SIMMETRIA DI LORENTZ E TEORIA DEI CAMPI

MECCANICA QUANTISTICA $\Big\}$ Lo spin (di un elettrone) è una caratteristica fondamentale, ma qual'è la sua origine?

$\Rightarrow$ L'INVARIANZA DI LORENTZ, e quindi la teoria dei campi con il suo formalismo Lorentz-covariante, ci fornisce la connessione profonda con lo spin.

RAPPRESENTAZIONI UNITARIE DEL GRUPPO DI POINCARÉ [5.8.1]

La teoria deve essere invariante sotto:

- traslazioni : $\varphi(x) \to \varphi(x+a)$, $\forall$ a^ν = const
- rotazioni + boost : invarianza di Lorentz $x_\mu \to \Lambda_\mu^{\ \nu} x_\nu$

$\Rightarrow$ traslazioni $\oplus$ Lorentz = GRUPPO DI POINCARÉ $ISO(1,3)$

(isometrie di Minkowski)

Diverse particelle hanno massa, momento, indici di spin, ma anche altri numeri quantici.

Sotto Poincaré solamente il momento e le proiezione di spin devono cambiare, ma non il resto.

$\Rightarrow$ Una PARTICELLA può essere definita come il set di stati che si mischiano tra loro sotto trasf. di Poincaré:

$$|\psi\rangle \to P|\psi\rangle$$

- per esempio per un campo scalare φ,

I valori del campo in tutti i punti "x", $\varphi(x)$ forma una rappresentazione.

Sotto traslazioni $\varphi(x) \to \varphi(x+a)$

In generale, per ogni rappresentazione possiamo fissare una BASE DI STATI $|\psi_i\rangle$:

$$|\psi_i\rangle \to P_{ij}|\psi_j\rangle \quad , \quad P \in ISO(1,3)$$

P_{ij} è una RAPPRESENTAZIONE del gruppo.

L'indice i può essere discreto (e.g. spin) o continuo (e.g. momento) e la rapp. può essere finito- o infinito-dimensionale.

Se non c'è un sottoinsieme degli stati $\{|\psi_i\rangle\}$ che trasforma solo al suo interno, la rapp. è IRRIDUCIBILE

Vogliamo anche che la rappresentazione sia UNITARIA.

Un elemento di matrice $M_{if} \sim {}_{out}\langle\psi|\psi\rangle_{in}$

deve essere invariante di Poincaré :

$$M_{if} \to {}_{out}\langle\psi|P^\dagger P|\psi\rangle_{in} \equiv {}_{out}\langle\psi|P^\dagger P|\psi\rangle_{in} \Rightarrow \boxed{P^\dagger P = 1}$$

DEFINIZIONE DI UNA PARTICELLA:

PARTICELLE trasformano sotto RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILE e UNITARIA del gruppo di Poincaré

Tensori costanti tipo φ (scalare), V_μ (vettore), $T_{\mu\nu}$, ...
sono rappresentazioni finito-dimensionali, ma non unitarie.

e.g. vettore:

$$|\psi\rangle = c_0 |V_0\rangle + c_1 |V_1\rangle + c_2 |V_2\rangle + c_3 |V_3\rangle$$

la norma dovrebbe essere

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{3} |c_i|^2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{Non Lorentz-invariante}$$

In termini dei boost: $\Lambda^\dagger \neq \Lambda^{-1}$ → NON UNITARIA.

Potremmo modificare la norma:

$$\langle\psi|\psi\rangle \equiv |c_0|^2 - |c_1|^2 - |c_2|^2 - |c_3|^2$$

← Non è strettamente positiva.

⇒ genera probabilità anche > 1 → inconsistente.

Per i campi di spin-1 vedremo come si risolve questo problema.

> RAPPRESENTAZIONI IRRIDUCIBILI E UNITARIE DEL GRUPPO DI POINCARÉ SONO INFINITO-DIMENSIONALI

Conseguenza del fatto che $ISO(1,3)$ è non-compatto.
Particelle hanno momento "p", variabile continua.

