Linguaggi predicativi del 1º ordine: Semantica

Eugenio G. Omodeo

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

Trieste, 12/04/2022

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Linguaggi predicativi del 1º ordine: *Semantica*

Eugenio G. Omodeo

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI

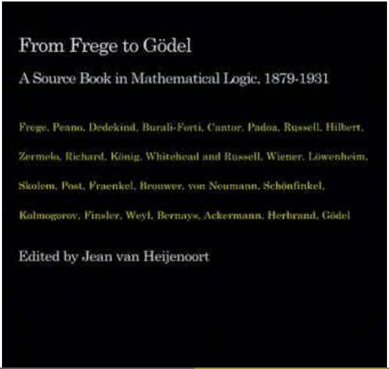
Trieste, 12/04/2022

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Linguaggi predicativi del 1^{o} ordine: Semantica

Eugenio G. Omodeo

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Citazione del giorno :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di sistema formale e quella d'interpretazione che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra.

(Jean van Heijenoort, 1976)

1

Citazione del giorno :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di sistema formale e quella d'interpretazione che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni sintattiche; in seguito rimetteremo in campo la semantica[1].

(Jean van Heijenoort, 1976)

[1] 'interpretazione' nell'originale, NdT

Citazione del giorno :

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di sistema formale e quella d'interpretazione che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni sintattiche; in seguito rimetteremo in campo la semantica[1]. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.

(Jean van Heijenoort, 1976)

1

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di sistema formale e quella d'interpretazione che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni sintattiche; in seguito rimetteremo in campo la semantica[1]. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.

Piú nebulosa la storia della nozione d'interpretazione.

La nozione insiemistica di conseguenza appare nella *Wissenschaftslehre* (1837) di Bolzano; non però, per un linguaggio formale ···

(Jean van Heijenoort, 1976)

1

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di sistema formale e quella d'interpretazione che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni sintattiche; in seguito rimetteremo in campo la semantica[1]. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.
Piú nebulosa la storia della nozione d'interpretazione.

La nozione insiemistica di conseguenza appare nella *Wissenschaftslehre* (1837) di Bolzano; non però, per un linguaggio formale $\cdots$

La scoperta di Bolzano rimase isolata. Dopo il 1870, quando prese slancio la logica moderna, si manifestarono due correnti che, fino al 1920, paiono stentare a mescolare le acque.

(Jean van Heijenoort, 1976)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

[1] 'interpretazione' nell'originale, NdT

Due acquisizioni fondamentali della logica moderna sono la nozione di sistema formale e quella d'interpretazione che, in certo qual modo, si complementano una con l'altra. Nell'approntare un linguaggio formale, abbandoniamo il significato dei simboli per trattare le loro relazioni sintattiche; in seguito rimetteremo in campo la semantica[1]. La prima nozione è databile in tutta precisione: nacque quando Frege scrisse, nella sua *Begriffsschrift* (1879), che le regole che stava introducendo erano regole 'per l'uso dei nostri segni'.
Piú nebulosa la storia della nozione d'interpretazione.

La nozione $\boxed{\text{insiemistica}}$ di $\boxed{\text{conseguenza}}$ appare nella *Wissenschaftslehre* (1837) di Bolzano; non però, per un linguaggio formale ···

La scoperta di Bolzano rimase isolata. Dopo il 1870, quando prese slancio la logica moderna, si manifestarono due correnti che, fino al 1920, paiono stentare a mescolare le acque.

