

# Fisica Generale 1 – 018IN

## Moto dei sistemi

Prof. Pierre Thibault  
[pthibault@units.it](mailto:pthibault@units.it)

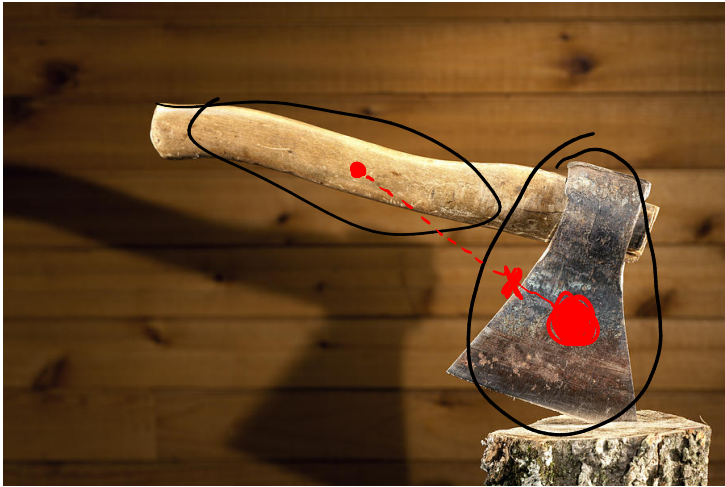


# Moto dei sistemi

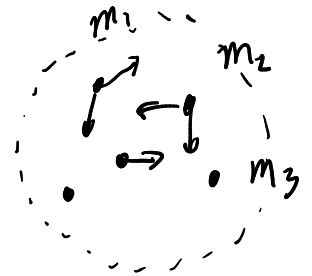
Finora: corpo = punto materiale

Corpi reali

- \* distribuzione di massa
- \* più punti di applicazione delle forze
- \* forze interne (tra parte del corpo)



- \* più masse
- \* forze che si applicano su ogni elemento di massa



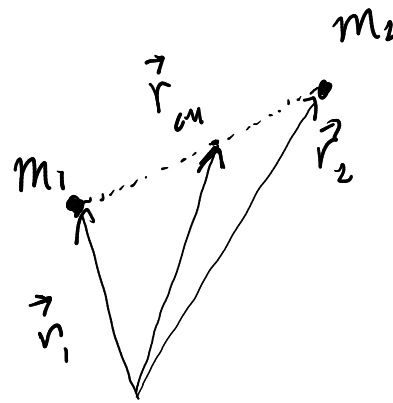
# Centro di massa

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$M = \sum_i m_i \quad \text{massa totale}$$

$$\vec{r}_{CM} = \sum_i \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

vettoe posizione che rappresenta la media ponderata ("pesata") dei vettori posizione di ogni massa.

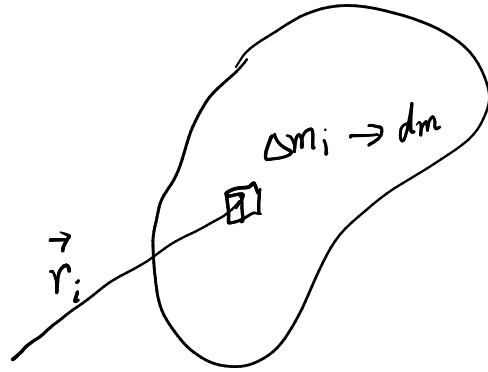


$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{aligned} m_1 > m_2 & \quad \vec{r}_{CM} \rightarrow \vec{r}_1 \\ m_1 < m_2 & \quad \vec{r}_{CM} \rightarrow \vec{r}_2 \end{aligned}$$