CLASSIFICAZIONE DI WIGNER ('39)

Tutte le rapp. irred. del gruppo di Poincaré sono classificate dagli autovalori dei due INVARIANTI DI CASIMIR DEL GRUPPO:

massa $\quad m^2 = C_1 = P^\mu P_\mu$

spin $\quad C_2 = W^\mu W_\mu = -m^2 J(J+1)$

P_μ: momento

W_μ: pseudo-vettore di Pauli-Lubanski

$W_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma$

$m \geq 0 \quad \& \quad J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

- Se $J > 0$ & $m > 0$ $\rightarrow$ ci sono $2J+1$ stati indipendenti
- Se $J > 0$ & $m = 0$ $\rightarrow$ solo 2 stati di polarizzazione.
- Se $J = 0$ $\rightarrow$ 1 solo stato per ogni m.

Un problema:

Per scrivere una Lagrangiana Lorentz-invariante per un campo di spin-1 lo descriviamo come un vettore $V_\mu(x)$.
Ma un campo di spin-1 ha 3 d.o.f. se $m > 0$, 2 se $m = 0$, d'altro canto V_μ ha 4 elementi.
Questo mismatch è l'origine della ridondanza che sta alla base dell'invarianza di gauge.

RICHIAMI DI TEORIA DEI GRUPPI

- Un **GRUPPO** G è un insieme di elementi $\{g_i\}$ e un'operazione "$\circ$"
  - $\forall\, g_i, g_j \in G \qquad g_i \circ g_j = g_k \in G$ — CHIUSURA
  - $\forall\, g_i, g_j, g_k \in G \qquad (g_i \circ g_j) \circ g_k = g_i \circ (g_j \circ g_k)$ — ASSOCIATIVITÀ
  - $\exists\; e : \quad e \circ g = g \circ e = g \quad \forall\, g \in G$ — IDENTITÀ
  - $\forall\, g \;\exists\; g^{-1} : \quad g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ — INVERSO

Un **GRUPPO DI LIE** è un gruppo con un numero infinito di elementi che possono essere caratterizzati da parametri che variano in maniera continua

- Una **RAPPRESENTAZIONE** è un insieme di matrici in corrispondenza 1 a 1 con gli elementi del gruppo

$$g \to D(g)$$

e che soddisfa la stessa legge di moltiplicazione.
Se la matrice è $n \times n \to n$ è la dimensione della rapp.
Queste matrici agiscono su uno SPAZIO VETTORIALE V.

$$\forall\; v \in V \qquad v \xrightarrow{g} v_g = D(g)\, v$$

[o anche $v_g = D(g)\, v\, D(g)^{-1}$ se v è una matrice]

A representation is **REDUCIBLE** if there is a subspace $U \subset V$, $U \neq V$ such that $\forall\, u \in U \to D(g)\, u \in U$.
If not, it is **IRREDUCIBLE** (IRREP).

ALGEBRA DI LIE

The Lie algebra $\mathcal{G}$ of a Lie group G consists of all infinitesimal displacements away from the identity.

Near the identity e : $g = e + i\alpha_i t_i$ → GENERATORS OF G

infinitesimal parameters

for finite transf. $\Rightarrow$ $g = \exp(i\alpha_i t_i)$

The number of generators (dimension of the vector space $\mathcal{G}$) is equal to the number of independent parameters that are required to define an element of G. N^2-1 for $SU(N)$, $\frac{1}{2}N(N-1)$ for $SO(N)$.

