

Calcolo predicativo del 1° ordine

Eugenio G. Omodeo Trieste, aprile/maggio 2022



Nella mia ideografia ogni inferenza viene condotta secondo una specie di calcolo. Ciò non deve essere inteso in senso ristretto, come se esercitasse il proprio controllo un algoritmo uguale o simile a quello dell'addizione e della moltiplicazione ordinarie, ma nel senso che l'intero sistema è algoritmico, cioè dotato di un complesso di regole che determinano il passaggio da una o due proposizioni a un'altra in modo tale che può aver luogo soltanto ciò che è in accordo con tali regole.

(Frege, 1896)



*Nella mia ideografia ogni inferenza viene condotta secondo una specie di calcolo. Ciò non deve essere inteso in senso ristretto, come se esercitasse il proprio controllo un algoritmo uguale o simile a quello dell'addizione e della moltiplicazione ordinarie, ma nel senso che l'intero sistema è algoritmico, cioè dotato di un complesso di regole che determinano il passaggio da una o due proposizioni a un'altra in modo tale che può aver luogo soltanto ciò che è in accordo con tali regole. **Il mio proposito, quindi, è quello di ottenere un continuo rigore nelle dimostrazioni e un'estrema accuratezza logica, e contemporaneamente perspicuità e concisione.***

(Frege, 1896)



- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
-
-
-
-
-
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
-
-
-
-
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
-
-
-
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
-
-
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
- Espansioni e completamento di Henkin
-
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
- Espansioni e completamento di Henkin
- Teorema di completezza
-

- Riesposizione della sintassi, alla maniera di [Davis93]
- Assiomi quantificazionali, Dimostrazioni predicative
- Teorema dello scambio, Teorema di deduzione
- Teorema delle tautologie, Teorema della premessa fantasma
- Espansioni e completamento di Henkin
- Teorema di completezza
- Teorema di correttezza ('soundness')

Un linguaggio \mathcal{L} del 1° ordine è individuato da tre insiemi

\mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R}

disgiunti di simboli chiamati

costanti, *funtori*, *relatori*

(\mathcal{R} non vuoto)

Un linguaggio \mathcal{L} del 1° ordine è individuato da tre insiemi

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$$

disgiunti di simboli chiamati

costanti, *funtori*, *relatori*

(\mathcal{R} non vuoto), insieme a una funzione chiamata *grado*

$$d: \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

(In partic.: $= \overset{d}{\mapsto} 2$)

Un linguaggio \mathcal{L} del 1° ordine è individuato da tre insiemi

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$$

disgiunti di simboli chiamati

costanti, *funtori*, *relatori*

(\mathcal{R} non vuoto), insieme a una funzione chiamata *grado*

$$d: \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Gli altri simboli sono: le *variabili*

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$$

Un linguaggio \mathcal{L} del 1° ordine è individuato da tre insiemi

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$$

disgiunti di simboli chiamati

costanti, *funtori*, *relatori*

(\mathcal{R} non vuoto), insieme a una funzione chiamata *grado*

$$d: \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Gli altri simboli sono: le *variabili*

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$$

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$$

rispettivamente *legate* (i.e. 'mute') e *libere*; infine:

$$(), ,, f, \rightarrow, \exists$$

L'aritmetica A_E intravista lezioni fa era istituita sul linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C} = \{0\}$$

$$\mathcal{F} = \{S_{/1}, +_{/2}, \cdot_{/2}, E_{/2}\}$$

$$\mathcal{R} = \{=_{/2}, <_{/2}\}$$

L'aritmetica A_E intravista lezioni fa era istituita sul linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C} = \{0\}$$

$$\mathcal{F} = \{S_{/1}, +_{/2}, \cdot_{/2}, E_{/2}\}$$

$$\mathcal{R} = \{=_{/2}, <_{/2}\}$$

N.B.: Manca qui il relatore \leq , in quanto costruito abbreviativo:

$$X \leq Y \quad =_{\text{Def}} \quad X < Y \vee X = Y$$

L'aritmetica A_E intravista lezioni fa era istituita sul linguaggio dalla firma

$$\mathcal{C} = \{0\}$$

$$\mathcal{F} = \{S_{/1}, +_{/2}, \cdot_{/2}, E_{/2}\}$$

$$\mathcal{R} = \{=_{/2}, <_{/2}\}$$

N.B.: Manca qui il relatore \leq , in quanto costruito abbreviativo:

$$X \leq Y \quad =_{\text{Def}} \quad X < Y \vee X = Y$$

i.e.

$$X \leq Y \quad =_{\text{Def}} \quad ((X < Y \rightarrow f) \rightarrow X = Y)$$

ESEMPIO DI LINGUAGGIO INTERPRETATO / TEORIA

3: Undecidability

203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$$\forall x \quad Sx \neq 0 \quad (S1)$$

$$\forall x \forall y \quad (Sx = Sy \rightarrow x = y) \quad (S2)$$

$$\forall x \forall y \quad (x < Sy \leftrightarrow x \leq y) \quad (L1)$$

$$\forall x \quad x \not< 0 \quad (L2)$$

$$\forall x \forall y \quad (x < y \vee x = y \vee y < x) \quad (L3)$$

$$\forall x \quad x + 0 = x \quad (A1)$$

$$\forall x \forall y \quad x + Sy = S(x + y) \quad (A2)$$

$$\forall x \quad x \cdot 0 = 0 \quad (M1)$$

$$\forall x \forall y \quad x \cdot Sy = x \cdot y + x \quad (M2)$$

$$\forall x \quad x \mathbf{E} 0 = \mathbf{S} 0 \quad (E1)$$

$$\forall x \forall y \quad x \mathbf{E} Sy = x \mathbf{E} y \cdot x \quad (E2)$$

$$\forall^{\mathcal{J}} = \mathbb{N}$$

$$x \xrightarrow{S^{\mathcal{J}}} x + 1$$

$$\vdots$$

$$(x, y) \xrightarrow{E^{\mathcal{J}}} x \cdot y$$



(Raphael M. Robinson ,
1911–1995)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TI

ESEMPIO DI LINGUAGGIO INTERPRETATO / TEORIA

3: Undecidability

203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$$\forall x \quad Sx \neq 0 \quad (S1)$$

$$\forall x \forall y \quad (Sx = Sy \rightarrow x = y) \quad (S2)$$

$$\forall x \forall y \quad (x < Sy \leftrightarrow x \leq y) \quad (L1)$$

$$\forall x \quad x \not< 0 \quad (L2)$$

$$\forall x \forall y \quad (x < y \vee x = y \vee y < x) \quad (L3)$$

$$\forall x \quad x + 0 = x \quad (A1)$$

$$\forall x \forall y \quad x + Sy = S(x + y) \quad (A2)$$

$$\forall x \quad x \cdot 0 = 0 \quad (M1)$$

$$\forall x \forall y \quad x \cdot Sy = x \cdot y + x \quad (M2)$$

$$\forall x \quad xE0 = S0 \quad (E1)$$

$$\forall x \forall y \quad xESy = xEy \cdot x \quad (E2)$$

$$\forall^{\mathcal{J}} = \mathbb{N}$$

$$x \xrightarrow{S^{\mathcal{J}}} x + 1$$

$$\vdots$$

$$(x, y) \xrightarrow{E^{\mathcal{J}}} x \cdot y$$



(Raphael M. Robinson ,
1911–1995)



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

DEFINIZIONE:

I **termini** di \mathcal{L} sono tutte e sole le seq. di simboli delle 3 forme:

- 0 “ v_i ” ove v_i è una qualsiasi var. libera;
- 1 “ c ” con c da \mathcal{C} ;
- 2 $g(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)})$, con g da \mathcal{F} , ove ogni τ_k è un termine.

DEFINIZIONE:

I **termini** di \mathcal{L} sono tutte e sole le seq. di simboli delle 3 forme:

- 0 “ v_i ” ove v_i è una qualsiasi var. libera;
- 1 “ c ” con c da \mathcal{C} ;
- 2 $g(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)})$, con g da \mathcal{F} , ove ogni τ_k è un termine.

DEFINIZIONE:

Le **formule atomiche** di \mathcal{L} sono le sequenze di simboli della forma:

- $r(\tau_1, \dots, \tau_{d(r)})$, con r da \mathcal{R} , ove ogni τ_k è un termine.