# Centro di massa

Sistema continuo



densità :  $\rho$  massa / volume

$\rho(\vec{r})$  densità variabile nello spazio

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

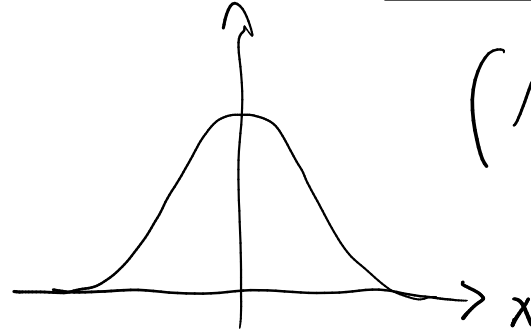
$$dm = \rho dV$$

$$\vec{r}_{cm} = \sum_i \frac{\Delta m_i}{M} \vec{r}_i \rightarrow \int \vec{r} \frac{dm}{M}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

$$(M = \int \rho(\vec{r}) dV)$$



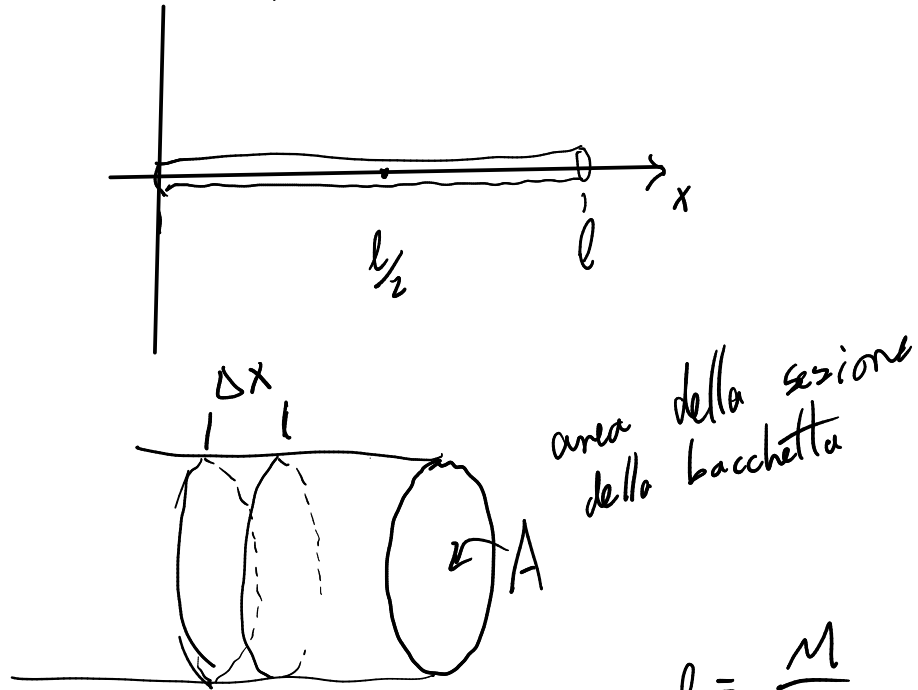
# Centro di massa

Esempio 1: bacchetta di lunghezza  $l$ , massa  $M$ , densità uniforme

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \rho(\vec{r}) dV$$

$$= \frac{1}{M} \int x \frac{M}{l} dx = \frac{1}{l} \int_0^l x dx = \frac{1}{l} \left( \frac{1}{2} l^2 \right) = \frac{l}{2}$$



$$\Delta V = \Delta x A$$

$$V = l A$$

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{densità uniforme}$$

$$\rho \Delta V = \frac{M}{l A} \Delta x A = \frac{M}{l} \Delta x$$

# Centro di massa

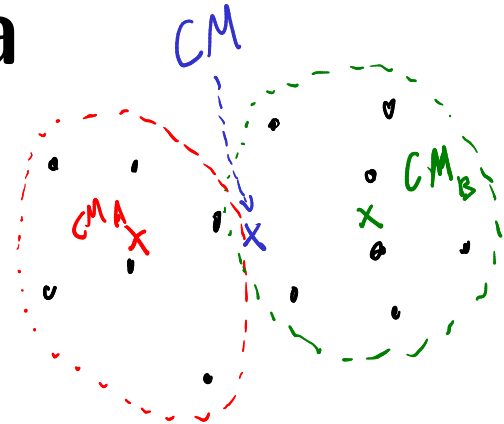
$$\vec{r}_{CM} = \sum_i \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

$$= \sum_{i \in A} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i + \sum_{i \in B} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

$$= \frac{1}{M} M_A \underbrace{\sum_{i \in A} \frac{m_i}{M_A} \vec{r}_i}_{\vec{r}_{CM_A}} + \frac{1}{M} M_B \underbrace{\sum_{i \in B} \frac{m_i}{M_B} \vec{r}_i}_{\vec{r}_{CM_B}}$$

$$= \frac{1}{M} (M_A \vec{r}_{CM_A} + M_B \vec{r}_{CM_B})$$

= CM di un sistema con due punti materiali: a  $\vec{r}_{CM_A}$  e  $\vec{r}_{CM_B}$

