Integrale sui cammini [S.14.5]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + J_\mu A^\mu \qquad J_\mu : \text{corrente}$$

C.o.m nello spazio dei momenti:

$$(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) A_\nu(k) = J_\mu$$

$\Rightarrow$ Non possiamo invertirlo perché $\det(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) = 0$

Ha un autovettore k_ν con autovalore 0 : $(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) k_\nu = 0$

Ovvero: non possiamo risolvere per A_μ in termine di J_μ perché abbiamo una ridondanza $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$. Molti vettori A_μ corrispondono alla stessa corrente J_μ.

La soluzione è rimuovere la ridondanza

FISSANDO LA GAUGE aggiungendo $\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2$

$\Rightarrow$ Elementi di matrice di operatori gauge-invarianti sono indipendenti da ξ.

$$\langle 0 | T\{ \mathcal{O}(x_1 \ldots x_n) \} | 0 \rangle = \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* \, e^{i \int d^4x \, \mathcal{L}[A,\varphi]} \, \mathcal{O}(x_1, \ldots, x_n)$$

Vogliamo fattorizzare dall'integrale sui cammini la parte di gauge $(\pi(x))$ in $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \pi(x)$

Metodo di Faddeev & Popov

L'obiettivo sarà avere $\partial_\mu A_\mu = 0$:

$\partial_\mu A_\mu \to \partial_\mu A_\mu + \Box\alpha \Rightarrow$ scegliamo $\alpha = \frac{1}{\Box}\partial_\mu A_\mu$

Consideriamo
$$f(\xi) \equiv \int D\pi \, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\Box\pi)^2}$$

Facciamo un cambio di variabili: è solo una traslazione

$$\pi(x) \to \pi(x) - \alpha(x) = \pi(x) - \frac{1}{\Box}\partial_\mu A_\mu \,; \qquad D\pi \to D\pi$$

$$f(\xi) = \int D\pi \, e^{-i\int d^4x \frac{1}{2\xi}(\Box\pi - \partial_\mu A_\mu)^2} \leftarrow \text{è } \underline{\text{indipendente}} \text{ da } A_\mu \text{ come la } f(\xi) \text{ iniziale}$$

Moltiplichiamo e dividiamo l'integrale sui cammini per $f(\xi)$:

operatore gauge-invariante

$$\langle 0|T_h\, O(x_1 \ldots x_n)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]f(\xi)}\int DA\, D\varphi\, D\varphi^* D\pi\, \mathcal{O}(..)\, e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\Box\pi - \partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

Adesso facciamo una trasformazione di gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \pi$

$$\mathcal{L}[A_\mu, \varphi] \to \mathcal{L}[A_\mu, \varphi] \,; \quad DA\, D\varphi\, D\varphi^* D\pi \to DA\, D\varphi\, D\varphi^* D\pi$$

$$\langle 0|T_h\, O(x_1 \ldots x_n)\}|0\rangle = \underbrace{\frac{1}{Z[0]}\, \frac{\int D\pi}{f(\xi)}}_{\text{stessi passaggi, il } \int D\pi \text{ si semplifica}} \int DA\, D\varphi\, D\varphi^*\, \mathcal{O}(..)\, e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

$$= \frac{1}{Z[0]_\xi}\int DA\, D\varphi\, D\varphi^*\, \mathcal{O}(..)\, e^{i\int d^4x\left(\mathcal{L}[A,\varphi] - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2\right)}$$

Ma l'espressione iniziale è indipendente da ξ, quindi anche le funzioni di correlazione di OPERATORI GAUGE-INVARIANTI lo sono.

[S.8.5]

$$\mathcal{L}^{free}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2}A_\mu\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu$$

$$Z[J_\mu]_\xi = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left\{ i\int d^4x \left[\frac{1}{2}A_\mu\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)A_\nu + i\varepsilon A_\mu A_\mu + J_\mu A_\nu\right]\right.$$

$$= Z[0]_\xi \exp\left\{-\int d^4x\, d^4y\, \frac{1}{2} J_\mu(x)\, i\Pi^{\mu\nu}(x-y)\, J_\nu(y)\right\}$$

Dove: $\left(\Box g^{\mu\nu} - \left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu\right)\Pi^{\mu\nu}(x-y) = \delta(x-y)$

$$\Rightarrow \quad i\Pi^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i e^{ip(x-y)}}{p^2+i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)$$

PROPAGATORE DEL FOTONE NELLA ξ-GAUGE

ESERCIZIO: Verificare

$$\langle 0|T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[0]_\xi}\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\nu(y)}\right)Z[J]_\xi = i\Pi_{\mu\nu}(x-y)$$