DIMENSION OF A LIE GROUP = NUMBER OF ITS INDEP. GENERATORS

The commutation relations define the Lie algebra $\mathcal{G}$

$$[T_a, T_b] = \sum_{k=1}^{n} f_{ab}^{c} \, T_c \qquad f_{ab}^{c} \text{ : STRUCTURE CONSTANTS}$$

$$f_{ab}^{c} = -f_{ba}^{c}$$

Must satisfy the Jacobi identity:

$$[T_a,[T_b,T_c]] + [T_c,[T_a,T_b]] + [T_b,[T_c,T_a]] = 0$$

The generators can be defined in terms of representation matrices close to the identity.

$$D(g(\theta)) = I - i\theta^a t^a + O(\theta^2)$$

ADJOINT REPRESENTATION

$$[T_a, T_b] = i f_{ab}^{c} T_c$$

The matrices $\left(T_A^{ad}\right)^{C}{}_{B} = f_{AB}^{C}$ form a representation for the Lie Algebra

Rappresentazioni del gruppo di Lorentz $SO(1,3)$ [5.10.1]

Il gruppo di Lorentz è l'insieme di rotazioni e boost che lasciano invariata la metrica di Minkowski:

$$\Lambda^T g \Lambda = g \quad , \quad g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

Nella rappresentazione dei 4-vettori $V_\mu \to \Lambda_{\mu\nu} V_\nu$

Estraiamo l'algebra di Lie del gruppo a partire da questa rapp. Studiamo trasformazioni infinitesime: $V_\mu \to V_\mu + \delta V_\mu$

$$\delta V_0 = \beta_i V_i \qquad \delta V_i = \beta_i V_0 - \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\varepsilon_{123}=+1} \theta_j V_k$$

β_i : boost
θ_i : rotazioni

Ovvero:

$$\delta V_\mu = i \sum_{i=1}^{3} \left(\theta_i (J_i)_{\mu\nu} + \beta_i (K_i)_{\mu\nu} \right) V_\nu$$

generatori dell'algebra di Lorentz

$$J_1 = i\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = i\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 1 \\ & & 0 & \\ & -1 & & 0 \end{pmatrix}, \; J_3 = i\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

$$K_1 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \; K_2 = i\begin{pmatrix} 0 & & -1 & \\ & 0 & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \; K_3 = i\begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ -1 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soddisfano:

Lorentz algebra $so(1,3)$

$$\begin{cases} [J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k \quad \} \text{ algebra delle rotazioni } SO(3) \\ [J_i, K_j] = i\,\varepsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] = -i\,\varepsilon_{ijk} J_k \end{cases}$$

Per trasformazioni finite: $\Lambda = \exp(i\theta_i J_i + i\beta_i K_i)$

I generatori J_i sono Hermitiani: $J_i^+ = J_i$, ma $K_i^+ = -K_i$

anti-Hermitian

$\Rightarrow$ Le rappresentazioni Λ finito-dimensionali costruite in questo modo NON SONO UNITARIE: $\Lambda^{-1} \neq \Lambda^+$

$\Rightarrow$ La base della nostra irrep unitaria deve dipendere da p (o x) e quindi è infinito-dimensionale:

- per spin-1 abbiamo le tre polarizzazioni $\varepsilon_\mu^i(p)$

- Una rappresentazione infinito-dimensionale è quella che agisce su funzioni:

Generatori: $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$ $\rightarrow$ Momento angolare generalizzato ai boost

I generatori dell'algebra di Lorentz generano solamente elementi del gruppo di Lorentz connessi in maniera continua con l'identità:

$SO^+(1,3)$: proper orthochronous

La parità $P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ e inversione temporale $T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ [nella rapp dei 4-vettori] $P, T \in SO(1,3)$ ma non sono connessi con $\mathbb{1}$

$so(1,3) \rightarrow SO^+(1,3)$ proper orthochronous - o "gruppo ristretto"

$so(1,3) \otimes P \rightarrow O^+(1,3)$ orthochronous

$g \in SO(1,3)$: $\det(g) = 1 \rightarrow$ proper $\qquad \det(P) = \det(T) = -1$

Per costruire irrep del gruppo di Lorentz possiamo usare quello che già sappiamo sulle irrep di $SU(2)$.