(Jean van Heijenoort, 1976)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

[1] 'interpretazione' nell'originale, NdT

Scaletta

- Strutture interpretative
-
-

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Strutture interpretative
- Valore di un termine chiuso e di un enunciato
-

Scaletta

- Strutture interpretative
- Valore di un termine chiuso e di un enunciato
- Valutazione, relativa a un'assegnaz. di individui alle var. libere

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli sono neri e col becco giallo:
2. Di notte tutti i gatti sono bigi:
3. Esistono galline dalle uova d'oro:
4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:
5. *Qui sème la misère récolte la colère:*
6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:

RIESTE

ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli sono neri e col becco giallo:

$$\forall x\,(\ \mathrm{Merlo}(x) \longrightarrow \mathrm{Nero}(x)\ \&\ \mathrm{HaBeccoGiallo}(x))$$

2. Di notte tutti i gatti sono bigi:
3. Esistono galline dalle uova d'oro:
4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:
5. *Qui sème la misère récolte la colère:*
6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:

ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli (maschi) sono neri e col becco giallo:

$$\forall x\, (\ \mathrm{Merlo}(x)\ \&\ \mathrm{Maschio}(x) \longrightarrow \mathrm{Nero}(x)\ \&\ \mathrm{HaBeccoGiallo}(x))$$

2. Di notte tutti i gatti sono bigi:
3. Esistono galline dalle uova d'oro:
4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:
5. *Qui sème la misère récolte la colère:*
6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:

ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli (maschi) sono neri e col becco giallo:

$\forall x\,(\ \mathrm{Merlo}(x)\ \&\ \mathrm{Maschio}(x) \rightarrow \ \mathrm{Nero}(x)\ \&\ \mathrm{HaBeccoGiallo}(x))$

2. Di notte tutti i gatti sono bigi: ???
3. Esistono galline dalle uova d'oro:
4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:
5. *Qui sème la misère récolte la colère:*
6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:

RIESTE

ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli (maschi) sono neri e col becco giallo:

$$\forall x \, (\ \mathrm{Merlo}(x) \,\&\, \mathrm{Maschio}(x) \rightarrow \ \mathrm{Nero}(x) \,\&\, \mathrm{HaBeccoGiallo}(x))$$

2. Di notte tutti i gatti sono bigi:
3. Esistono galline dalle uova d'oro:

$$\exists x \, (\mathrm{Gallina}(x) \,\&\, \forall y \, (\mathrm{Uovo\_di}(x, y) \rightarrow \mathrm{D'oro}(y)))$$

4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:
5. *Qui sème la misère récolte la colère:*
6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:

ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli (maschi) sono neri e col becco giallo:

$$\forall x \,(\ \mathrm{Merlo}(x)\ \&\ \mathrm{Maschio}(x) \rightarrow \ \mathrm{Nero}(x)\ \&\ \mathrm{HaBeccoGiallo}(x))$$

2. Di notte tutti i gatti sono bigi:
3. Esistono galline dalle uova d'oro:

$$\exists x\,(\mathrm{Gallina}(x)\ \&\ \forall y\,(\mathrm{Uovo\_di}(x,y) \rightarrow \mathrm{D'oro}\,(y)))$$

4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

$$\exists x\,(\mathrm{Quaglia}(x)\ \&\ \mathrm{D'oro}(\mathit{cresta}(x)))$$

5. *Qui sème la misère récolte la colère:*
6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:

RIESTE

Cosa esprimere nel linguaggio predicativo ?

Esercizio:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli (maschi) sono neri e col becco giallo:

$\forall x\ (\ \mathrm{Merlo}(x)\ \&\ \mathrm{Maschio}(x) \rightarrow \mathrm{Nero}(x)\ \&\ \mathrm{HaBeccoGiallo}(x))$

2. Di notte tutti i gatti sono bigi:
3. Esistono galline dalle uova d'oro:

$\exists x\ (\mathrm{Gallina}(x)\ \&\ \forall y\ (\mathrm{Uovo\_di}(x, y) \rightarrow \mathrm{D'oro}(y)))$

4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

$\exists x\ (\mathrm{Quaglia}(x)\ \&\ \mathrm{D'oro}(\mathit{cresta}(x)))$

5. *Qui sème la misère récolte la colère:*

$\forall x\ (\mathrm{Semina}(x, \mathrm{vento}) \rightarrow \mathrm{Raccoglie}(x, \mathrm{tempesta}))$

