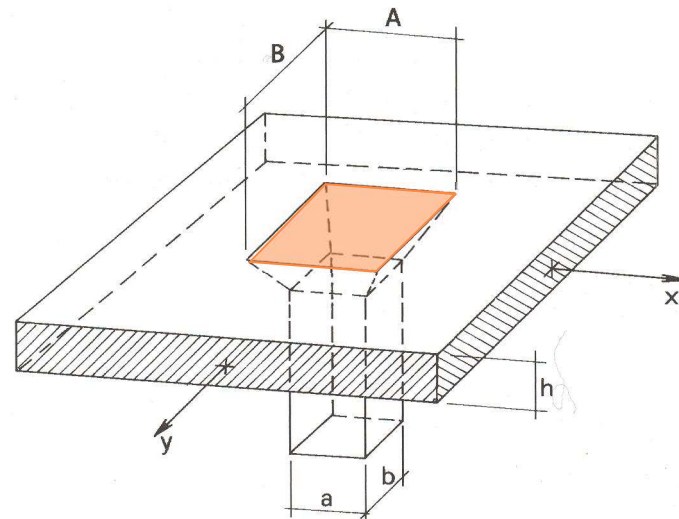
# PUNZONAMENTO NELLE PIASTRE

I particolari di appoggio di elementi a piastra su pilastri costituiscono un problema di flessione bidirezionale. Si hanno dei flussi di tensioni che si convogliano entro le dimensioni ridotte del pilastro.

La ridotta dimensione del pilastro può portare alla rottura della piastra in prossimità dell'appoggio con perforazione. Questo fenomeno è chiamato “*punzonamento*”.

Le norme propongono un calcolo convenzionale basato sulle stesse formule dedotte per il caso monodimensionale delle travi, previa la definizione di un “*perimetro critico*” lungo il quale distribuire la resistenza.

Il perimetro critico è quello che delimita superiormente la superficie di rottura così come evidenziata dalla sperimentazione.



# PUNZONAMENTO NELLE PIASTRE

## Piastre non armate a taglio

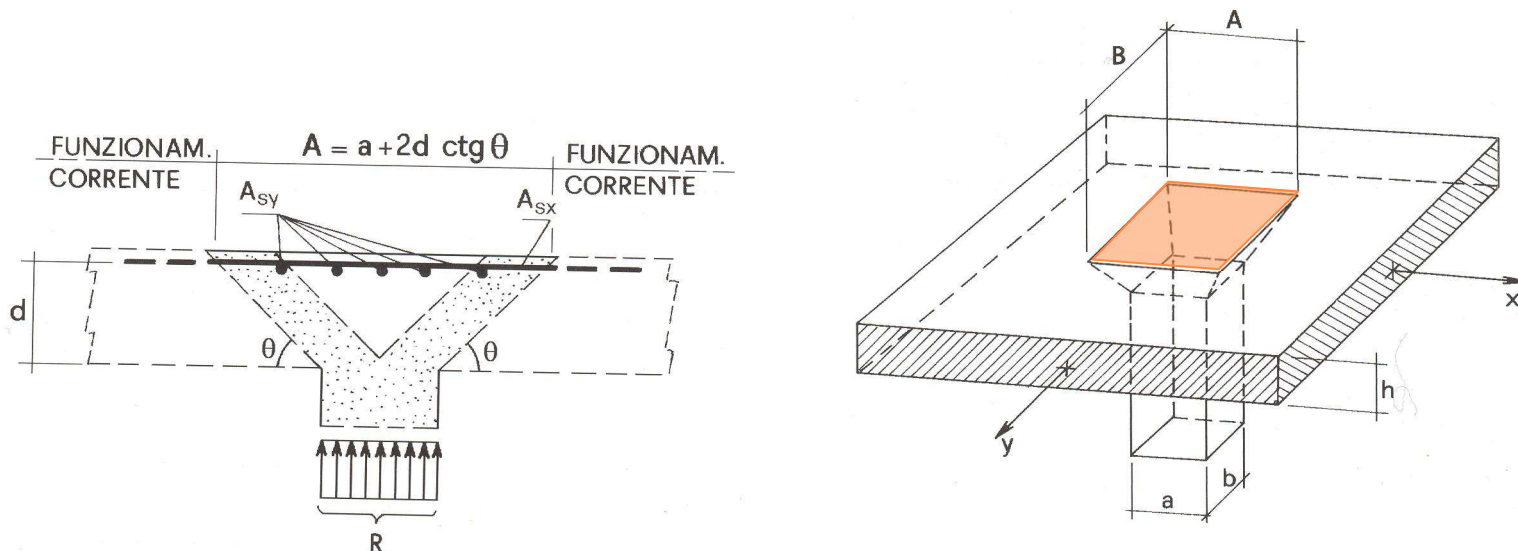
La sperimentazione ha evidenziato una rottura di forma troncopiramidale con base minore  $a \times b$  e base maggiore  $A \times B$ .