DEFINIZIONE:

Le **formule** di \mathcal{L} sono le sequenze delle 4 forme:

- ① “ f ” da sola;
- ② $r(\tau_1, \dots, \tau_{d(r)})$, con r presa da \mathcal{R} , ove ogni τ_k è un termine;
- ③ $(\varphi \rightarrow \psi)$, ove φ e ψ sono formule;
- ④ $\exists \xi_j \varphi(\xi_j)$, ove φ è una formula nella quale non figura ξ_j ed $\varphi(\xi_j)$ risulta dalla sostituzione di ξ_j a una variabile libera ν_i ovunque ν_i figuri in φ

DEFINIZIONE:

Le **formule** di \mathcal{L} sono le sequenze delle 4 forme:

- ① “ f ” da sola;
- ② $r(\tau_1, \dots, \tau_{d(r)})$, con r presa da \mathcal{R} , ove ogni τ_k è un termine;
- ③ $(\varphi \rightarrow \psi)$, ove φ e ψ sono formule;
- ④ $\exists \xi_j \varphi(\xi_j)$, ove φ è una formula nella quale non figura ξ_j ed $\varphi(\xi_j)$ risulta dalla sostituzione di ξ_j a una variabile libera ν_i ovunque (e se) ν_i figurì in φ ($= \varphi(\nu_i)$)

DEFINIZIONE:

Le **formule** di \mathcal{L} sono le sequenze delle 4 forme:

- ① “ f ” da sola;
- ② $r(\tau_1, \dots, \tau_{d(r)})$, con r presa da \mathcal{R} , ove ogni τ_k è un termine;
- ③ $(\varphi \rightarrow \psi)$, ove φ e ψ sono formule;
- ④ $\exists \xi_j \varphi(\xi_j)$, ove φ è una formula nella quale non figura ξ_j ed $\varphi(\xi_j)$ risulta dalla sostituzione di ξ_j a una variabile libera ν_i

ovunque
 ν_i figurati in φ ($= \varphi(\nu_i)$)

DEFINIZIONE:

Si chiamano **enunciati** di \mathcal{L} quelle formule di \mathcal{L} in cui non figurano variabili libere.

Che operazione sarà mai la $\alpha \Rightarrow \beta$?

Quando [Davis93] correla

$\varphi(x)$ con $\exists x \varphi(x)$,

la 'metavar.' x rappresenta, a sn e a dx, due simboli diversi

Quando [Davis93] correla

$$\varphi(x) \quad \text{con} \quad \exists x \varphi(x),$$

la 'metavar.' x rappresenta, a sn e a dx , due simboli diversi.

Scrivendo, piú in gen.,

$$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

[Davis93] rappresenta con x_1, \dots, x_n varr. libere distinte, non tenute a figurare tutte in φ .

Quando [Davis93] correla

$$\varphi(x) \quad \text{con} \quad \exists x \varphi(x),$$

la 'metavar.' x rappresenta, a s_n e a dx , due simboli diversi.

Scrivendo, piú in gen.,

$$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

[Davis93] rappresenta con x_1, \dots, x_n varr. libere distinte, non tenute a figurare tutte in φ .

Scrivendo poi

$$\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n),$$

indicherà l'effetto della sostituzione *simultanea* e *dappertutto* dei termini τ_i alle varr. x_i

Quando [Davis93] correla

$$\varphi(x) \quad \text{con} \quad \exists x \varphi(x),$$

la 'metavar.' x rappresenta, a sn e a dx , due simboli diversi.

Scrivendo, piú in gen.,

$$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n),$$

[Davis93] rappresenta con x_1, \dots, x_n varr. libere distinte, non tenute a figurare tutte in φ .

Scrivendo poi

$$\varphi(\tau_1, \dots, \tau_n),$$

indicherà l'effetto della sostituzione *simultanea* e *dappertutto* dei termini τ_i alle varr. x_i :

$$\varphi_{\tau_1, \dots, \tau_n}^{x_1, \dots, x_n}.$$

$\neg\varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow f)$
$\forall \xi_j \varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\exists \xi_j \neg\varphi)$
$\varphi \vee \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$
$\varphi \& \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

$\neg\varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow f)$
$\forall \xi_j \varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\exists \xi_j \neg\varphi)$
$\varphi \vee \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$
$\varphi \& \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

Nota Bene: [Davis93] utilizza parentesi quadre anziché tonde attorno alle formule.

$\neg \varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow f)$
$\forall \xi_j \varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\exists \xi_j \neg \varphi)$
$\varphi \vee \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$((\neg \varphi) \rightarrow \psi)$
$\varphi \& \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\varphi \rightarrow (\neg \psi))$
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

TERMINOLOGIA:

Le sequenze della forma “ $\exists \xi_j$ ” e “ $\forall \xi_j$ ” si chiamano **quantificatori** **esistenziali**, rispettivam. **q. universali**. Si leggono:

$\neg \varphi$	\equiv_{Def}	$(\varphi \rightarrow f)$
$\forall \xi_j \varphi$	\equiv_{Def}	$\neg(\exists \xi_j \neg \varphi)$
$\varphi \vee \psi$	\equiv_{Def}	$((\neg \varphi) \rightarrow \psi)$
$\varphi \& \psi$	\equiv_{Def}	$\neg(\varphi \rightarrow (\neg \psi))$
$\varphi \leftrightarrow \psi$	\equiv_{Def}	$(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

TERMINOLOGIA:

Le sequenze della forma “ $\exists \xi_j$ ” e “ $\forall \xi_j$ ” si chiamano **quantificatori esistenziali**, rispettivam. **q. universali**. Si leggono:
 ‘per qualche $\xi_j \dots$ ’, ‘per ogni $\xi_j \dots$ ’

$\neg\varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow f)$
$\forall \xi_j \varphi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\exists \xi_j \neg\varphi)$
$\varphi \vee \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$
$\varphi \& \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))$
$\varphi \leftrightarrow \psi$	$\stackrel{\text{Def}}{=}$	$(\varphi \rightarrow \psi) \& (\psi \rightarrow \varphi)$

$$\varphi^\forall \stackrel{\text{Def}}{=} \forall x_1 \cdots \forall x_k \varphi,$$

ove x_1, \dots, x_k corrispondono alle varr. distinte presenti libere in φ .

There are two economy measures that we can take to obtain simplification without any essential loss of linguistic expressiveness:

First, we choose as our sentential connective symbols just \neg and \rightarrow . We know from Section 1.5 that these form a complete set, so there is no compelling reason to use more.

Secondly, we forego the luxury of an existential quantifier, $\exists x$. In its place we use $\neg \forall x \neg$. This is justified, since an English sentence like

There is something rotten in the state of Denmark,

is equivalent to

It is not the case that for every x , x is not rotten in the state of Denmark.

Thus the formula $\exists v_1 \forall v_2 v_1 = v_2$ becomes, in unabbreviated form,

$$(\neg \forall v_1 (\neg \forall v_2 = v_1 v_2)).$$



Le *formule* (sic!) delle segg. forme sono gli *assiomi (logici)* di \wedge :

① *implicativi*:

$$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi$$

Le *formule* (sic!) delle segg. forme sono gli **assiomi (logici)** di Λ :

❶ *implicativi*:

$$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi$$

❷ *auto-distributivi*:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$$

Le *formule* (sic!) delle segg. forme sono gli **assiomi (logici)** di \wedge :

❶ *implicativi*:

$$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi$$

❷ *auto-distributivi*:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$$

❸ *bis-negativi*:

$$((\varphi \Rightarrow f) \Rightarrow f) \Rightarrow \varphi$$

Le *formule* (sic!) delle segg. forme sono gli **assiomi (logici)** di \wedge :

❶ *implicativi*:

$$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi$$

❷ *auto-distributivi*:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$$

❸ *bis-negativi*:

$$((\varphi \Rightarrow f) \Rightarrow f) \Rightarrow \varphi$$

❹ *esistenziali*:

$$\varphi(\tau) \Rightarrow \exists x \varphi(x),$$

ove τ è un termine

Le *formule* (sic!) delle segg. forme sono gli **assiomi (logici)** di \wedge :

❶ *implicativi*:

$$\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi$$

❷ *auto-distributivi*:

$$(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$$

❸ *bis-negativi*:

$$((\varphi \Rightarrow f) \Rightarrow f) \Rightarrow \varphi$$

❹ *esistenziali*:

$$\varphi(\tau) \Rightarrow \exists x \varphi(x),$$

ove τ è un termine

❺ *vacui*:

$$(\exists x \varphi) \Rightarrow \varphi,$$

ove la x (legata) figura una volta in tutto

Def.: Nel contesto di \wedge , diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è **dimostrazione** di ϑ da un insieme \mathcal{A} di *enunciati* quando

$$\delta_h = \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \dots, h$, accade che:

Def.: Nel contesto di \wedge , diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è **dimostrazione** di ϑ da un insieme \mathcal{A} di *enunciati* quando

$$\delta_h = \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \dots, h$, accade che:

① δ_i appartiene ad \mathcal{A} ,

oppure

Def.: Nel contesto di \wedge , diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è **dimostrazione** di ϑ da un insieme \mathcal{A} di *enunciati* quando

$$\delta_h = \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \dots, h$, accade che:

- ① δ_i appartiene ad \mathcal{A} , oppure
- ② δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure

Def.: Nel contesto di \wedge , diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è **dimostrazione** di ϑ da un insieme \mathcal{A} di *enunciati* quando

$$\delta_h = \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \dots, h$, accade che:

- ① δ_i appartiene ad \mathcal{A} , oppure
- ② δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure
- ③ vi sono $j_0 < i$ e $j_1 < i$ tali che $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, oppure

Def.: Nel contesto di \wedge , diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è **dimostrazione** di ϑ da un insieme \mathcal{A} di *enunciati* quando

$$\delta_h = \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \dots, h$, accade che:

- ① δ_i appartiene ad \mathcal{A} , oppure
- ② δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure
- ③ vi sono $j_0 < i$ e $j_1 < i$ tali che $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, oppure
- ④ vi sono un $j < i$, formule φ e ψ e una **x assente da ψ** tali che

$$\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi, \quad \delta_i = \exists x \varphi(x) \Rightarrow \psi.$$

Def.: Nel contesto di \wedge , diremo che una sequenza di *formule*

$$\delta = \langle \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_h \rangle$$

è **dimostrazione** di ϑ da un insieme \mathcal{A} di *enunciati* quando

$$\delta_h = \vartheta$$

e poi, per $i = 0, \dots, h$, accade che:

- ① δ_i appartiene ad \mathcal{A} , oppure
- ② δ_i ricade in uno dei 5 schemi del lucido precedente, oppure
- ③ vi sono $j_0 < i$ e $j_1 < i$ tali che $\delta_{j_1} = (\delta_{j_0} \Rightarrow \delta_i)$, oppure
- ④ vi sono un $j < i$, formule φ e ψ e una x assente da ψ tali che

$$\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi, \quad \delta_j = \exists x \varphi(x) \Rightarrow \psi.$$

Scriveremo allora:

$$\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \vartheta$$

Esempio di dimostrazione: $\vdash_{\wedge} \varphi \Rightarrow \varphi$

Dimostriamo in 5 passi un'arbitraria formula $\varphi \Rightarrow \varphi$ da \emptyset :

	Ax.	MP
1. $\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$	[I]	
2. $(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[II]	
3. $(\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$		[1, 2]
4. $\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[I]	
5. $\varphi \Rightarrow \varphi$		[4, 3]

Esempio di dimostrazione: $\vdash_{\wedge} \varphi \Rightarrow \varphi$

Dimostriamo in 5 passi un'arbitraria formula $\varphi \Rightarrow \varphi$ da \emptyset :

	Ax.	MP
1. $\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$	[I]	
2. $(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[II]	
3. $(\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$		[1, 2]
4. $\varphi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \varphi$	[I]	
5. $\varphi \Rightarrow \varphi$		[4, 3]

N.B.: Qui è in gioco solo una delle *regole d'inferenza*, che sono:

MP

e

Gen \exists

Possiamo considerare *assiomi dell'uguaglianza* le chiusure universali delle segg. formule:

$$\begin{array}{l} x = x \\ x = y \Rightarrow y = x \\ x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z \end{array}$$

dove:

- metavariables distinte rappresentano variabili individuali distinte (tacitam. legate da $\forall \xi$ iniziali);

Possiamo considerare *assiomi dell'uguaglianza* le chiusure universali delle segg. formule:

$$x = x$$

$$x = y \Rightarrow y = x$$

$$x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z$$

$$x_1 = y_1 \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n = y_n \Rightarrow g(x_1, \dots, x_n) = g(y_1, \dots, y_n)$$

dove:

- metavariables distinte rappresentano variabili individuali distinte (tacitam. legate da $\forall \xi$ iniziali);
- g in \mathcal{F} , $d(g) = n$;

Possiamo considerare *assiomi dell'uguaglianza* le chiusure universali delle segg. formule:

$$\begin{array}{l}
 x = x \\
 x = y \Rightarrow y = x \\
 x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z \\
 x_1 = y_1 \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n = y_n \Rightarrow g(x_1, \dots, x_n) = g(y_1, \dots, y_n) \\
 x_1 = y_1 \Rightarrow x_2 = y_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_m = y_m \Rightarrow P(x_1, \dots, x_m) \Rightarrow P(y_1, \dots, y_m)
 \end{array}$$

dove:

- metavariables distinte rappresentano variabili individuali distinte (tacitam. legate da $\forall \xi$ iniziali);
- g in \mathcal{F} , $d(g) = n$;
- P in $\mathcal{R} \setminus \{=\}$, $d(P) = m$.



È UNA LOGICA \vdash_{\wedge} ? E, SE SÌ, È BOOLEANA ?

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_{\wedge}$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

1 $\alpha \vdash \alpha;$

È UNA LOGICA \vdash_{\wedge} ? E, SE SÌ, È BOOLEANA ?

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_{\wedge}$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- Ⓜ1 $\alpha \vdash \alpha$;
- Ⓜ2 (Monotonicità): quando $A \vdash \alpha$ e $B \supseteq A$, allora $B \vdash \alpha$;

È UNA LOGICA \vdash_{\wedge} ? E, SE SÌ, È BOOLEANA ?

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_{\wedge}$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- 1 $\alpha \vdash \alpha$;
- 2 (Monotonicità): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- 3 (Compattezza): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{F} finito, t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_{\wedge}$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- 1 $\alpha \vdash \alpha$;
- 2 (Monotonicità): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- 3 (Compattezza): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\boxed{\mathcal{F} \text{ finito}}$,
t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;
- 4 (Taglio): quando $\mathcal{B}, \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.

È UNA LOGICA \vdash_{\wedge} ? E, SE SÌ, È BOOLEANA ?

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_{\wedge}$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- Ⓜ1 $\alpha \vdash \alpha$;
- Ⓜ2 (Monotonicità): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- Ⓜ3 (Compattezza): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{F} finito,
t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;
- Ⓜ4 (Taglio): quando $\mathcal{B}, \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.

- Ⓜ5 (Principio di doppia negazione): $(\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$.

È UNA LOGICA \vdash_{\wedge} ? E, SE SÌ, È BOOLEANA ?

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_{\wedge}$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- Ⓜ1 $\alpha \vdash \alpha$;
- Ⓜ2 (Monotonicità): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- Ⓜ3 (Compattezza): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, \mathcal{F} finito,
t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;
- Ⓜ4 (Taglio): quando $\mathcal{B}, \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.
- Ⓜ5 (Principio di deduzione):
 $\mathcal{A} \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $\mathcal{A}, \alpha \vdash \beta$;
- Ⓜ6 (Principio di doppia negazione): $(\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$.

È UNA LOGICA \vdash_{\wedge} ? E, SE SÌ, È BOOLEANA ?

Occorre controllare, per $\vdash = \vdash_{\wedge}$, le

CONDIZIONI: (SOLO PER GLI ENUNCIATI !?)

- Ⓜ1 $\alpha \vdash \alpha$;
- Ⓜ2 (Monotonicità): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$ e $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, allora $\mathcal{B} \vdash \alpha$;
- Ⓜ3 (Compattezza): quando $\mathcal{A} \vdash \alpha$, c'è un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, $\boxed{\mathcal{F} \text{ finito}}$,
t.c. $\mathcal{F} \vdash \alpha$;
- Ⓜ4 (Taglio): quando $\mathcal{B}, \beta \vdash \alpha$ ed $\mathcal{A} \vdash \beta$, allora $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \vdash \alpha$.
- Ⓜ1 (Principio di deduzione):
 $\mathcal{A} \vdash \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se $\mathcal{A}, \alpha \vdash \beta$;
- Ⓜ2 (Principio di doppia negazione): $(\alpha \Rightarrow f) \Rightarrow f \vdash \alpha$.

Il 'se' è l'unico punto delicato da verificare. . .

TEOREMA DELLO SCAMBIO

∴ Una volta accertato che

se $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \beta$ allora $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \beta$,

potremo avvalerci del Cor. di Post e utilizzare qualsiasi tautologia come scorciatoia dimostrativa.