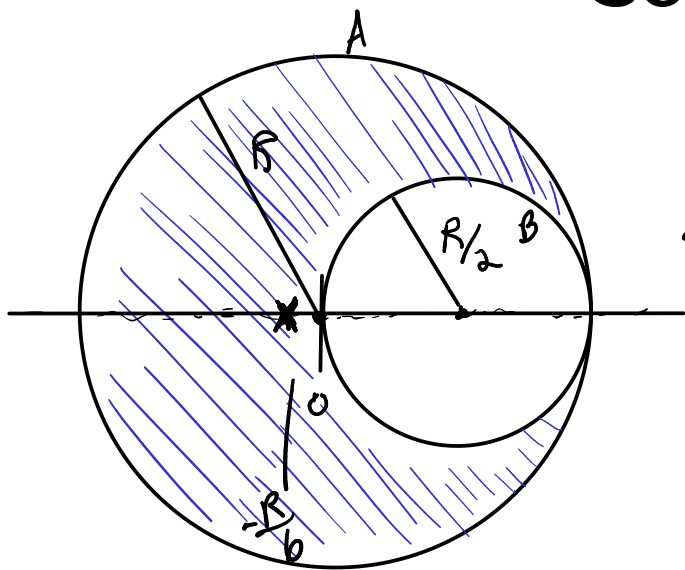


$$M_A = \sum_{i \in A} m_i$$

$$M_B = \sum_{i \in B} m_i$$

$$M = M_A + M_B$$

# Centro di massa



← equivalente a CM del grande disco  
e piccolo disco di massa  $< 0$ .

$M_B < 0!$

$$X_{CM} = \frac{X_{CM_A} M_A + X_{CM_B} M_B}{M_A + M_B}$$

$$= \frac{0 \cdot M_A + R/2 \cdot M_B}{M_A + M_B}$$

$$= \frac{R}{2} \frac{M_B}{M_A + M_B} = \frac{R}{2} \frac{\cancel{\rho h \pi R^2/4}}{\rho h \pi R^2 - \cancel{\rho h \pi R^2/4}}$$

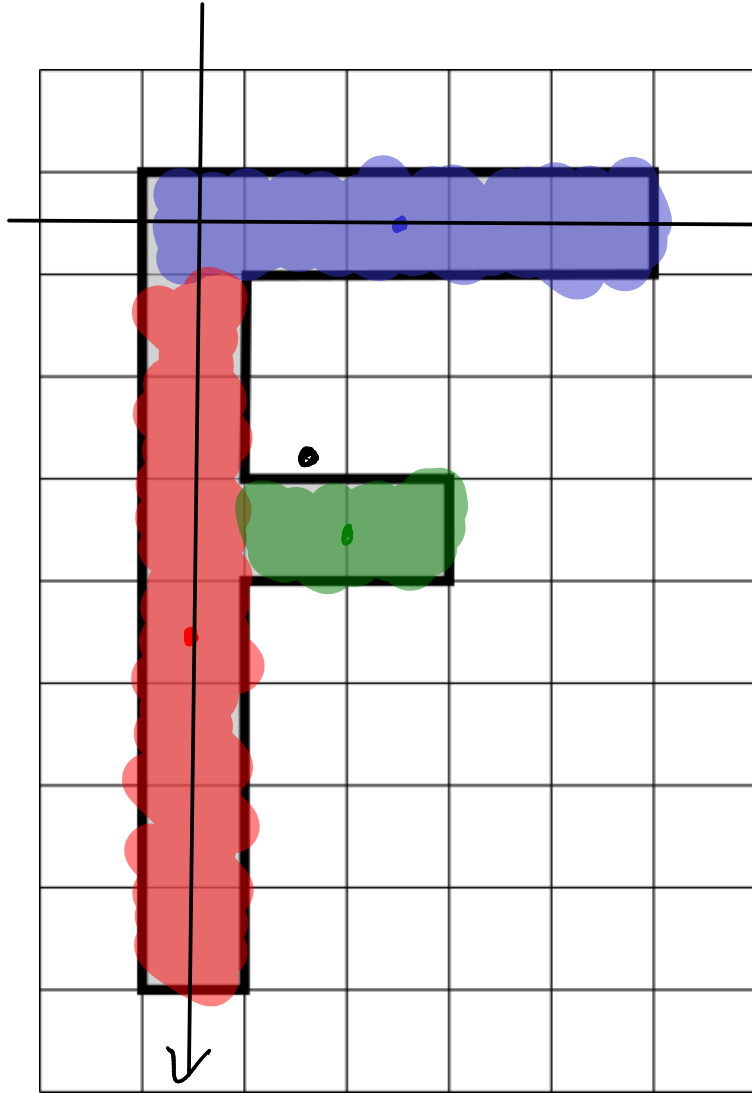
$$= \frac{R}{2} \frac{-1/4}{3/4} = -\frac{R}{6}$$