Definiamo: $J_i^+ = \frac{1}{2}(J_i + i K_i)$; $J_i^- = \frac{1}{2}(J_i - i K_i)$

Soddisfano l'algebra
$$\begin{cases} [J_i^+, J_j^+] = i \varepsilon_{ijk} J_k^+ \\ [J_i^-, J_j^-] = i \varepsilon_{ijk} J_k^- \\ [J_i^+, J_k^-] = 0 \end{cases}$$
} due sub-algebre che commutano fra loro

↓

$$so(1,3) = su(2)_L \oplus su(2)_R$$

→ Le irrep del gruppo di Lorentz si possono determinare dalle rappresentazioni di $su(2) = so(3)$ [Rotazioni in 3D]

⇒ specificate da un numero semi-intero

$$j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots$$

⇒ agisce su uno spazio vettoriale di dim $= (2j+1)$

Irrep. del gruppo di Lorentz è descritta da due numeri → (A, B) $\quad A, B = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$

$$(2A+1)\cdot(2B+1) \text{ degrees of freedom}$$

Il generatore delle rotazioni è $\vec{J} = \vec{J}^+ + \vec{J}^-$ (sommati vettorialmente: Clebsh-Gordan)

$su(2) \oplus su(2)$	$(0,0)$	$(\frac{1}{2},0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
$SO(3)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1 \oplus 0$	1	1	$2 \oplus 1 \oplus 0$
	scalare	spinore	spinore	vettore, scalare			

Le rappresentazioni TENSORIALI

$T_{\mu_1,\dots,\mu_n}$ corrispondono a $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$

Sono rapp. IRRIDUCIBILI di LORENTZ,

ma sono RIDUCIBILI sotto il sottogruppo $SO(3)$ delle rotazioni 3D $\to$ descrive lo SPIN.

Esempio: $A_\mu \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \underset{\text{vettore}}{1} \oplus \underset{\text{scalare.}}{0}$

Queste inducono le rappresentazioni di Poincaré.

Infatti:

Per un campo con spin to abbiamo i vettori di polarizzazione $\left(\varepsilon^i_\mu(p) \text{ o } u^\alpha_r(p),\ v^\alpha_r(p) \right)$ che dipendono da p: irrep. infinito-dimensionale.

1) Fissiamo un dato p^μ.

2) La irrep. di Poincaré è INDOTTA dal sottogruppo che lascia invariato p^μ: GRUPPO PICCOLO.
Il gruppo piccolo ha irrep. finito-dimensionali.

3) Applicando poi una trasf. di Lorentz possiamo ottenere la rapp. per p^μ generico.

CASO $m \neq 0$

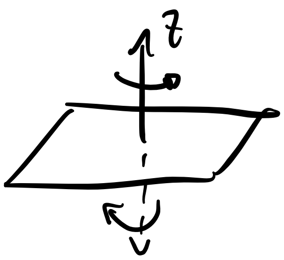
$p^\mu = (m,0,0,0) \rightarrow$ GRUPPO PICCOLO $= SO(3) \rightarrow$ rotazioni spaziali

$SO(3)$ ha irrep di spin J con $2J+1$ d.o.f.

$J=1 \rightarrow$ d.o.f. $=3$

CASO $m=0$

$p^\mu = (E,0,0,E) \rightarrow$ GRUPPO PICCOLO $= ISO(2)$ isometrie del piano Euclideo 2D



$\rightarrow$ solo 2 d.o.f. per ogni spin J

$\downarrow$

rot. LH o RH

VETTORI MASSIVI

[S.8.2.2]

Vogliamo descrivere una particella con: $\begin{cases} m>0 \\ \text{spin } J=1 \end{cases}$

Il tensore più piccolo che contiene un vettore è $A_\mu \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 \oplus 0$

$\Rightarrow$ Contiene anche uno scalare, che dobbiamo eliminare.