TEOREMA DELLO SCAMBIO

∴ Una volta accertato che

se $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \beta$ allora $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \beta$,

potremo avvalerci del Cor. di Post e utilizzare qualsiasi tautologia
come scorciatoia dimostrativa. Preliminarm.:

TEOREMA

Quando $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$, vale anche $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$

TEOREMA DELLO SCAMBIO

∴ Una volta accertato che

se $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \beta$ allora $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \beta$,

potremo avvalerci del Cor. di Post e utilizzare qualsiasi tautologia come scorciatoia dimostrativa. Preliminarm.:

TEOREMA (NUOVA REGOLA D'INFERENZA: SW)

Quando $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$, vale anche $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$

DIM.:

[Davis93, pagg. 25–26] mostra come prolungare una dimostrazione per il lato sinistro in una per il lato destro (V. sotto)





Come prolungare una dim. di $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ da \mathcal{A} :

1. $(\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ II
2. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ MP
3. $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow \psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ I
4. $\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ MP
5. $(\psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow$
 $(\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ II
6. $(\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ MP
7. $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi$ I
8. $\psi \Rightarrow \varphi \Rightarrow \chi$ MP \square

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$\delta_0, \dots, \delta_h$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da \mathcal{A} .

Caso $\delta_j = \alpha$.

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$\delta_0, \dots, \delta_h$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da \mathcal{A} .

Caso $\delta_j = \alpha$. Bastano 5 passaggi, come visto sopra.

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$\delta_0, \dots, \delta_h$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da \mathcal{A} .

Caso $\delta_i = \alpha$.

Caso δ_i in \mathcal{A} oppure δ_i assioma di \wedge .

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$\delta_0, \dots, \delta_h$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da \mathcal{A} .

Caso $\delta_i = \alpha$.

Caso δ_i in \mathcal{A} oppure δ_i assioma di \wedge . Bastano 3 passaggi:

$\delta_i, \delta_i \Rightarrow \alpha \Rightarrow \delta_i, \alpha \Rightarrow \delta_i$.

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$\delta_0, \dots, \delta_h$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da \mathcal{A} .

Caso $\delta_i = \alpha$.

Caso δ_i in \mathcal{A} oppure δ_i assioma di \wedge .

Caso δ_i ottenuto tramite MP da δ_j e $\delta_j \Rightarrow \delta_i$.

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$

Dim.: Sia

$$\delta_0, \dots, \delta_h$$

una dimostrazione da $\mathcal{A} \cup \{\alpha\}$; allora, induttivam., per ogni i costruiamo una dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_i$ da \mathcal{A} .

Caso $\delta_i = \alpha$.

Caso δ_i in \mathcal{A} oppure δ_i assioma di \wedge .

Caso δ_i ottenuto tramite MP da δ_j e $\delta_j \Rightarrow \delta_i$.

Concateniamo le dim. di $\alpha \Rightarrow \delta_j$ e di $\alpha \Rightarrow \delta_j \Rightarrow \delta_i$ e proseguiamo:

$$(\alpha \Rightarrow \delta_j \Rightarrow \delta_i) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \delta_j) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \delta_i, \quad \text{II}$$

per concludere con due MP.



Teorema:SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$ \rightsquigarrow **Dim.:**

Teorema:SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$ \rightsquigarrow **Dim.:**Caso $\delta_i = \exists x \varphi(x) \Rightarrow \psi$ ottenuto tramite Gen da

$$\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi .$$

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$ \rightsquigarrow

Dim.:

Caso $\delta_j = \exists x \varphi(x) \Rightarrow \psi$ ottenuto tramite Gen da
 $\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi$. Prolunghiamo così la dim. di

$$\alpha \Rightarrow \varphi(x) \Rightarrow \psi$$

da \mathcal{A} :

Teorema:

SE $\mathcal{A}, \alpha \vdash_{\wedge} \chi$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \alpha \Rightarrow \chi$ \rightsquigarrow

Dim.:

Caso $\delta_j = \exists x \varphi(x) \Rightarrow \psi$ ottenuto tramite Gen da
 $\delta_j = \varphi(x) \Rightarrow \psi$. Prolunghiamo così la dim. di

$$\alpha \Rightarrow \varphi(x) \Rightarrow \psi$$

da \mathcal{A} :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x) & \Rightarrow & \alpha & \Rightarrow \psi & \text{SW} \\ \exists x \varphi(x) & \Rightarrow & \alpha & \Rightarrow \psi & \text{Gen} \\ \alpha & \Rightarrow & \exists x \varphi(x) & \Rightarrow \psi & \text{SW} \end{array}$$

□



TEOREMA (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine \mathcal{L} e \mathcal{L}' siano:

- \mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R} , d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, \mathcal{F} , \mathcal{R} , d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$.

TEOREMA (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine \mathcal{L} e \mathcal{L}' siano:

- \mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R} , d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, \mathcal{F} , \mathcal{R} , d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di \mathcal{L} ,
- \mathcal{A} sia formato di enunciati di \mathcal{L} e che

TEOREMA (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine \mathcal{L} e \mathcal{L}' siano:

- \mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R} , d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, \mathcal{F} , \mathcal{R} , d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di \mathcal{L} ,
- \mathcal{A} sia formato di enunciati di \mathcal{L} e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi_c^{v_i}$

TEOREMA (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine \mathcal{L} e \mathcal{L}' siano:

- \mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R} , d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, \mathcal{F} , \mathcal{R} , d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di \mathcal{L} ,
- \mathcal{A} sia formato di enunciati di \mathcal{L} e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi_c^{vi}$

Allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$$

UN TEOREMA DI ELIMINABILITÀ

TEOREMA (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine \mathcal{L} e \mathcal{L}' siano:

- \mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R} , d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, \mathcal{F} , \mathcal{R} , d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di \mathcal{L} ,
- \mathcal{A} sia formato di enunciati di \mathcal{L} e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi_c^{vi}$

Allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi$$

(Per dimostraz.: Vedi [Davis93, pag. 27])

UN TEOREMA DI ELIMINABILITÀ

TEOREMA (della costante eliminabile)

Le firme dei linguaggi predicativi del prim'ordine \mathcal{L} e \mathcal{L}' siano:

- \mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R} , d e
- $\mathcal{C} \cup \{c\}$, \mathcal{F} , \mathcal{R} , d rispettivam.,

con $c \notin \mathcal{C}$. Supponiamo poi che:

- φ sia una formula di \mathcal{L} ,
- $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ sia formato di enunciati di \mathcal{L} e che
- $\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}'} \varphi_c^{y_i}$, $\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}'} \gamma$.

Allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \varphi, \quad \mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \gamma.$$

(Per dimostraz.: Vedi [Davis93, pag. 27])

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \vartheta$$

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \vartheta.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1, \dots, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n)$$

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \vartheta.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1, \dots, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n).$$

Per $i = 0, \dots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo c_1, \dots, c_i a Λ

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \vartheta.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1, \dots, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n).$$

Per $i = 0, \dots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo c_1, \dots, c_i a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_n}^{x_1, \dots, x_n}$

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \vartheta.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1, \dots, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n).$$

Per $i = 0, \dots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo c_1, \dots, c_i a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_n}^{x_1, \dots, x_n}$;

per eliminaz. di c_{i+1} , da $\vdash_{\Lambda^{(i+1)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_{i+1}}^{x_1, \dots, x_{i+1}}$ discende $\vdash_{\Lambda^{(i)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_i}^{x_1, \dots, x_i}$

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \vartheta.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1, \dots, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n).$$

Per $i = 0, \dots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo c_1, \dots, c_i a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_n}^{x_1, \dots, x_n}$;

per eliminaz. di c_{i+1} , da $\vdash_{\Lambda^{(i+1)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_{i+1}}^{x_1, \dots, x_{i+1}}$ discende $\vdash_{\Lambda^{(i)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_i}^{x_1, \dots, x_i}$.

Propagando a ritroso

.....

COROLLARIO (Dimostrabilità delle tautologie)

Se ϑ è una formula tautologica allora, nel calcolo predicativo:

$$\vdash_{\Lambda} \vartheta.$$

DIM.:

Introduciamo nuove costanti

$$c_1, \dots, c_n$$

in numero pari a quello delle var. libere distinte in ϑ :

$$\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n).$$

Per $i = 0, \dots, n$, otteniamo $\Lambda^{(i)}$ aggiungendo c_1, \dots, c_i a Λ .

Per il Cor. di Post: $\vdash_{\Lambda^{(n)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_n}^{x_1, \dots, x_n}$;

per eliminaz. di c_{i+1} , da $\vdash_{\Lambda^{(i+1)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_{i+1}}^{x_1, \dots, x_{i+1}}$ discende $\vdash_{\Lambda^{(i)}} \vartheta_{c_1, \dots, c_i}^{x_1, \dots, x_i}$.