densità uniforme  $\rho$

$$M_A = \rho \cdot V_A = \rho h \pi R^2$$

$$-M_B = \rho \cdot V_B = \rho h \pi \frac{R^2}{4}$$

# Centro di massa



$$r_1 = (2, 0) \quad m_1 = 5$$

$$\rightarrow r_2 = (0, 4) \quad m_2 = 7$$

$$r_3 = (1, 5, 3) \quad m_3 = 2$$

$$X_{cm} = \frac{X_1 m_1 + X_2 m_2 + X_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{10 + 0 + 3}{14} = \frac{13}{14}$$

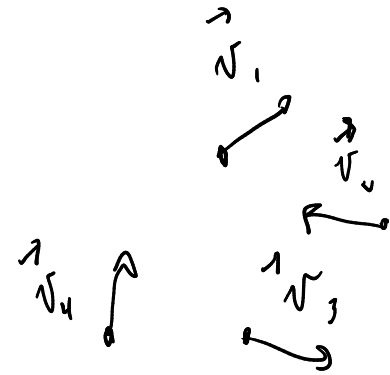
$$Y_{cm} = \frac{0 + 28 + 6}{14} = \frac{17}{7}$$

# Moto del centro di massa

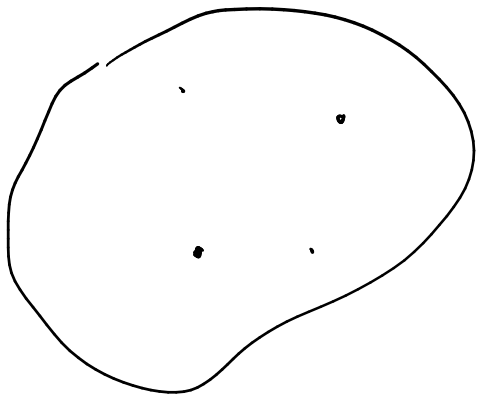
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i \vec{r}_i m_i}{M}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i m_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i$$



# Dinamica del centro di massa



$$m_i \vec{a}_i = (\text{risultante delle forze}) = \vec{F}_{ai} + \vec{F}_{bi} + \vec{F}_{ci} + \dots$$

Due possibilità: Forza interna o forza esterna

\* esterne:  $\vec{F}_{ext,i}$  ← risultante di tutte le forze esterne che si applicano su il punto materiale  $i$

← interne  $\vec{F}_{ji}$  ← forza causata dal punto  $j$  sul punto  $i$

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{ext,i} + \sum_j \vec{F}_{ji}$$

# Dinamica del centro di massa

$$\begin{aligned}\vec{a}_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i \\ &= \frac{1}{M} \sum_i \left( \vec{F}_{ext\,i} + \sum_j \vec{F}_{ji} \right) \\ &= \frac{1}{M} \left( \sum_i \vec{F}_{ext\,i} + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}}_0 \right)\end{aligned}$$

$$\sum_i \sum_j \vec{F}_{ji} = \boxed{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} + \dots \\ + \boxed{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \dots$$