Scriviamo la Lagrangiana Lorentz-invariante più generale:

$$\mathcal{L} = \frac{a}{2} A_\mu \Box A_\mu + \frac{b}{2} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 \quad , \quad a,b \in \mathbb{R}$$

- Il termine $(\partial_\nu A_\nu)$, per essere Lorentz-invariante, obbliga A_ν a trasformare come ∂_ν, ovvero $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. ✓

- Equazione del moto:

$$a \Box A_\mu + b\, \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + m^2 A_\mu = 0 \quad \leftarrow \text{Applichiamo } \partial_\mu$$

$$\left[(a+b)\Box + m^2\right](\partial_\mu A_\mu) = 0 .$$

Per $a=-b$ otteniamo il <u>VINCOLO</u> $\boxed{(\partial_\mu A_\mu) = 0}$

$\Rightarrow$ RIMUOVE 1 grado di libertà.
Facendolo in maniera Lorentz-invariante deve essere necessariamente lo scalare

Lagrangiana di Proca

Prendiamo $a = -b = 1$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A_\mu \Box A_\mu - \frac{1}{2} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 =$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 \qquad \text{con} \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Eq. del moto: $\begin{cases} \partial_\mu A_\mu = 0 \\ (\Box + m^2) A_\mu = 0 \end{cases}$

Soluzione: $A_\mu(x) = \sum_i \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \tilde{a}_i(\vec{p})\, \underbrace{\varepsilon^i_\mu(p)}_{\text{POLARIZZAZIONI}}\, e^{ipx}$ $\qquad p_0 = \omega_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$

$\partial_\mu A_\mu = 0 \rightarrow \boxed{p_\mu \varepsilon^i_\mu(p) = 0} \Rightarrow$ Rimangono 3 polarizzazioni indipendenti

Fissiamo $\varepsilon^+_\mu \varepsilon_\mu = -1 \rightarrow$ normalizzazione.

Prendiamo $p^\mu = (E, 0, 0, p_z)$, $E^2 - p_z^2 = m^2$

POLARIZZAZIONI TRASVERSE $\qquad$ LONGITUDINALE

$\varepsilon^\mu_1 = (0, 1, 0, 0)$, $\varepsilon^\mu_2 = (0, 0, 1, 0)$, $\qquad \varepsilon^\mu_L = \left(\frac{p_z}{m}, 0, 0, \frac{E}{m}\right)$

Applicando Lorentz possiamo ottenerle per qualsiasi p^μ.

$\Rightarrow \varepsilon^\mu_i(p)$ genera la rapp. irriducibile di Poincaré infinito-dimensionale.

VETTORI SPIN-1 SENZA MASSA [S.8.2.3]

$A_\mu \sim \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $J=1$, $m=0$ $\to$ 2 d.o.f.

$A_\mu(x)$ ha 4 componenti $\to$ 2 sono ridondanti

Partiamo da: $\mathcal{L}^{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ $\quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$\mathcal{L}$ è invariante sotto $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$ INVARIANZA DI GAUGE

$\Rightarrow$ I campi A_μ e $A_\mu + \partial_\mu \alpha$ sono EQUIVALENTI

Questa invarianza permette di rimuovere gradi di libertà ridondanti scegliendo opportunamente la gauge (GAUGE FIXING).

e.g. LORENTZ GAUGE

$\partial^\mu A_\mu \to \partial^\mu A_\mu + \Box\alpha$ $\Rightarrow$ Scegliamo $\Box\alpha$: $\boxed{\partial^\mu A_\mu = 0}$

Espandendo $\quad A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \tilde{a}_i(p)\, \varepsilon^i_\mu(p)\, e^{ipx}$ (classico)

$$\partial^\mu A_\mu = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \tilde{a}_i(p)\, p^\mu \varepsilon^i_\mu(p)\, e^{ipx} = 0 \Rightarrow \quad p^\mu \varepsilon^i_\mu(p) = 0$$

Fissiamo $\quad p_\mu = (E,0,0,E)$

$p^\mu \varepsilon_\mu = 0$
$\Rightarrow$ 3 soluzioni

$$\begin{cases} \varepsilon^1_\mu = (0,1,0,0) \\ \varepsilon^2_\mu = (0,0,1,0) \\ \varepsilon^F_\mu = (1,0,0,1) \end{cases}$$