Propagando a ritroso, otteniamo $\vdash_{\Lambda^{(0)}} \vartheta$. □

Es. d'uso di TAUT:

SE $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \varphi(x)$ ALLORA $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \forall x \varphi(x)$

Possiamo così *prolungare* una dimostrazione di

$\varphi(x)$

da \mathcal{A}

$$\text{SE } \mathcal{A} \vdash_{\wedge} \varphi(x) \text{ ALLORA } \mathcal{A} \vdash_{\wedge} \forall x \varphi(x)$$

Possiamo così *prolungare* una dimostrazione di

$$\varphi(x)$$

da \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ll} \varphi(x) \Rightarrow (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{Taut} \\ (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{MP} \\ \exists x (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{Gen}_{\exists} \end{array}$$

$$\text{SE } \mathcal{A} \vdash_{\wedge} \varphi(x) \text{ ALLORA } \mathcal{A} \vdash_{\wedge} \forall x \varphi(x)$$

Possiamo cosí *prolungare* una dimostrazione di

$$\varphi(x)$$

da \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ll} \varphi(x) \Rightarrow (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{Taut} \\ (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{MP} \\ \exists x (\varphi(x) \Rightarrow f) \Rightarrow f & \text{Gen}_{\exists} \end{array}$$

e si richiamino le def.

$$\begin{array}{ll} \neg \psi & =_{\text{Def}} \psi \Rightarrow f \\ \forall x \varphi & =_{\text{Def}} \neg(\exists x \neg \varphi) \end{array}$$

□

TEOREMA (della premessa fantasma)

Siano

$$\Lambda, \Lambda', c, \mathcal{A}, \varphi$$

come sopra e in φ compaia libera solo la x . Allora da

$$\mathcal{A}, (\exists x \varphi) \Rightarrow \varphi_c^x \quad \vdash_{\Lambda'} \quad \varphi$$

discende che

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \varphi.$$



TEOREMA (della premessa fantasma)

Siano

$$\wedge, \wedge', c, \mathcal{A}, \varphi$$

come sopra e in φ compaia libera solo la x . Allora da

$$\mathcal{A}, (\exists x \varphi) \Rightarrow \varphi_c^x \quad \vdash_{\wedge'} \quad \varphi$$

discende che

$$\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \varphi.$$



LEMMA (preparatorio al Teor. della premessa fantasma)

Se in ψ compare libera solo la var. y , allora

$$\vdash_{\wedge} \exists y \left((\exists x \psi_x^y) \Rightarrow \psi \right).$$

(Dim: Vedi [Davis93, pagg. 27–28])

DIMOSTRAZIONE (Teor. della premessa fantasma)



Dim.:

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}'} (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_c^x) \Rightarrow \varphi,$$

DIMOSTRAZIONE (Teor. della premessa fantasma)



Dim.:

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \vdash_{\wedge'} (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_c^x) \Rightarrow \varphi,$$

donde eliminiamo la c sostituendole una nuova var. libera y :

$$\mathcal{A} \vdash_{\wedge} (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_y^x) \Rightarrow \varphi.$$

DIMOSTRAZIONE (Teor. della premessa fantasma)



Dim.:

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_c^x) \Rightarrow \varphi,$$

donde eliminiamo la c sostituendole una nuova var. libera y :

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_y^x) \Rightarrow \varphi.$$

Di qui, per Gen_{\exists} ,

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \exists y (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_y^x) \Rightarrow \varphi$$

DIMOSTRAZIONE (Teor. della premessa fantasma)



Dim.:

Il teor. di deduzione ci dà:

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda'} (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_c^x) \Rightarrow \varphi,$$

donde eliminiamo la c sostituendole una nuova var. libera y :

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_y^x) \Rightarrow \varphi.$$

Di qui, per Gen_{\exists} ,

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \exists y (\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_y^x) \Rightarrow \varphi;$$

onde, grazie al lemma preparatorio (ove $\psi = \varphi_y^x$), tramite **MP**:

$$\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \varphi.$$



Potremmo forse introdurre, anziché nuove costanti, simboli di funzione come 'testimoni' di enunciati della forma

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \chi(x_1, \dots, x_n, y) ?$$

Potremmo forse introdurre, anziché nuove costanti, simboli di funzione come 'testimoni' di enunciati della forma

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y \chi(x_1, \dots, x_n, y) ?$$



(A. Thoralf Skolem, Sandsvør 1887–Oslo 1963)

[TARSKI, MOSTOWSKI, ROBINSON (1971), PAG. 77]

Firma del linguaggio:

$$\langle \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle = \langle \{ \}, \{ \circ_{/2} \}, \{ =_{/2} \} \rangle.$$

Assiomi \mathcal{G} : Chiusura universale di ciascuna delle formule

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= (x \circ y) \circ z, \\ \exists z (x &= y \circ z), \\ \exists y (x &= y \circ z). \end{aligned}$$

UNDECIDABILITY OF THE ELEMENTARY THEORY OF GROUPS

We consider in this paper an axiomatic theory G with standard formalization, called the *elementary theory of groups* and characterized by the following stipulations: the only non-logical constant of G is the binary operation symbol \circ ; the set of non-logical axioms of G consists of the three sentences:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: & \quad x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z. \\ \Gamma_2: & \quad \forall z(x = y \circ z). \\ \Gamma_3: & \quad \forall y(x = y \circ z). \end{aligned}$$

Hence, a sentence is valid in G if and only if it is satisfied in every system $\langle G, \circ \rangle$ which is a group in the sense of modern algebra (see I.2). The purpose of the paper is to show that the *elementary theory of groups is undecidable*.¹

Che bastino questi a garantire l'esistenza di un elem. neutro ecc. ?



Un'altra (piú convenzionale) assiomatizzazione :

$$\forall g \forall h \forall k ((g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k))$$

$$\exists e \forall g (e \circ g = g \ \& \ \exists h \ h \circ g = e)$$

$$\forall g \forall h \forall k ((g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k))$$

$$\exists e \forall g (e \circ g = g \ \& \ \exists h \ h \circ g = e)$$

↓↓↓↓

$$\forall g \forall h \forall k (g \circ h \circ k = g \circ (h \circ k))$$

$$\exists e \forall g \exists h (e \circ g = g \ \& \ h \circ g = e)$$

$$\forall g \forall h \forall k ((g \circ h) \circ k = g \circ (h \circ k))$$

$$\exists e \forall g (e \circ g = g \ \& \ \exists h \ h \circ g = e)$$

↓↓↓↓

$$\forall g \forall h \forall k (g \circ h \circ k = g \circ (h \circ k))$$

$$\exists e \forall g \exists h (e \circ g = g \ \& \ h \circ g = e)$$

↓↓↓↓

$$\forall g \forall h \forall k (g \circ h \circ k = g \circ (h \circ k))$$

$$\forall g (e \circ g = g \ \& \ g^{-1} \circ g = e)$$

$$(E) \quad \forall x \forall y (\quad \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \quad)$$

$$(N) \quad \exists z \forall v (\quad \neg v \in z \quad)$$

$$(W) \quad \forall x \forall y \exists w \forall v (\quad v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

$$(L) \quad \forall x \forall y \exists l \forall v (\quad v \in l \leftrightarrow (v \in x \& \neg v = y) \quad)$$

$$(R) \quad \forall x \exists a \forall y (\quad y \in x \rightarrow (a \in x \& \neg y \in a) \quad)$$

$$(E) \quad \forall x \forall y (\quad \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \quad)$$

\rightsquigarrow ???