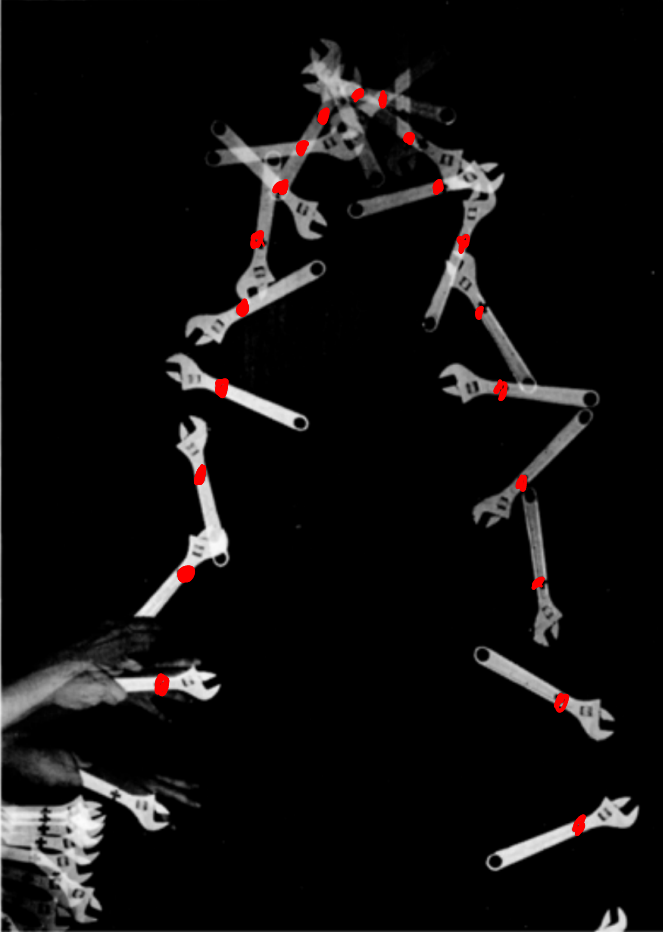
somma = 0!  
(3<sup>a</sup> legge di Newton)

$$M \vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_{ext\,i}$$

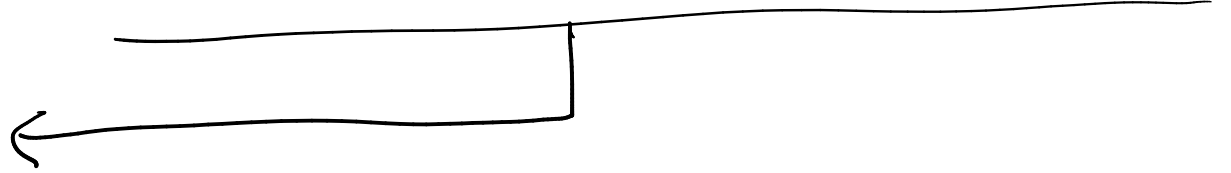
il centro di massa segue la 2<sup>a</sup> legge  
come se fosse un punto materiale

Moto del CM dipende solo dalle forze esterne.

# Dinamica del centro di massa



$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{cm}} = M \vec{g} \quad \left( = \sum_i m_i \vec{g} \right)$$



Se  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$  allora  $\vec{v}_{\text{cm}} = \text{costante}$

# Conservazione della quantità di moto

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0 = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt} \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{costante}$$

Quantità di moto  $\vec{p} = m\vec{v}$

"momentum"

Se la risultante delle forze su un sistema è nulla,  
la quantità di moto del sistema si conserva

Centro di massa:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{r}_i m_i = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{v}_i m_i \longrightarrow M \vec{v}_{cm} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{a}_i m_i \longrightarrow M \vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_{ext}$$

(indipendente  
delle forze  
interne)

Quantità di moto:  $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{p}_{cm} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\Rightarrow$  Se  $\sum_i \vec{F}_{ext} = 0$  allora  $\vec{p}_{cm} = \text{costante}$

"Conservazione  
della quantità di  
moto"

# La seconda legge di Newton

## Seconda legge

*Il cambiamento di moto è proporzionale alla forza motrice impressa, ed avviene lungo la linea retta secondo la quale la forza è stata impressa.*

LAW II.