$\varepsilon^1_\mu, \varepsilon^2_\mu$: polarizzazioni trasverse

ε^F_μ: polarizzazione longitudinale

Ma ε^F_μ non corrisponde a stati fisici: $\varepsilon_\mu \propto p_\mu$ imponiamo

Ovvero $\quad A_\mu(x) = C\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, p_\mu\, e^{ipx} = \partial_\mu \varphi(x) \xrightarrow{\text{gauge}} \partial_\mu \varphi + \partial_\mu \alpha = 0$

Questa configurazione è equivalente a $A_\mu = 0$ (pura gauge)

SPINORI [S.10.2, P.S.3.2]

Le irrep $\left(\frac{1}{2},0\right)$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ descrivono oggetti di spin $j=\frac{1}{2}$ e con $(2j+1)=2$ gradi di libertà.

$\left(\frac{1}{2},0\right) \sim \psi_L$ e $\left(0,\frac{1}{2}\right) \sim \psi_R$

Spinori di Weyl left e right-handed

I generatori di Lorentz in queste irrep devono essere matrici 2x2 con queste regole di commutazione:

$[J_i^+, J_j^+] = i\varepsilon_{ijk} J_k^+$
$[J_i^-, J_j^-] = i\varepsilon_{ijk} J_k^-$
$[J_i^+, J_k^-] = 0$

Matrici di Pauli: $\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2}\right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{\sigma_k}{2}$

$\psi_L \sim \left(\frac{1}{2},0\right)$: $\vec{J}^- = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\vec{J}^+ = 0$ $\quad \vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \vec{K} = \frac{i}{2}\vec{\sigma}$

$\Leftrightarrow$

$\psi_R \sim \left(0,\frac{1}{2}\right)$: $\vec{J}^- = 0$, $\vec{J}^+ = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ $\quad \vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad \vec{K} = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}$

Dato che $\vec{\sigma}^+ = \vec{\sigma}$, i generatori tra le due irrep son uni gli aggiunti degli altri. ψ_L e ψ_R sono irrep CONIUGATE.

$\Rightarrow$ Sotto Lorentz $\quad \psi_{R,L} \to e^{\frac{1}{2}(i\vartheta_j\sigma_j \pm \beta_j\sigma_j)}\, \psi_{R,L}$

$$\delta\psi_{R,L} = \frac{1}{2}(i\vartheta_j \pm \beta_j)\sigma_j\psi_{R,L}, \qquad \delta\psi^+_{R,L} = \frac{1}{2}(-i\vartheta_j \pm \beta_j)\psi^+_{R,L}\sigma_j \qquad (*)$$

NOTA: Prendiamo una rotazione di 2π, $\vartheta_z = 2\pi$.

Si ha: $\quad \psi_{R,L} \to e^{\frac{1}{2}i2\pi\sigma_3}\,\psi_{R,L} = -\psi_{R,L}$!

Gli spinori CAMBIANO SEGNO sotto rotazioni di 2π.

$\Rightarrow$ questa proprietà è all'origine del teorema di spin-statistica

Per approfondire vedi, e.g. [S.10.5]

⇒ I generatori dei boost $\vec{K}$ sono anti-Hermitiani quindi le trasformazioni di Lorentz associate a questa irrep finito dimensionale NON SONO UNITARI:

$$\Lambda^{-1} \neq \Lambda^{\dagger} \iff \Lambda^{\dagger}\Lambda \neq \mathbb{1}$$

⇒ Dobbiamo introdurre irrep di Poincaré INFINITO-DIMENSIONALI, ovvero i CAMPI SPINORIALI

$$\psi_L(x) \quad e \quad \psi_R(x).$$

Lagrangiana per SPINORI DI WEYL

$$\mathcal{L}_{weyl} = i\psi_R^{\dagger}\sigma_\mu\partial_\mu\psi_R + i\psi_L^{\dagger}\bar{\sigma}_\mu\partial_\mu\psi_L - m\left(\psi_R^{\dagger}\psi_L + \psi_L^{\dagger}\psi_R\right)$$

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma}) \qquad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$$

⇒ La massa mescola (e accoppia) ψ_L e ψ_R.