6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai:

ESERCIZIO:

Esprimere nel simbolismo predicativo le seguenti proposizioni:

1. Tutti i merli (maschi) sono neri e col becco giallo:

$$\forall x \, (\ \mathrm{Merlo}(x) \,\&\, \mathrm{Maschio}(x) \ \rightarrow \ \ \mathrm{Nero}(x) \,\&\, \mathrm{HaBeccoGiallo}(x))$$

2. Di notte tutti i gatti sono bigi: ???

3. Esistono galline dalle uova d'oro:

$$\exists x \, (\mathrm{Gallina}(x) \,\&\, \forall y \, (\mathrm{Uovo\_di}(x, y) \rightarrow \mathrm{D'oro}\,(y)))$$

4. Esistono quaglie dalla cresta d'oro:

$$\exists x \, (\mathrm{Quaglia}(x) \ \& \ \mathrm{D'oro}(\mathit{cresta}(x)) \,)$$

5. *Qui sème la misère récolte la colère:*

$$\forall x \, (\mathrm{Semina}(x, \mathrm{vento}) \rightarrow \mathrm{Raccoglie}(x, \mathrm{tempesta} \ ) \,)$$

6. Per la via di poi poi si giunge al paese di mai mai: ???

*Un aspetto della corrente 'sintattica' nella logica è che Frege e Russell erano impegnati in una ricostruzione logica totale del nostro mondo. Erano interessati a partire da poche nozioni primitive e a costruire un sistema universale. Pertanto i loro quantificatori spaziano su tutti gli oggetti: il dominio su cui essi variano è un universo fissato e unico, l'**U**niverso.*

[van Heijenoort(1985), pagg. 44–45]

*Un aspetto della corrente ‘sintattica’ nella logica è che Frege e Russell erano impegnati in una ricostruzione logica totale del nostro mondo. Erano interessati a partire da poche nozioni primitive e a costruire un sistema universale. Pertanto i loro quantificatori spaziano su tutti gli oggetti: il dominio su cui essi variano è un universo fissato e unico, l’**U**niverso.*

[· · ·]

La posizione di Hilbert è intermedia fra quella di Frege-Russell e quella di Peirce-Schröder-Löwenheim. Come i primi, egli lavora con assiomi e regole; tuttavia, per il suo istinto di matematico, propende verso quantificatori che spazino non su ‘ogni cosa’, ma piuttosto su ben definite collezioni di oggetti. [van Heijenoort(1985), pagg. 44–45]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Per ***interpretare*** un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}\,,\quad d\,,$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \big(\mathfrak{D}\,,\mathfrak{C}\,,\mathfrak{F}\,,\mathfrak{R}\big)\,,$$

dove:

$\mathfrak{D}$, ***dominio del discorso***, non è vuoto;

$\boxed{\forall^{\mathfrak{I}}}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Per ***interpretare*** un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}\,,\quad d\,,$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \big(\mathfrak{D}\,,\mathfrak{C}\,,\mathfrak{F}\,,\mathfrak{R}\big)\,,$$

dove:

$\mathfrak{D}$, ***dominio del discorso***, non è vuoto;

$\mathfrak{C}$, ***interpretazione delle costanti***, appartiene a $\mathfrak{D}^{\mathcal{C}}$;

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Per ***interpretare*** un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}\,,\quad d\,,$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \left(\mathfrak{D}\,,\mathfrak{C}\,,\mathfrak{F}\,,\mathfrak{R}\right),$$

dove:

$\mathfrak{D}$, ***dominio del discorso***, non è vuoto;

$\mathfrak{C}$, ***interpretazione delle costanti***, appartiene a $\mathfrak{D}^{\mathcal{C}}$;