$$(N) \quad \exists z \forall v (\quad \neg v \in z \quad)$$

\rightsquigarrow $\forall v (\quad v \notin \emptyset \quad)$

$$(W) \quad \forall x \forall y \exists w \forall v (\quad v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

$$(L) \quad \forall x \forall y \exists l \forall v (\quad v \in l \leftrightarrow (v \in x \ \& \ \neg v = y) \quad)$$

$$(R) \quad \forall x \exists a \forall y (\quad y \in x \rightarrow (a \in x \ \& \ \neg y \in a) \quad)$$

$$(E) \quad \forall x \forall y (\quad \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \quad)$$

$$(N) \quad \exists z \forall v (\quad \neg v \in z \quad)$$

$$\rightsquigarrow \quad \forall v (\quad v \notin \emptyset \quad)$$

$$(W) \quad \forall x \forall y \exists w \forall v (\quad v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

$$\rightsquigarrow \quad \forall x \forall y \forall v (\quad v \in w(x, y) \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

$$(L) \quad \forall x \forall y \exists l \forall v (\quad v \in l \leftrightarrow (v \in x \& \neg v = y) \quad)$$

$$(R) \quad \forall x \exists a \forall y (\quad y \in x \rightarrow (a \in x \& \neg y \in a) \quad)$$

$$(E) \quad \forall x \forall y (\quad \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \quad)$$

$$(N) \quad \exists z \forall v (\quad \neg v \in z \quad)$$

$$\rightsquigarrow \quad \forall v (\quad v \notin \emptyset \quad)$$

$$(W) \quad \forall x \forall y \exists w \forall v (\quad v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

$$\rightsquigarrow \quad \forall x \forall y \forall v (\quad v \in w(x,y) \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

$$(L) \quad \forall x \forall y \exists l \forall v (\quad v \in l \leftrightarrow (v \in x \& \neg v = y) \quad)$$

$$\rightsquigarrow \quad \forall x \forall y \forall v (\quad v \in l(x,y) \leftrightarrow (v \in x \& v \neq y) \quad)$$

$$(R) \quad \forall x \exists a \forall y (\quad y \in x \rightarrow (a \in x \& \neg y \in a) \quad)$$

$$(E) \quad \forall x \forall y (\quad \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y \quad)$$

\rightsquigarrow

Esercizio!!

$$(N) \quad \exists z \forall v (\quad \neg v \in z \quad)$$

\rightsquigarrow

$$\forall v (\quad v \notin \emptyset \quad)$$

$$(W) \quad \forall x \forall y \exists w \forall v (\quad v \in w \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

\rightsquigarrow

$$\forall x \forall y \forall v (\quad v \in w(x,y) \leftrightarrow (v \in x \vee v = y) \quad)$$

$$(L) \quad \forall x \forall y \exists l \forall v (\quad v \in l \leftrightarrow (v \in x \& \neg v = y) \quad)$$

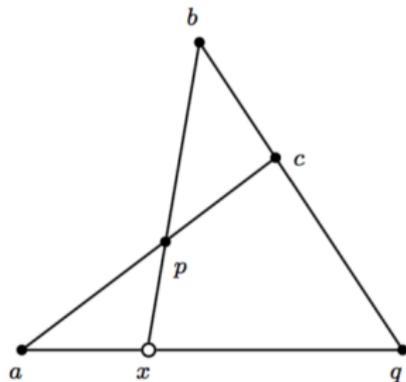
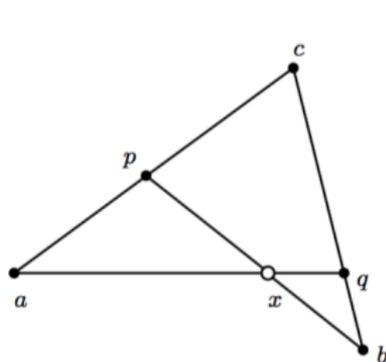
\rightsquigarrow

$$\forall x \forall y \forall v (\quad v \in l(x,y) \leftrightarrow (v \in x \& v \neq y) \quad)$$

$$(R) \quad \forall x \exists a \forall y (\quad y \in x \rightarrow (a \in x \& \neg y \in a) \quad)$$

\rightsquigarrow

$$\forall x \forall y (\quad y \in x \rightarrow (arb(x) \in x \& y \notin arb(x)) \quad)$$



$$B\text{ }apc \ \& \ B\text{ }bqc \ \rightarrow \ \exists x \ (B\text{ }pxb \ \& \ B\text{ }qxa) \quad (\text{IP})$$

$$B\text{ }apc \ \& \ B\text{ }qcb \ \rightarrow \ \exists x \ (B\text{ }axq \ \& \ B\text{ }bpx) \quad (\text{OP})$$



Def.: ESPANSIONE DI HENKIN DELLA FIRMA DI Λ

La firma di Λ sia

\mathcal{C} , \mathcal{F} , \mathcal{R}

Def.: ESPANSIONE DI HENKIN DELLA FIRMA DI \mathcal{L}

La firma di \mathcal{L} sia

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, d.$$

Associamo univocam. a ogni enunciato di \mathcal{L} della forma $\exists x \varphi$ una costante c_φ non appartenente a \mathcal{C} ; poi poniamo:

Def.: ESPANSIONE DI HENKIN DELLA FIRMA DI \mathcal{L}

La firma di \mathcal{L} sia

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, d.$$

Associamo univocam. a ogni enunciato di \mathcal{L} della forma $\exists x \varphi$ una costante c_φ non appartenente a \mathcal{C} ; poi poniamo:

$\hat{\mathcal{L}} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{linguaggio con la firma}$

$$\mathcal{C} \cup \left\{ c_\varphi : \exists x \varphi \text{ enunciato di } \mathcal{L} \right\}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$$

Def.: ESPANSIONE DI HENKIN DELLA FIRMA DI Λ

La firma di Λ sia

$$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R}, d.$$

Associamo univocam. a ogni enunciato di Λ della forma $\exists x \varphi$ una costante c_φ non appartenente a \mathcal{C} ; poi poniamo:

$\hat{\Lambda} \stackrel{\text{Def}}{=} \text{linguaggio con la firma}$

$$\mathcal{C} \cup \left\{ c_\varphi : \exists x \varphi \text{ enunciato di } \Lambda \right\}, \mathcal{F}, \mathcal{R};$$

$\mathcal{E}_\Lambda \stackrel{\text{Def}}{=}$

$$\left\{ \left(\exists x \varphi \Rightarrow \varphi_{c_\varphi}^x \right) : \exists x \varphi \text{ enunciato di } \Lambda \right\}.$$

Supponendo ad es. di avere, in \mathcal{A} :

- in \mathcal{C} la costante 0

- in \mathcal{R} il relatore $=$ (con $d(=) = 2$),

in $\hat{\mathcal{A}}$ troveremo (assieme a infinite altre) due nuove costanti c, k soggette, in $\mathcal{E}_{\hat{\mathcal{A}}}$, alle condizioni

- 1 $(\exists x \neg x = 0) \rightarrow \neg c = 0$

- 2 $(\exists x \exists y \neg(x = 0 \vee y = 0 \vee x = y)) \rightarrow (\exists y \neg(k = 0 \vee y = 0 \vee k = y))$

TEOREMA: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}_\Lambda \vdash_{\hat{\Lambda}} \gamma$, con $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ enunciati di Λ ,
discende $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$

TEOREMA: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{E}_\Lambda \vdash_{\hat{\Lambda}} \gamma$, con $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ enunciati di Λ ,
discende $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$

Dim. “By compactness, we can do with a finite number of elements of \mathcal{E}_Λ . But then the Ghost Premise Theorem permits us to eliminate them one at a time.” [Davis93, pag. 29] \square

Def.: COMPLETAMENTO DI HENKIN

Poniamo:

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &=_{\text{Def}} \Lambda, \\ \Lambda_{i+1} &=_{\text{Def}} \widehat{\Lambda}_i, \\ \mathcal{H}_i &=_{\text{Def}} \mathcal{E}_{\Lambda_0} \cup \dots \cup \mathcal{E}_{\Lambda_i},\end{aligned}$$

per $i = 0, 1, 2, \dots$; da ultimo,

Def.: COMPLETAMENTO DI HENKIN

Poniamo:

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &=_{\text{Def}} \Lambda, \\ \Lambda_{i+1} &=_{\text{Def}} \widehat{\Lambda}_i, \\ \mathcal{H}_i &=_{\text{Def}} \mathcal{E}_{\Lambda_0} \cup \dots \cup \mathcal{E}_{\Lambda_i},\end{aligned}$$

per $i = 0, 1, 2, \dots$; da ultimo,

$$\begin{aligned}\Lambda_\omega &=_{\text{Def}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i, \\ \mathcal{H}_\omega &=_{\text{Def}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_i.\end{aligned}$$

Proseguendo nell'esempio di prima: in \mathcal{L}_2 ci sarà (con ∞ altre) una nuova costante h tale che in $\mathcal{H}_2 (\subseteq \mathcal{H}_\omega)$, siano compresenti le condizioni

$$\textcircled{1} \quad (\exists x \neg x = 0) \rightarrow \neg c = 0$$

$\textcircled{3}$

$$(\exists x \neg(x = 0 \vee c = 0 \vee x = c)) \rightarrow \neg(h = 0 \vee c = 0 \vee h = c)$$

TEOREMA: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{H}_\omega \vdash_{\Lambda_\omega} \gamma$, con $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ enunciati di Λ ,
discende $\mathcal{A} \vdash_\Lambda \gamma$

1

TEOREMA: Da $\mathcal{A} \cup \mathcal{H}_\omega \vdash_{\Lambda_\omega} \gamma$, con $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ enunciati di Λ ,
discende $\mathcal{A} \vdash_{\Lambda} \gamma$

Dim. “By compactness (and the Free Constant Theorem)

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{H}_n \vdash_{\Lambda_n} \gamma$$

for some n . Now, by the previous theorem, we can replace n by $n - 1$. Continuing, we get the result.” [Davis93, pag. 29] \square

¹Il “Free constant theorem” è quello che piú su abbiamo chiamato: “Teorema della costante eliminabile”.