- FEYNMAN - 't Hooft gauge: $\xi = 1$ $\rightarrow$ utile per calcoli
- Lorenz gauge: $\xi = 0$ $\rightarrow$ "fissa" $\partial_\mu A_\mu = 0$
- Unitary gauge: $\xi \rightarrow \infty$ $\rightarrow$ non utile per QED

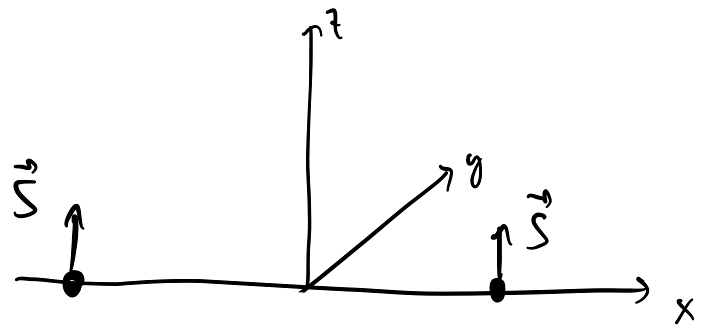
INTEGRALE SUI CAMMINI PER FERMIONI

[S.14.6]
[PS.9.5]

Abbiamo visto che sotto rotazioni di 2π

$$\psi(x) \xrightarrow{\vartheta_z = 2\pi} -\psi(x).$$

Consideriamo 2 fermioni identici posizionati a $C\hat{x}$ e $-C\hat{x}$, con spin allineati a $\hat{z}$



Lo stato è:

$$|\psi_{12}\rangle = |\psi_{\uparrow}(\vec{x})\,\psi_{\uparrow}(-\vec{x})\rangle$$

Ruotiamo di π attorno a $\hat{z}$: ogni spinore ha: $\Lambda_s(\pi) = i$

$$|\psi_{12}\rangle \xrightarrow{\vartheta_z = \pi} -|\psi_{21}\rangle = -|\psi_{12}\rangle$$

perché i due fermioni sono identici.

$\Rightarrow$ la funzione d'onda cambia segno sotto scambio di due spinori.

I fermioni **anticommutano**.

A livello classico: $\{\psi(x), \chi(y)\} = 0$

Introduciamo il concetto di numeri che anticommutano.

ALGEBRA DI GRASSMAN: insieme $\mathcal{G}$ di oggetti

generati da una base $\{\theta_i\}$ **NUMERI DI GRASSMAN**

$\{\theta_i\}$ soddisfano:
$$\begin{cases} \theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \\ \theta_i + \theta_j = \theta_j + \theta_i \\ \alpha\theta \in G \quad \text{dato} \quad \theta \in \mathcal{G} \text{ e } \alpha \in \mathbb{C} \\ \exists\, 0 : \quad \theta_i + 0 = \theta_i \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \theta_i^2 = 0 \quad : \quad \theta_i^2 = -\theta_i^2 \rightarrow 2\theta_i^2 = 0$

- Per $\boxed{\text{un } \theta}$, l'elemento generico dell'algebra è
$$g = a + b\theta \qquad a, b \in \mathbb{C}$$
- Per due $\{\theta_1, \theta_2\}$: $\quad g = a + b\theta_1 + c\theta_2 + f\theta_1\theta_2$

- $(\theta_i\theta_j)$ è "bosonico" : $\quad \theta_i\theta_j\theta_a = \theta_a\theta_i\theta_j \qquad$ (o ogni 2n)

- $(\theta_i .. \theta_{2n+1})$ è "fermionico" : $\quad \theta_i\theta_j..\theta_{2n+1}\theta_a = -\theta_a\theta_i..\theta_{2n+1}$

INTEGRALE $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) \longleftrightarrow \int d\theta\, f(\theta)$

È una mappa da $G \to \mathbb{C}$

- linearità: $\int d\theta_1 \dots d\theta_n (sX + tY) = s \int d\theta_1 \dots d\theta_n X + t \int d\theta_1 \dots d\theta_n Y$

  $s, t \in \mathbb{C}$; $X, Y \in G$

- $d\theta$ anticommuta come θ, anche $\int d\theta \Rightarrow \int d\theta = 0$

  $\int d\theta (a + b\theta) \equiv a \int d\theta + b \int d\theta\, \theta = b$ DEF: $\boxed{\int d\theta\, \theta = 1}$

  $\frac{d}{d\theta}(a + b\theta) \equiv b$

$\Rightarrow \frac{d}{d\theta} = \int d\theta$ per numeri Grassmaniani

- Per più θ_i:

  $\int d\theta_1 \dots d\theta_n X \equiv \frac{\partial}{\partial\theta_1} \cdots \frac{\partial}{\partial\theta_n} X \Rightarrow \int d\theta_1 \dots d\theta_n\, \theta_n \dots \theta_1 = 1$

  NOTA: $\int d\theta_1 d\theta_2\, \theta_2 \theta_1 = - \int d\theta_1 d\theta_2\, \theta_1 \theta_2 = 1$

- Cambio di variabili

$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x+a)$ $a: \frac{d}{dx} a = 0$ | $\int d\theta (A + B\theta) = \int d\theta (A + B(\theta + X))$ $X: \frac{\partial}{\partial\theta} X = 0$

- $\int d\vartheta_1 d\vartheta_2\, e^{-\vartheta_1 A_{12}\vartheta_2} = \int d\vartheta_1 d\vartheta_2 \left(1 - \vartheta_1 A_{12}\vartheta_2\right) = A_{12}$

termini sup hanno $\vartheta_1^2 = 0$ o $\vartheta_2^2 = 0$.

- Numeri complessi:

$\vartheta = \frac{\vartheta_1 + i\vartheta_2}{\sqrt{2}}$, $\bar{\vartheta} \equiv \vartheta^* = \frac{\vartheta_1 - i\vartheta_2}{\sqrt{2}}$ $\to$ $\int d\bar{\vartheta} d\vartheta\, \vartheta\bar{\vartheta} = 1$

$(\vartheta\eta)^* = \bar{\eta}\,\bar{\vartheta} = -\bar{\vartheta}\,\bar{\eta}$ (come prendere l'Hermitiano di operatori)

- Prendiamo n ϑ_i e n $\bar{\vartheta}_i$ (tutte variabili di Grassman indipendenti)

$$\int d\bar{\vartheta}_1 \ldots d\bar{\vartheta}_2\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n\, e^{-\bar{\vartheta}_i A_{ij}\vartheta_j} =$$

$$= \int d\bar{\vartheta}_1 \ldots d\bar{\vartheta}_2\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n \left(1 - \bar{\vartheta}_i A_{ij}\vartheta_j + \frac{1}{2}(\bar{\vartheta}_i A_{ij}\vartheta_j)(\bar{\vartheta}_k A_{kl}\vartheta_l) + \ldots\right)$$

L'unico termine non nullo è quello con tutti gli ϑ_i e $\bar{\vartheta}_i$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\text{perm}\{i_n\}} \pm A_{i_1 i_2}\ldots A_{i_{n-1} i_n} = \det(A)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int d\bar{\vartheta}_1 \ldots d\bar{\vartheta}_2\, d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n\, e^{-\bar{\vartheta}_i A_{ij}\vartheta_j} = \det(A) \\ &\int dx_1 \ldots dx_n\, e^{-\frac{1}{2}x_i A_{ij} x_j} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}} \end{aligned}}$$

• Prendiamo <u>altre</u> $2n$ variabili di Grassman η_i e $\bar{\eta}_i$:

$$\int d\bar{\theta}_1 \dots d\bar{\theta}_2 \, d\theta_1 \dots d\theta_n \; e^{-\bar{\theta}_i A_{ij} \theta_j + \bar{\eta}_i \theta_i + \bar{\theta}_i \eta_i} =$$

$$= e^{\bar{\eta}_i A^{-1}_{ij} \eta_j} \int d\bar{\theta}_1 \dots d\bar{\theta}_2 \, d\theta_1 \dots d\theta_n \; e^{-(\bar{\theta}_i - \bar{\eta}_i A^{-1}) A (\theta_i - A^{-1} \eta_i)} = \det(A) \, e^{\bar{\eta}_i A^{-1}_{ij} \eta_j}$$

Limite del continuo

Prendiamo il limite del continuo:

$$i \to x \qquad \begin{cases} \theta_i \to \psi(x) \\ \bar{\theta}_i \to \bar{\psi}(x) \end{cases}$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}} \left(\underbrace{a_s(p)} u_s(p) e^{-ipx} + \underbrace{b^{\dagger}_s(p)} v_s(p) e^{ipx} \right)$$

Variabili di Grassman

Per definire il funzionale generatore introduciamo due correnti esterne, $\eta(x)$ e $\bar{\eta}(x)$, <u>anch'esse Grassmaniane</u>:

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \int D[\bar{\psi}(x)] \, D[\psi(x)] \, \exp\left\{ i \int d^4x \left[\bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon) \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right] \right\}$$

$$= Z[0,0] \; e^{-\int d^4x \, d^4y \; \bar{\eta}(x) \, S_F(x-y) \, \eta(y)} ,$$

dove: $Z[0,0] = \det(i\partial\!\!\!/ - m)$

Abbiamo anche definito: $(i\not{\partial}_x - m + i\varepsilon)\, S_F(x-y) = i\,\delta^4(x-y)$