$$\Delta \vec{p} \propto \vec{F}$$

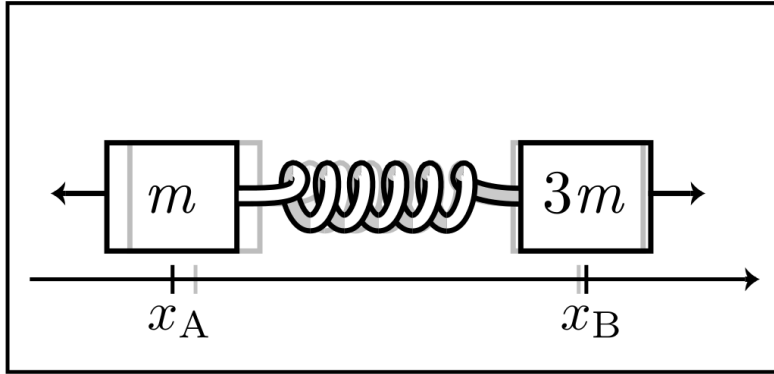
*The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed ; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.*

$$\vec{F} = m \vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{p}$$

$$\boxed{F = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

2<sup>a</sup> legge di  
Newton

# La seconda legge di Newton



Inizialmente a compresso e a  
riposo:

$$\vec{p}_i = 0$$

Dopo, la molla si stende, c'è moto,  
ma  $\vec{p}_f = \vec{p}_i = 0$  perché  $\sum \vec{F}_{ext} = 0$

$\Rightarrow$  a qualsiasi tempo  $t$ :

$$\begin{aligned}\vec{p} = 0 &= \vec{p}_A + \vec{p}_B \\ &= m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B\end{aligned}$$

$$= m \vec{v}_A + 3m \vec{v}_B$$

$$\Rightarrow \vec{v}_A = -3\vec{v}_B$$

# Conservazione della quantità di moto

Un nucleo di radio ( $^{226}\text{Ra}$ ) inizialmente a riposo si decompone in un nucleo di radon ( $^{222}\text{Rn}$ ) e una particella alfa (nucleo di  $^4\text{He}$ ). Se l'energia cinetica della particella alfa è di  $6.72 \times 10^{-13} \text{ J}$ , quali sono (a) il modulo della velocità di rinculo dell'atomo di radon (b) la sua energia cinetica? Gli esponenti indicano approssimativamente la massa dei nuclei in unità di massa atomica (u), con  $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

$$\vec{P}_i = 0 \quad \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f = 0$$

$$\vec{P}_f = \vec{P}_{\text{Rn}} + \vec{P}_\alpha = 0$$

$$\vec{P}_{\text{Rn}} = -\vec{P}_\alpha$$

$$K_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{m_\alpha} P_\alpha^2$$

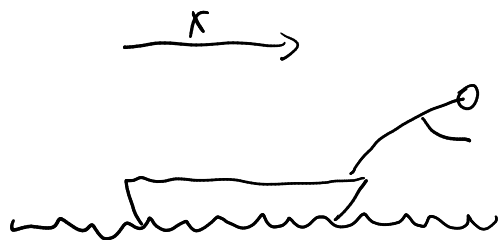
$$|\vec{P}_\alpha| = \sqrt{2 m_\alpha K_\alpha} = |\vec{P}_{\text{Rn}}|$$

$$v_{\text{Rn}} = \frac{P_{\text{Rn}}}{m_{\text{Rn}}} = \frac{1}{m_{\text{Rn}}} \sqrt{2 m_\alpha K_\alpha} \quad (a)$$

$$K_{\text{Rn}} = \frac{m_\alpha}{m_{\text{Rn}}} K_\alpha \quad (b)$$

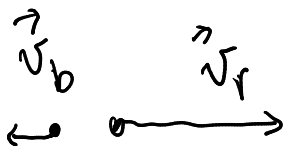
# Conservazione della quantità di moto

**10.13** Una ragazza di massa 45 kg si tuffa da una barca di massa 1000 kg, allontanandosi da essa con una velocità orizzontale di 5.2 m/s. Ammettendo che la barca fosse inizialmente in quiete e libera di muoversi nell'acqua, con quale velocità essa si mette in movimento?