L'angolo di inclinazione della fessura è tale che  $\lambda = \text{ctg } \vartheta = 1.5$

$$A = a + 2d\lambda = a + 3d$$

$$B = b + 2d\lambda = b + 3d$$

Nelle verifiche si fa riferimento ad una distribuzione uniforme costante delle sollecitazioni lungo il perimetro critico.

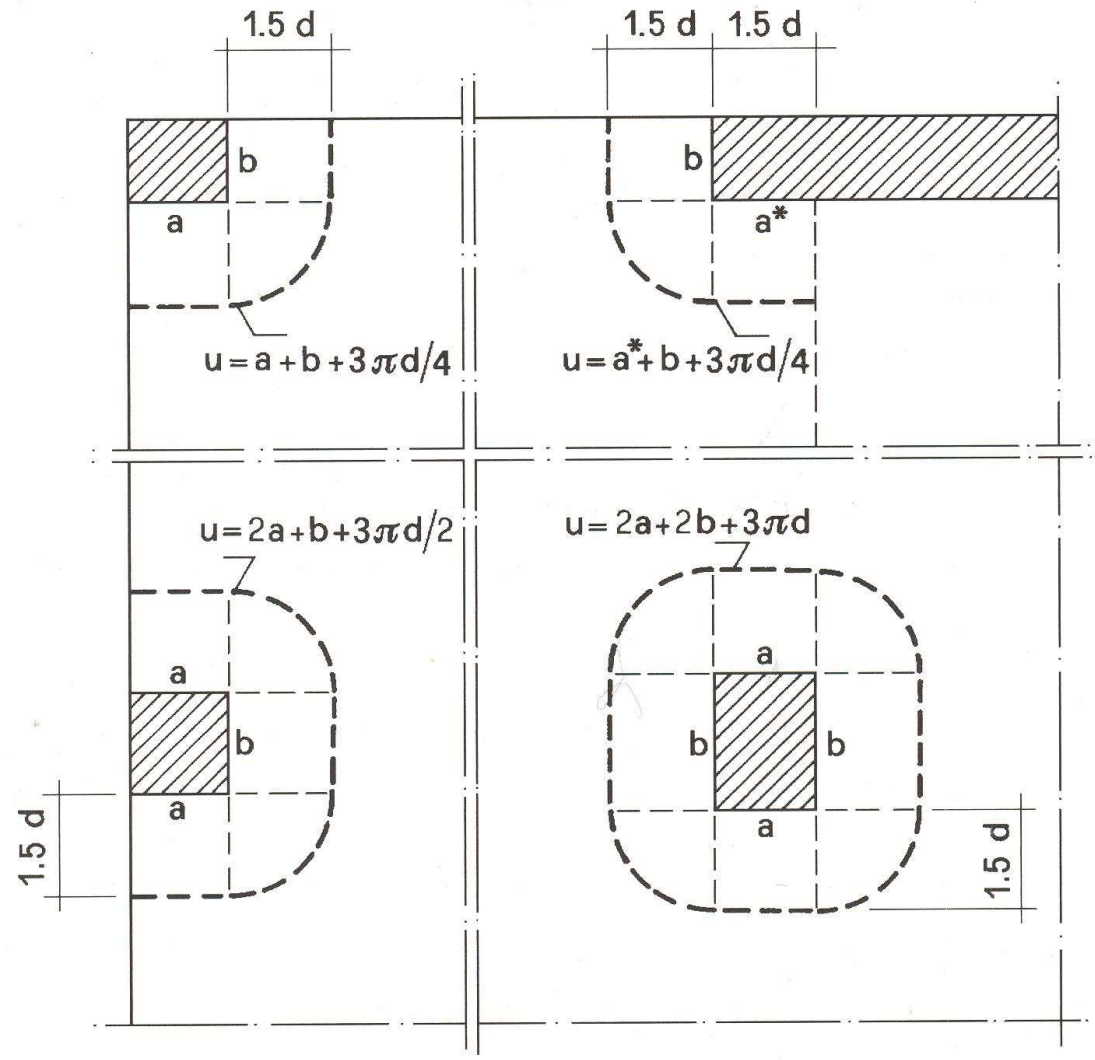




# PUNZONAMENTO NELLE PIASTRE

## Piastre non armate a taglio

In realtà il perimetro critico viene definito come indicato nelle figure, dove si evidenzia che non ci sono spigoli vivi ma si hanno dei raccordi circolari.