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon}\, e^{-ip(x-y)} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{\not{p}+m}{p^2 - m^2 + i\varepsilon'}\, e^{-ip(x-y)}$$

$$(i\not{\partial}_x - m + i\varepsilon)\, S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \frac{i}{\cancel{(\not{p}-m+i\varepsilon)}}\cancel{(\not{p}-m+i\varepsilon)}\, e^{-ip(x-y)} = i\,\delta^4(x-y) \quad \checkmark$$

Nota: $$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\, \bar{\vartheta}(x)\,\eta(x) = -\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\, \eta(x)\,\bar{\vartheta}(x) = -\bar{\vartheta}(x)$$

La funzione a due punti è data da:

$$\langle 0|\, T\{\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\}\,|0\rangle = Z[0,0]^{-1}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\right)\left(+i\frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y)}\right) Z[\bar{\eta},\eta]\Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} =$$

indici spinoriali

$$= Z[0]^{-1}\int D\bar{\psi}\,D\psi\,\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\right)\bar{\psi}_\beta(y)\; e^{i\langle\bar{\psi}(i\not{\partial}-m+i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\rangle} =$$

$$= Z[0]^{-1}\int D\bar{\psi}\,D\psi\; \bar{\psi}_\beta(y)\left(-\psi_\alpha(x)\right)\; e^{i\langle\bar{\psi}(i\not{\partial}-m+i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\rangle} =$$

$$= Z[0]^{-1}\int D\bar{\psi}\,D\psi\; \left(\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\right)\; e^{i\langle\bar{\psi}(i\not{\partial}-m+i\varepsilon)\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\rangle} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\bar{\eta}_\alpha(x)\,\partial\eta_\beta(y)}\left(1 - \langle\bar{\eta}\, S_F\, \eta\rangle\right) = \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_\alpha(x)}\int d^4w\, \bar{\eta}_\gamma(w)\, S_F^{\gamma\beta}(w-y) = S_F^{\alpha\beta}(x-y)$$

$$= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\left[\frac{i}{\not{p}-m+i\varepsilon}\right]_{\alpha\beta} e^{-ip(x-y)}$$

Elettrodinamica Quantistica - QED

$$\mathcal{L}^{QED} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{2}$$

$$D_\mu = \partial_\mu - iQeA_\mu \qquad\qquad \psi \to e^{ieQ\alpha(x)}\psi$$

Invariante sotto: $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$, $\quad \bar{\psi} \to e^{-ieQ\alpha}\psi$

$$\partial_\mu \psi \to i e^{ieQ\alpha}(\partial_\mu \psi + ieQ\alpha\psi), \qquad D_\mu\psi \to e^{ieQ\alpha(x)} D_\mu \psi$$

Gauge-fixing: $\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2$

Interazioni

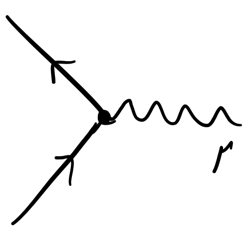
$$\mathcal{L}_{int}(A_\mu, \psi, \bar{\psi}) = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

Per l'elettrone $Q = -1$.

$$Z[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] = \int DA_\mu D\bar{\psi} D\psi \exp\left[i\int d^4x\left(\mathcal{L}^{QED} + \mathcal{L}_{g.f.} + J_\mu A^\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right)\right]$$

$$= Z_0[0]\, e^{i\langle \mathcal{L}_{int}\left(-i\frac{\delta}{\delta J_\mu}, -i\frac{\delta}{\delta \eta}, i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}}\right)\rangle}\, e^{-\frac{1}{2}\langle J_\mu(x) i\Pi^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y)\rangle}\, e^{-\langle \bar{\eta}(x) S_F(x-y)\eta(y)\rangle}$$

Regola di Feynman



$$= i\frac{\delta}{\delta\psi}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}}\frac{\delta}{\delta A_\mu}\left[eQ\bar{\Psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\right] = ieQ\gamma^\mu$$

QED SCALARE

- Campo scalare complesso + fotone

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \varphi)^* (D^\mu \varphi) - m^2 \varphi^* \varphi - \lambda (\varphi^* \varphi)^2$$

Dove $\quad D_\mu \varphi = (\partial_\mu - i e Q A_\mu) \varphi$

ESERCIZIO :

Derivare $\mathcal{L}_{int}$ tra φ ed il fotone e le regole di Feynman associate.