ESERCIZIO: Verificare che tutti i termini in $\mathcal{L}_{weyl}$ sono Lorentz-invarianti date le trasformazioni in (*)
Hint: provare che $\psi_{R,L}^{\dagger}\sigma_\mu\psi_{R,L}$ trasforma come un 4-vettore.

Lo spinore di Dirac è dato da

$$\psi = \psi_L \oplus \psi_R = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right) \oplus \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \qquad \psi^\dagger = (\psi_L^\dagger, \psi_R^\dagger)$$

$$\bar{\psi} \overset{def}{=} (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger)$$

Definiamo $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$ Matrici di Dirac (o matrici γ)

$$\boxed{\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}} \qquad \boxed{\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0}$$

La Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \xrightarrow{e.o.m} (i\not{\partial} - m)\psi = 0$$

Equazione di Dirac

> **Esercizio**
> Controlla che $\mathcal{L}_{Dirac} = \mathcal{L}_{Weyl}$

[S.11.1, eq(11.10)]

Definiamo

CHIRALITÀ
$$\begin{cases} \gamma_5 \psi_L = -\psi_L \\ \gamma_5 \psi_R = +\psi_R \end{cases}$$
autostati

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 \qquad \gamma_5^2 = \mathbb{1}$$

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R^2 = P_R \qquad P_L^2 = P_L \qquad P_L P_R = 0$$

$$P_R \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \qquad P_L \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eq. di Dirac:

$$\begin{cases} \sigma^\mu p_\mu \psi_R = (E - \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_R = m\psi_L \\ \bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi_L = (E + \vec{\sigma}\cdot\vec{p})\psi_L = m\psi_R \end{cases}$$

1. la massa m mescola ψ_L e ψ_R
2. Per $m=0$, gli spinori sono autovettori di ELICITÁ

$$\hat{h} = \frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{\hat{\sigma}\cdot\vec{p}}{\sigma} \qquad \begin{cases} \hat{h}\,\psi_R\big|_{m=0} = +\frac{1}{2}\psi_R \\ \hat{h}\,\psi_L\big|_{m=0} = -\frac{1}{2}\psi_L \end{cases}$$

SOLUTIONS OF THE DIRAC EQUATION (richiami) [S.11.2] [P.S.3.3]

$$(i\not{\partial}-m)\psi(x) = 0$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_p}}\left(a_p^s\, u_s(p)\, e^{-ipx} + b_p^{s*}\, v_s(p)\, e^{+ipx}\right)$$

Con
$$\begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} u_s(p) = 0 \quad \& \quad \begin{pmatrix} -m & -p\cdot\sigma \\ -p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} v_s(p) = 0$$

La soluzione per $u_s(p)$ e $v_s(p)$ si trova partendo da un sistema di riferimento con p^μ fisso (e.g. $p^\mu=(m,0,0,0)$) e studiare le trasf. di Lorentz che lasciano p^μ invariato
⇒ GRUPPO PICCOLO. Poi si fa un boost per p^μ generici

la soluzione e^-
$$\Rightarrow u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \xi_s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\ \xi_s \end{pmatrix} \qquad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\ \eta_s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\ \eta_s \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \xi_1 = \eta_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \xi_2 = \eta_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{matrix}$$

Normalizzati come:
$$\bar{u}_s(p)\, u_{s'}(p) = -\,\bar{v}_s(p)\, v_{s'}(p) = 2m\,\delta_{ss'}$$

Prodotto esterno:
$$\sum_{s=1}^{2} u_s(p)\,\bar{u}_s(p) = \not{p}+m \qquad \sum_{s=1}^{2} v_s(p)\,\bar{v}_s(p) = \not{p}-m$$

ESERCIZIO: verificare queste relazioni.