$\mathfrak{F}$, ***interpretazione dei funtori***, appartiene a

$$\prod_{g\in\mathcal{F}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{D}^{d(g)}}\;;$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Per ***interpretare*** un linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C}\,,\quad \mathcal{F}\,,\quad \mathcal{R}\,,\quad d\,,$$

occorre una ***struttura***

$$\mathfrak{I} \;=\; \left(\mathfrak{D}\,,\mathfrak{C}\,,\mathfrak{F}\,,\mathfrak{R}\right),$$

dove:

$\mathfrak{D}$, ***dominio del discorso***, non è vuoto;

$\mathfrak{C}$, ***interpretazione delle costanti***, appartiene a $\mathfrak{D}^{\mathcal{C}}$;

$\mathfrak{F}$, ***interpretazione dei funtori***, appartiene a

$$\prod_{g\in\mathcal{F}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{D}^{d(g)}}\;;$$

$\mathfrak{R}$, ***interpretazione dei relatori***, appartiene a

$$\prod_{r\in\mathcal{R}} \mathcal{P}\left(\mathfrak{D}^{d(r)}\right)\;.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

. . . una ***struttura*** è un

$$\mathfrak{I} \;=\; \left(\mathfrak{D}, \left\{ c^{\mathfrak{I}} : c \in \mathcal{C} \right\}, \left\{ g^{\mathfrak{I}} : g \in \mathcal{F} \right\}, \left\{ r^{\mathfrak{I}} : r \in \mathcal{R} \right\}\right),$$

dove:

$\mathfrak{D}$, ***dominio del discorso***, non è vuoto;

$$\boxed{\mathfrak{D} = \forall^{\mathfrak{I}}}$$

per ciascun $c \in \mathcal{C}$, $c^{\mathfrak{I}}$ appartiene a $\mathfrak{D}$;

per ciascun $g \in \mathcal{F}$, $g^{\mathfrak{I}}$ appartiene a $\mathfrak{D}^{\mathfrak{D}^{d(g)}}$;

per ciascun $r \in \mathcal{R}$, $r^{\mathfrak{I}}$ appartiene a $\mathbf{2}^{\mathfrak{D}^{d(r)}}$.

$$\boxed{\mathbf{2} = \{\mathtt{f}, \mathtt{v}\}}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Qualora

$$=_{/2} \quad \text{appartenga ad} \quad \mathcal{R}$$

$\big($ cioè $d(=) = 2$ $\big)$ è obbligatorio interpretare

$$=^{\mathfrak{I}} \;=\; \big\{ (\, e,\, e\,) : e \in \mathfrak{D} \big\} .$$

Se in un termine non ci sono variabili, possiamo determinarne il valore

$$val_{\mathfrak{I}}(\,\tau\,) \quad \text{o, in breve}^2, \quad val(\,\tau\,)$$

tramite la regola ricorsiva

$$\begin{aligned} val(\,c\,) \quad &=_{\mathsf{Def}} \quad c^{\mathfrak{I}}\,; \\ val(\,g(\tau_1, \ldots, \tau_{d(g)})\,) \quad &=_{\mathsf{Def}} \quad g^{\mathfrak{I}}\,(\,val(\,\tau_1\,), \ldots, val(\,\tau_{d(g)}\,)\,)\;. \end{aligned}$$

[2]se non addirittura $\tau^{\mathfrak{I}}$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Se in un termine non ci sono variabili, possiamo determinarne il valore

$$val_{\mathfrak{I}}(\,\tau\,) \quad \text{o, in breve}^{2}, \quad val(\,\tau\,)$$

tramite la regola ricorsiva

$$\begin{aligned} val(\,c\,) &=_{\mathsf{Def}} c^{\mathfrak{I}}\,; \\ val(\,g(\tau_1,\ldots,\tau_{d(g)})\,) &=_{\mathsf{Def}} g^{\mathfrak{I}}\,(\,val(\,\tau_1\,),\ldots,val(\,\tau_{d(g)}\,)\,)\ . \end{aligned}$$

Che sarà mai $val(\,\tau_1 = \tau_2\,)$?