$$\vec{p}_i = 0$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_r + \vec{p}_b = 0$$



$$p_{ix} = p_{fx} = 0$$

$$p_{rx} = -p_{bx}$$

$$\begin{cases} m_r v_{rx} = -m_b v_{bx} & (*) \\ \vec{v}_{rel} = \vec{v}_r - \vec{v}_b & (**) \end{cases}$$

$$v_{relx} = v_{rx} - v_{bx}$$

$$* \quad v_{rx} = -\frac{m_b}{m_r} v_{bx}$$

$$\Rightarrow v_{relx} = -\frac{m_b}{m_r} v_{bx} - v_{bx}$$

$$= -v_{bx} \left( 1 + \frac{m_b}{m_r} \right)$$

$$v_{bx} = \frac{-v_{relx}}{\left( 1 + \frac{m_b}{m_r} \right)} = \frac{-v_{relx} m_r}{m_r + m_b}$$

$$v_{rx} = v_{relx} \frac{m_b}{m_r + m_b}$$

velocità relativa:  
velocità misurata  
da un sistema di  
riferimento in cui  
uno dei corpi è a

riposso

$$\Rightarrow \vec{v}_{rel} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$$

$$(\text{oppure } = \vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

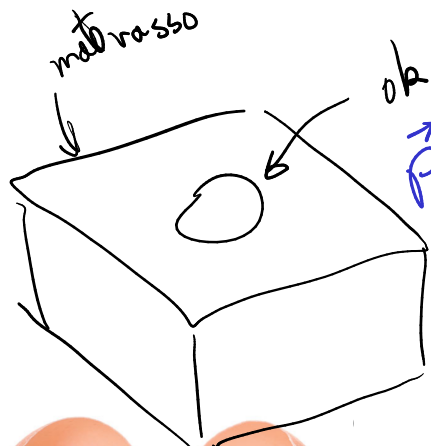
$$v_{bx} = -0.22 m/s$$

# Impulso



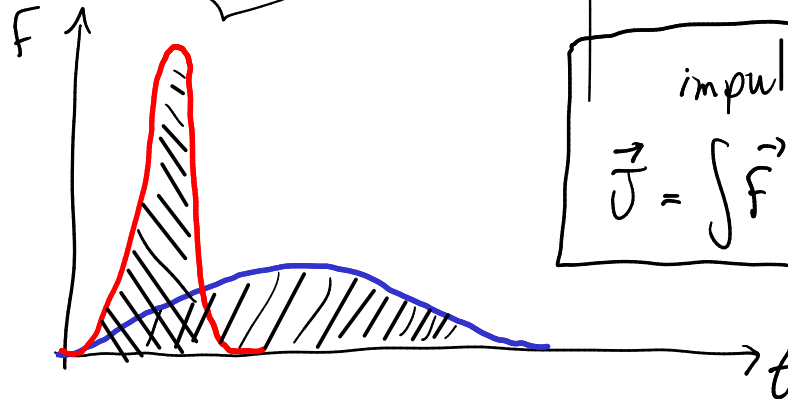
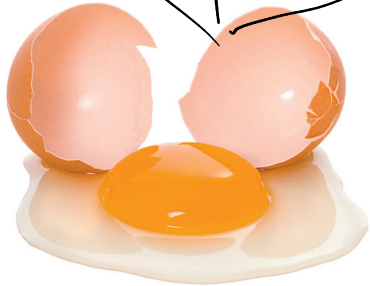
$$m\vec{v}_i = \vec{p}_i =$$

$$\Delta \vec{p} = \Delta \vec{p}$$



$$\vec{p}_f = 0$$

$$\vec{p}_f = 0$$



$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\int \vec{F} dt = \int \frac{d\vec{p}}{dt} dt$$