# PUNZONAMENTO NELLE PIASTRE

## Piastre non armate a taglio

Verifica dell'appoggio  $u_o = 2a + 2b$

$$R_{Rc} = 0.4 d u_o f_{cd} \frac{1}{1 + \lambda^2} = 0.123 d u_o f_{cd}$$

Verifica del perimetro critico  $u = 2a + 2b + 3\pi d$

$$V_{ctd} = R_{Rd} = 0.25 d u f_{ctd} \kappa (1 + 50 \rho_s)$$

$$\kappa = 1.6 - d \geq 1.0$$

$$\rho_{sx} = A_{sx} / Bd$$

$$\rho_s = \sqrt{\rho_{sx} \rho_{sy}} \leq 0.02$$

$$\rho_{sy} = A_{sy} / Ad$$

Le più recenti normative forniscono la relazione empirica:

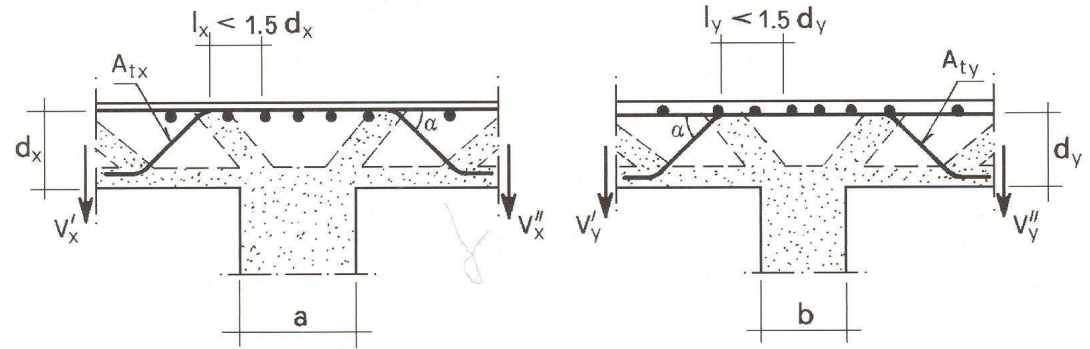
$$V_{ctd} = 0.18 d u \kappa (100 \rho_s f_{ck})^{1/3} / \gamma_c \geq u d v_{\min}$$

Stesso significato che hanno nel taglio  $\kappa$  e  $v_{\min}$

# PUNZONAMENTO NELLE PIASTRE

## Piastre con ferri piegati

Ci si comporta analogamente alle travi



La presenza dei ferri piegati aumenta sensibilmente il nuovo perimetro critico ed in genere non risulta più dominante la verifica a trazione del calcestruzzo sulla superficie critica.

Le verifiche sono ora concentrate sull'acciaio dei ferri piegati e sul calcestruzzo a compressione (su ognuno dei 4 lati).

Lato acciaio

$$R'_{xd} = A_{tx} f_{yd} \sin \alpha > \alpha'_x R_{Ed}$$

Lato cls

$$R'_{xc} = 0.4 b d_x f_{cd} \frac{1}{1 + \lambda_x^2} > \alpha'_x R_{Ed}$$

$$\lambda_x = l_x / 0.9 d_x$$

$\alpha'_x$  = quota di reazione che compete al lato interessato del sostegno.

# TRAVI IN SPESSORE

Un caso frequente di verifica a punzonamento è quello relativo alle travi realizzate in spessore di solaio. Si tratta di una flessione sostanzialmente monodirezionale in un elemento piatto di notevole larghezza, che trova sostegno su pilastri di dimensioni molto più ridotte.

In realtà, il problema si affronta diversamente. Si eseguono le verifiche a taglio nella direzione della trave come visto per le travi.

Si esegue poi una verifica trasversale considerando le sporgenze come mensola tozza.

La quota parte di forza  $R_y$  da considerare agente sulla mensola è proporzionale alla dimensione della mensola.

$$R_y = \frac{b_o - b}{2b_o} R$$