[2] se non addirittura $\tau^{\mathfrak{I}}$

Valutazione di un termine chiuso

Se in un termine non ci sono variabili, possiamo determinarne il valore

$$val_{\mathfrak{I}}(\,\tau\,) \quad \text{o, in breve}^{2}, \quad val(\,\tau\,)$$

tramite la regola ricorsiva

$$\begin{aligned} val(\,c\,) \quad &=_{\mathsf{Def}} \quad c^{\mathfrak{I}}\,; \\ val(\,g(\tau_1,\ldots,\tau_{d(g)})\,) \quad &=_{\mathsf{Def}} \quad g^{\mathfrak{I}}\left(\,val(\,\tau_1\,),\ldots,val(\,\tau_{d(g)}\,)\,\right)\;. \end{aligned}$$

Che sarà mai $val(\,\tau_1 = \tau_2\,)$?
Equivarrà forse a $\tau_1 = \tau_2$?

[2] se non addirittura $\tau^{\mathfrak{I}}$

Possiamo determinare il valore

$$val_{\mathfrak{I}}(\,\alpha\,) \quad \text{o, sbrigativamente}^{3}, \quad val(\,\alpha\,)$$

di una formula atomica *non* involgente variabili tramite la regola

$$val\big(\,r(\beta_1,\ldots,\beta_{d(r)})\,\big) \quad =_{\mathsf{Def}} \quad r^{\mathfrak{I}}\,\big(\,val(\,\beta_1\,),\ldots,val(\,\beta_{d(r)}\,)\,\big)\ .$$

[3] se non addirittura $\alpha^{\mathfrak{I}}$

Possiamo ricorrere a un ‘espediente linguistico’:

1. creiamo un insieme $\mathcal{D}$ di ‘nomi inconfondibili’ per gli individui, curando che

Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

1. creiamo un insieme $\mathcal{D}$ di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
   - $\mathcal{D} \cap \left(\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}\right) = \emptyset$;

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Possiamo ricorrere a un ‘espediente linguistico’:

1. creiamo un insieme $\mathcal{D}$ di ‘nomi inconfondibili’ per gli individui, curando che
   - $\mathcal{D} \cap \big(\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\,\text{variabili}\,\}\big) = \emptyset$;
   - vi sia una biiezione $e \ \mapsto \ e'$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathcal{D}$;

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Possiamo ricorrere a un ‘espediente linguistico’:

1. creiamo un insieme $\mathcal{D}$ di ‘nomi inconfondibili’ per gli individui, curando che
   - $\mathcal{D} \cap \big(\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}\big) = \emptyset$;
   - vi sia una biiezione $e \mapsto e'$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathcal{D}$;
2. per ogni nuova costante $e' \in \mathcal{D}$ poniamo $e'^{\mathfrak{I}} = e$;

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

1. creiamo un insieme $\mathcal{D}$ di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
   - $\mathcal{D} \cap \big(\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\,\text{variabili}\,\}\big) = \emptyset$;
   - vi sia una biiezione $e \mapsto e'$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathcal{D}$;
2. per ogni nuova costante $e' \in \mathcal{D}$ poniamo $e'^{\mathfrak{I}} = e$;
3. definiamo *come prima* il valore di termini chiusi ed enunciati atomici nella $\mathfrak{I}$ estesa;

Possiamo ricorrere a un 'espediente linguistico':

1. creiamo un insieme $\mathcal{D}$ di 'nomi inconfondibili' per gli individui, curando che
   - $\mathcal{D} \cap (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \cup \{\text{variabili}\}) = \emptyset$;
   - vi sia una biiezione $e \;\mapsto\; e'$ di $\mathfrak{D}$ in $\mathcal{D}$;
2. per ogni nuova costante $e' \in \mathcal{D}$ poniamo $e'^{\mathfrak{I}} = e$;
3. definiamo *come prima* il valore di termini chiusi ed enunciati atomici nella $\mathfrak{I}$ <u>estesa</u>;
4. poniamo inoltre $val(f) = \mathbf{f}$ e poi, ricorsivamente,