Wir haben oft ein Zeichen nötig, mit dem wir einen sehr zusammengesetzten Sinn verbinden. Dieses Zeichen dient uns sozusagen als Gefäß, in dem wir diesen Sinn mit uns führen können, immer in dem Bewußtsein, daß wir dieses Gefäß öffnen können, wenn wir seines Inhalts bedürfen.

(Gottlob Frege)²



²“Spesso ci occorre associare un qualche significato altamente composito ad un simbolo. Tale simbolo ci serve per così dire da **contenitore**, in cui portarci dietro questo significato, consci sempre che potremmo aprirlo ove ci servisse il suo contenuto.”

Gottlob Frege, Logik in der Mathematik. In G. Frege, Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß herausgegeben von G. Gabriel. Felix Meiner Verlag, Philosophische Bibliothek, Band 277, Hamburg, 1971, 92–165 (the quote is from pp. 101/102).

DEFINIZIONE

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

DEFINIZIONE

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,

DEFINIZIONE

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)

DEFINIZIONE

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,

DEFINIZIONE

Dicesi *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma non vuoto— di relatori .

Jacques Herbrand



DEFINIZIONE

Dicesi —un po' impropriam.— *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma non vuoto— di relatori .



(Jacques Herbrand, 1908–1931)

DEFINIZIONE

Dicesi —un po' impropriam.— *Universo di Herbrand* l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma non vuoto— di relatori .



Fonte: HERBRAND
© Gian. Prof. 2010



DIGRESSIONE SUGLI UNIVERSI DI HERBRAND

DEFINIZIONE

Dicesi —un po' impropriam.— **Universo di Herbrand** l'insieme dei termini chiusi di un linguaggio (pred. del 1^o ord.) dotato di

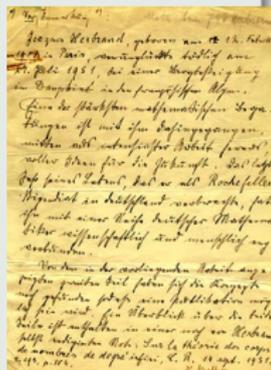
- un insieme *contabile* —o, come caso particolare, finito— di costanti ,
- *almeno una* costante (perché ?)
- un ins. *finito* —o, come caso particolare, vuoto— di funtori ,
- un ins. *finito* —ma non vuoto— di relatori .



EUGENIO G. OMODEO



Jacques HERBRAND (au centre)
au cours de l'excursion où il trouva la mort.



Supponendo ad es. di avere, in \mathcal{A} :

- in \mathcal{C} la costante 0

- in \mathcal{F} il funtore S (con $d(S) = 1$),

nel relativo universo di Herbrand troveremo i 'numerali' (?)

$0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), S(S(S(S(0)))) , \dots$

Supponendo ad es. di avere, in \mathcal{A} :

- in \mathcal{C} la costante 0

- in \mathcal{F} il funtore S (con $d(S) = 1$),

nel relativo universo di Herbrand troveremo i 'numerali' (?)

$0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), S(S(S(S(0)))) , \dots$

ESERCIZIO:

E se in \mathcal{F} avessimo anche l'operatore $+$ (con $d(+) = 2$),
cosa cambierebbe?

DEFINIZIONE:

Un linguaggio (pred. del 1^o ord.) si dice **semplice** se

- ① ha un insieme *contabile* finito o infinito \mathcal{C} di costanti;
- ② ha un insieme *finito* $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ di funtori e relatori



DEFINIZIONE:

Un linguaggio (pred. del 1^o ord.) si dice **semplice** se

- 1 ha un insieme *contabile* finito o infinito \mathcal{C} di costanti;
- 2 ha un insieme *finito* $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ di funtori e relatori



ESERCIZIO:

Mostrare che se \mathcal{L} è semplice, allora i termini chiusi di \mathcal{L}_w formano un universo di Herbrand.



ESERCIZIO:

Mostrare: Tranne che \mathcal{L} abbia \mathcal{C} vuoto, ogni insieme di enunciati atomici di \mathcal{L} induce una struttura interpretativa per \mathcal{L} .





TEOREMA DI COMPLETEZZA (KURT GÖDEL, 1929; LEON HENKIN, 1948; GIBERT HASENJAEGER, 1953)

Al netto dell'uguaglianza (per ora!):

COMPLETEZZA DEL CALCOLO PREDICATIVO DEL 1^o ORDINE

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di \mathcal{L} .

Se γ è vera in ogni modello \mathcal{J} di \mathcal{A} , allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \gamma.$$

TEOREMA DI COMPLETEZZA (KURT GÖDEL, 1929; LEON HENKIN, 1948; GIBERT HASENJAEGER, 1953)

Al netto dell'uguaglianza (per ora!):

COMPLETEZZA DEL CALCOLO PREDICATIVO DEL 1^o ORDINE

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di \mathcal{L} .

Se γ è vera in ogni modello \mathfrak{J} di \mathcal{A} , allora

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \gamma.$$

In breve: Da $\mathcal{A} \models_{\mathcal{L}} \gamma$ discende $\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \gamma$.

TRACCIA DELLA DIM. CHE DA $\mathcal{A} \models_{\wedge} \gamma$ DISCENDE $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \gamma$

Siano \mathcal{L}_{ω} ed \mathcal{H}_{ω} come sopra e sia \mathcal{X} l'insieme di tutti gli enunciati di \mathcal{L}_{ω} della forma

$$\psi_x^x \rightarrow \exists x \psi.$$

TRACCIA DELLA DIM. CHE DA $\mathcal{A} \models_{\wedge} \gamma$ DISCENDE $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \gamma$

Siano Λ_{ω} ed \mathcal{H}_{ω} come sopra e sia \mathcal{X} l'insieme di tutti gli enunciati di Λ_{ω} della forma

$$\psi_x^x \rightarrow \exists x \psi.$$

Partendo con un ipotetico assegnamento q per gli enunciati di Λ_{ω} che inveri $\mathcal{X} \cup \mathcal{H}_{\omega} \cup \mathcal{A}$, mostreremo che $q(\gamma) = \top$.

TRACCIA DELLA DIM. CHE DA $\mathcal{A} \models_{\wedge} \gamma$ DISCENDE $\mathcal{A} \vdash_{\wedge} \gamma$

Siano \mathcal{L}_{ω} ed \mathcal{H}_{ω} come sopra e sia \mathcal{X} l'insieme di tutti gli enunciati di \mathcal{L}_{ω} della forma

$$\psi_x^x \rightarrow \exists x \psi.$$

Partendo con un ipotetico assegnamento q per gli enunciati di \mathcal{L}_{ω} che inveri $\mathcal{X} \cup \mathcal{H}_{\omega} \cup \mathcal{A}$, mostreremo che $q(\gamma) = \top$.

Grazie al teor.-chiave per le logiche booleane, discenderà che

$$\begin{aligned} & \mathcal{X} \cup \mathcal{H}_{\omega} \cup \mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}_{\omega}} \gamma \\ \therefore & \mathcal{H}_{\omega} \cup \mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}_{\omega}} \gamma \\ \therefore & \mathcal{A} \vdash_{\wedge} \gamma, \end{aligned}$$

tenendo conto: (1) che \mathcal{X} è costituito da assiomi;

(2) della conservatività.

□

COME FARE ?





- ① Ricaveremo da q un'interpretazione \mathcal{J} per $\mathcal{L}_\omega \dots$

COME FARE ?



- 0 Ricaveremo da q un'interpretazione \mathcal{I} per \mathcal{L}_ω ...
- 1 ... nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...

COME FARE ?



- 0 Ricaveremo da q un'interpretazione \mathcal{J} per \mathcal{L}_ω ...
- 1 ... nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...
- 2 ... fedele a q nel senso che

$$\text{val}_{\mathcal{J}}(\alpha) = q(\alpha) , \text{ per ogni enunciato } \alpha .$$

COME FARE ?