$\leadsto$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$\rightsquigarrow$

5. per ogni coppia α, β di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} \mathrm{f} & \text{se} \quad val(\alpha) = \mathrm{v} \quad \text{e} \quad val(\beta) = \mathrm{f}\,, \\ \mathrm{v} & \text{altrimenti}\,; \end{cases}$$

4

$\rightsquigarrow$

5. per ogni coppia α, β di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \quad =_{\text{Def}} \begin{cases} \mathtt{f} & \text{se} \quad val(\alpha) = \mathtt{v} \quad \text{e} \quad val(\beta) = \mathtt{f}\,, \\ \mathtt{v} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(col che $\gamma \mapsto val(\gamma)$ è un *assegnamento*);

4

$\rightsquigarrow$

5. per ogni coppia α, β di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} \mathtt{f} & \text{se} \quad val(\alpha) = \mathtt{v} \quad \text{e} \quad val(\beta) = \mathtt{f}\,, \\ \mathtt{v} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(col che $\gamma \mapsto val(\gamma)$ è un *assegnamento*);

6. per ogni coppia φ, x tale che $\exists\, x\, \varphi$ sia un enunciato:[4]

$$val(\exists\, x\, \varphi) \quad =_{\text{Def}} \quad \begin{cases} \mathtt{v} & \text{se} \quad val(\varphi^{x}_{k}) = \mathtt{v} \quad \text{per una} \\ & \text{o piú } k \text{ appartenenti a } \mathcal{D}\,, \\ \mathtt{f} & \text{nel caso contrario}\,. \end{cases}$$

[4] in altre parole, nella formula φ non figura libera alcuna variabile distinta dalla x

$\rightsquigarrow$

5. per ogni coppia α, β di enunciati:

$$val(\alpha \rightarrow \beta) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \begin{cases} \mathrm{f} & \text{se} \quad val(\alpha) = \mathrm{v} \quad \text{e} \quad val(\beta) = \mathrm{f}\,, \\ \mathrm{v} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(col che $\gamma \mapsto val(\gamma)$ è un *assegnamento*);

6. per ogni coppia φ, x tale che $\exists\, x\, \varphi$ sia un enunciato:[4]

$$val(\exists\, x\, \varphi) \quad =_{\mathrm{Def}} \quad \begin{cases} \mathrm{v} & \text{se} \quad val(\varphi^{x}_{e'}) = \mathrm{v} \quad \text{per uno} \\ & \text{o piú } e \text{ appartenenti a } \mathfrak{D}\,, \\ \mathrm{f} & \text{nel caso contrario}\,. \end{cases}$$

[4] in altre parole, nella formula φ non figura libera alcuna variabile distinta dalla x

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Quando in un termine τ figurano tutte e sole le var.

$$\nu_{i_0}, \ldots, \nu_{i_n}\,, \quad \text{ove} \quad i_0 < i_1 < \cdots < i_n\,,$$

consideriamo ***valore di*** τ la seguente funzione di $\mathfrak{D}^{n+1}$ in $\mathfrak{D}$:

$$(e_0, \ldots, e_n) \quad \xmapsto{val(\tau)} \quad val\left(\tau^{\nu_{i_0},\ldots,\nu_{i_n}}_{e'_0,\ldots,e'_n}\right)\,.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Quando in un termine τ figurano *libere* tutte e sole le var.

$$v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}\,, \quad \text{ove} \quad i_0 < i_1 < \cdots < i_n\,,$$

consideriamo ***valore di*** τ la seguente funzione di $\mathfrak{D}^{n+1}$ in $\mathfrak{D}$:

$$(e_0, \ldots, e_n) \quad \xmapsto{val(\tau)} \quad val\left(\tau^{v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}}_{e_0', \ldots, e_n'}\right)\,.$$