- 0 Ricaveremo da q un'interpretazione \mathcal{I} per $\mathcal{L}_w \dots$
- 1 \dots nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e \dots
- 2 \dots fedele a q nel senso che
$$\text{val}_{\mathcal{I}}(\alpha) = q(\alpha) , \text{ per ogni enunciato } \alpha .$$
- 3 $\therefore \mathcal{I}$ modella \mathcal{A} ,

COME FARE ?



- 0 Ricaveremo da q un'interpretazione \mathcal{I} per $\mathcal{L}_w \dots$
- 1 \dots nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e \dots
- 2 \dots fedele a q nel senso che
$$\text{val}_{\mathcal{I}}(\alpha) = q(\alpha) , \text{ per ogni enunciato } \alpha .$$
- 3 $\therefore \mathcal{I}$ modella \mathcal{A} ,
- 4 $\therefore \text{val}_{\mathcal{I}}(\gamma) = v$,



- 0 Ricaveremo da q un'interpretazione \mathcal{I} per \mathcal{L}_ω ...
- 1 ... nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...
- 2 ... fedele a q nel senso che

$$\text{val}_{\mathcal{I}}(\alpha) = q(\alpha), \text{ per ogni enunciato } \alpha.$$

- 3 $\therefore \mathcal{I}$ modella \mathcal{A} ,
- 4 $\therefore \text{val}_{\mathcal{I}}(\gamma) = \mathbb{v}$,
- 5 $\therefore q(\gamma) = \mathbb{v}$.



- 0 Ricaveremo da q un'interpretazione \mathcal{I} per \mathcal{L}_ω ...
- 1 ... nella quale i termini chiusi siano 'autonimi' e...
- 2 ... *fedele a q* nel senso che

$\text{val}_{\mathcal{I}}(\alpha) = q(\alpha)$, per ogni enunciato α .
- 3 $\therefore \mathcal{I}$ modella \mathcal{A} ,
- 4 $\therefore \text{val}_{\mathcal{I}}(\gamma) = \mathbb{v}$,
- 5 $\therefore q(\gamma) = \mathbb{v}$.

Per dimostrare il punto piú impegnativo, che è il 2, procederemo per induzione sul numero di occorrenze dei simboli di implicazione e di quantificazione esistenziale entro α .

DOMINIO (non vuoto):

DOMINIO (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di \mathcal{L}_w ;

COSTITUZIONE DELLA STRUTTURA \mathfrak{J}

DOMINIO (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di \mathcal{L}_w ;

INTERPRETAZ. COSTANTI: per ogni costante c di \mathcal{L}_w ,³

$$c^{\mathfrak{J}} =_{\text{Def}} c ;$$

³ c può appartenere a \mathcal{C} o essere una cost. di Henkin.

COSTITUZIONE DELLA STRUTTURA \mathfrak{J}

DOMINIO (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di \mathcal{L}_ω ;

INTERPRETAZ. COSTANTI: per ogni costante c di \mathcal{L}_ω ,

$$c^{\mathfrak{J}} =_{\text{Def}} c ;$$

INTERPRETAZ. FUNTORI: per ogni g in \mathcal{F} ,

$$\underbrace{(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)})}_{\text{t. chiusi}} \xrightarrow{g^{\mathfrak{J}}} g(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)}) ;$$

COSTITUZIONE DELLA STRUTTURA \mathfrak{J}

DOMINIO (non vuoto): L'insieme dei termini chiusi di \mathcal{L}_ω ;

INTERPRETAZ. COSTANTI: per ogni costante c di \mathcal{L}_ω ,

$$c^{\mathfrak{J}} =_{\text{Def}} c ;$$

INTERPRETAZ. FUNTORI: per ogni g in \mathcal{F} ,

$$\underbrace{(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)})}_{\text{t. chiusi}} \xrightarrow{g^{\mathfrak{J}}} g(\tau_1, \dots, \tau_{d(g)}) ;$$

INTERPRETAZ. RELATORI: per ogni r in \mathcal{R} ,

$$r^{\mathfrak{J}}(\underbrace{\tau_1, \dots, \tau_{d(r)}}_{\text{t. chiusi}}) = q(r(\tau_1, \dots, \tau_{d(r)})) .$$

AUTONOMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio
(induttivam.);

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio
(induttivam.);

PRESERVAZ.⁴ VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

⁴intesa come *fedeltà a q*

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio
(induttivam.);

PRESERVAZ.⁴ VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\begin{aligned} \text{val}_{\mathfrak{J}}(\alpha \rightarrow \beta) &= \text{val}_{\mathfrak{J}}(\alpha) \rightarrow \text{val}_{\mathfrak{J}}(\beta) \\ &= q(\alpha) \rightarrow q(\beta) = q(\alpha \rightarrow \beta); \end{aligned}$$

⁴intesa come *fedeltà a q*

AUTONIMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio
(induttivam.);

PRESERVAZ.⁴ VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\begin{aligned} \text{val}_{\mathfrak{J}}(\alpha \rightarrow \beta) &= \text{val}_{\mathfrak{J}}(\alpha) \rightarrow \text{val}_{\mathfrak{J}}(\beta) \\ &= q(\alpha) \rightarrow q(\beta) = q(\alpha \rightarrow \beta); \end{aligned}$$

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists x \psi$: Se $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\exists x \psi) = v$,
allora $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\psi_{\tau}^x) = v = q(\psi_{\tau}^x)$ per qualche
t. chiuso τ e,

⁴intesa come *fedeltà a q*

AUTONOMIA: ogni termine designa se stesso — ovvio
(induttivam.);

PRESERVAZ.⁴ VALORE ENUNCIATI ATOMICI: ovvia ;

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\alpha \rightarrow \beta$:

$$\begin{aligned} \text{val}_{\mathfrak{J}}(\alpha \rightarrow \beta) &= \text{val}_{\mathfrak{J}}(\alpha) \rightarrow \text{val}_{\mathfrak{J}}(\beta) \\ &= q(\alpha) \rightarrow q(\beta) = q(\alpha \rightarrow \beta); \end{aligned}$$

PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists x \psi$: Se $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\exists x \psi) = v$,
allora $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\psi_{\tau}^x) = v = q(\psi_{\tau}^x)$ per qualche
t. chiuso τ e, dato che $\psi_{\tau}^x \rightarrow \exists x \psi$ sta in \mathcal{X} ,

$$q(\psi_{\tau}^x \rightarrow \exists x \psi) = v = q(\exists x \psi).$$



⁴intesa come *fedeltà a q*



PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists x \psi$: (cont.)

Se $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\exists x \psi) = \mathbf{f}$, allora $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\psi_{\tau}^x) = \mathbf{f} = q(\psi_{\tau}^x)$
per ogni t. chiuso τ e,





PRESERVAZ. VALORE ENUNCIATI $\exists x \psi$: (cont.)

Se $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\exists x \psi) = \mathbf{f}$, allora $\text{val}_{\mathfrak{J}}(\psi_{\tau}^x) = \mathbf{f} = q(\psi_{\tau}^x)$
 per ogni t. chiuso τ e, dato che $\exists x \psi \rightarrow \psi_{c_{\psi}}^x$ sta in
 \mathcal{H}_{ω} ,

$$\begin{aligned} q(\exists x \psi \rightarrow \psi_{c_{\psi}}^x) &= \mathbf{v}, \\ q(\psi_{c_{\psi}}^x) &= \mathbf{f} = q(\exists x \psi). \end{aligned}$$





TEOREMA DI CORRETTEZZA ('SOUNDNESS')

CORRETTEZZA DEL CALCOLO PREDICATIVO DEL 1^o ORDINE

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di \mathcal{L} .

Se

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \gamma,$$

allora γ è vera in ogni modello \mathcal{J} di \mathcal{A} .

(Vedi [Davis93, pagg. 31–32])

TEOREMA DI CORRETTEZZA ('SOUNDNESS')

CORRETTEZZA DEL CALCOLO PREDICATIVO DEL 1^o ORDINE

Sia $\mathcal{A} \cup \{\gamma\}$ un insieme di enunciati di \mathcal{L} .

Se

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \gamma,$$

allora γ è vera in ogni modello \mathcal{J} di \mathcal{A} .

In breve: Da $\mathcal{A} \vdash_{\mathcal{L}} \gamma$ discende $\mathcal{A} \models_{\mathcal{L}} \gamma$.

(Vedi [Davis93, pagg. 31–32])



Martin Davis.

Lecture Notes in Logic.

Courant Institute of Mathematical Sciences,
New York University, 1993.