(Similm. per una formula φ ; le immagini di $val(\varphi)$ staranno in $\mathbf{2}$)

ESERCIZIO

Spiegate il senso delle due abbreviazioni

$$\forall x\,\varphi \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \exists x\,(\,\varphi \rightarrow f\,) \rightarrow f\ ,$$
$$\exists\,!\,x\,\varphi \quad =_{\mathsf{Def}} \quad \exists y\,\forall x\,(\,\varphi \leftrightarrow x = y\,)\ .$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Definizione dei *modelli* di un insieme $\mathcal{A}$ di enunciati

Diremo che una struttura $\mathfrak{I}$ ***modella*** $\mathcal{A}$ se ne rende veri tutti gli enunciati, cioè sse:

$$val_{\mathfrak{I}}(\alpha) \quad = \quad \mathtt{v}$$

per ogni α in $\mathcal{A}$. □

Definizione dei *modelli* di un insieme $\mathcal{A}$ di enunciati

Diremo che una struttura $\mathfrak{I}$ ***modella*** $\mathcal{A}$ se ne rende veri tutti gli enunciati, cioè sse:

$$val_{\mathfrak{I}}(\alpha) \;=\; \mathtt{v}$$

per ogni α in $\mathcal{A}$. □

Definizione di $\models$

Scriveremo

$$\mathcal{A} \;\models\; \varphi$$

quando

$$val_{\mathfrak{I}}(\varphi) \text{ vale costantemente } \mathtt{v} \text{ (i.e., `vero')}$$

in qualsiasi modello $\mathfrak{I}$ di $\mathcal{A}$. □

RIESTE

Esercizio

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

1. ϑ è *tautologica* (ad es. ϑ ha la forma $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$); oppure

ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

1. ϑ è *tautologica* (ad es. ϑ ha la forma $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$); oppure
2. ϑ ha la forma

$$\exists x\, \varphi \rightarrow \varphi\,,$$

ove la x figura <u>una volta in tutto</u>; oppure

ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

1. ϑ è *tautologica* (ad es. ϑ ha la forma $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$); oppure
2. ϑ ha la forma
$$\exists x \, \varphi \rightarrow \varphi \, ,$$
ove la x figura una volta in tutto; oppure
3. ϑ ha la forma
$$\varphi^x_\tau \rightarrow \exists x \, \varphi$$
oppure

ESERCIZIO

Dimostrare che

$$\emptyset \models \vartheta$$

quando la formula:

1. ϑ è *tautologica* (ad es. ϑ ha la forma $\varphi \rightarrow \psi \rightarrow \varphi$); oppure
2. ϑ ha la forma
$$\exists x\, \varphi \rightarrow \varphi\,,$$
ove la x figura <u>una volta in tutto</u>; oppure
3. ϑ ha la forma
$$\varphi^{x}_{\tau} \rightarrow \exists x\, \varphi$$
oppure
4. ϑ ha la forma
$$(\,\varphi \rightarrow \psi\,) \rightarrow \exists x\, \varphi \rightarrow \psi$$
ove la x *<u>non</u>* figura in ψ (ma solo in φ)

Se non ce le ha date Dio, le regole sintattiche devono ben poggiarsi da qualche parte — e dove, se non nel significato?

[van Heijenoort(1985), pag. 53]

Se non ce le ha date Dio, le regole sintattiche devono ben poggiarsi da qualche parte — e dove, se non nel significato? Ma tra il funzionamento esatto di un linguaggio naturale, con le convoluzioni e intricatezze dei suoi significati, e lo scheletro logico rappresentabile nella teoria della quantificazione c'è un'ampia lacuna, in cui stiamo, tutt'oggi, procedendo a tentoni.

[van Heijenoort(1985), pag. 53]

Martin Davis.
Lecture Notes in Logic.
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1993.

Jean van Heijenoort.
Selected Essays.
Bibliopolis, Napoli, 1985.