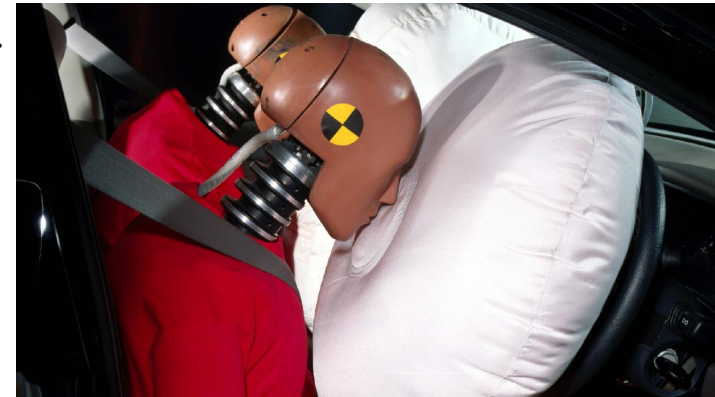
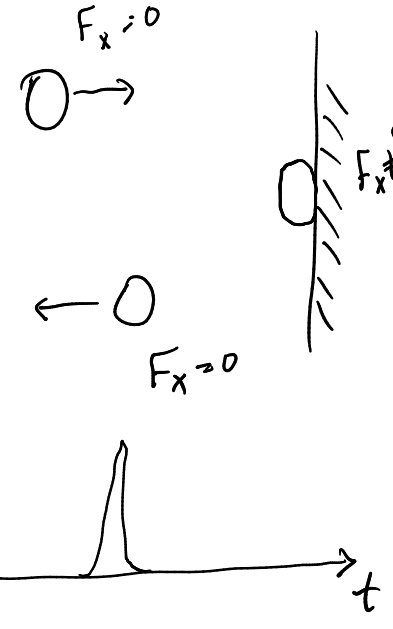
$$= \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= \Delta \vec{p}$$

$$\Delta \vec{p} = \int \vec{F} dt$$

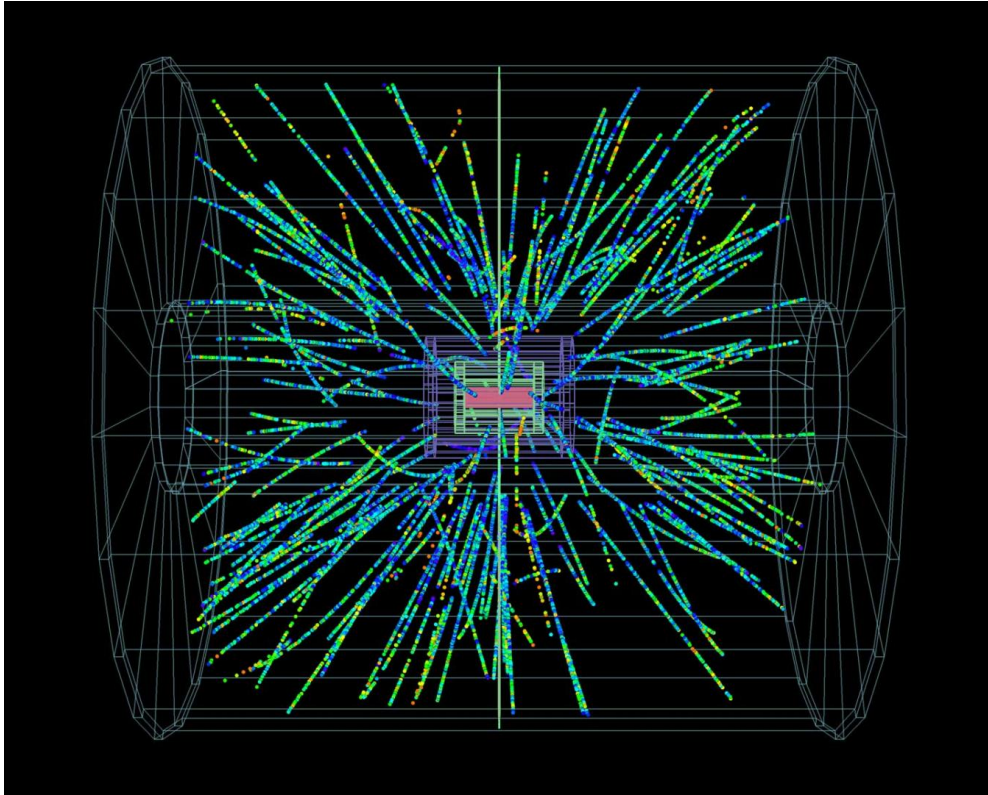
impulso

$$\vec{J} = \int \vec{F} dt$$

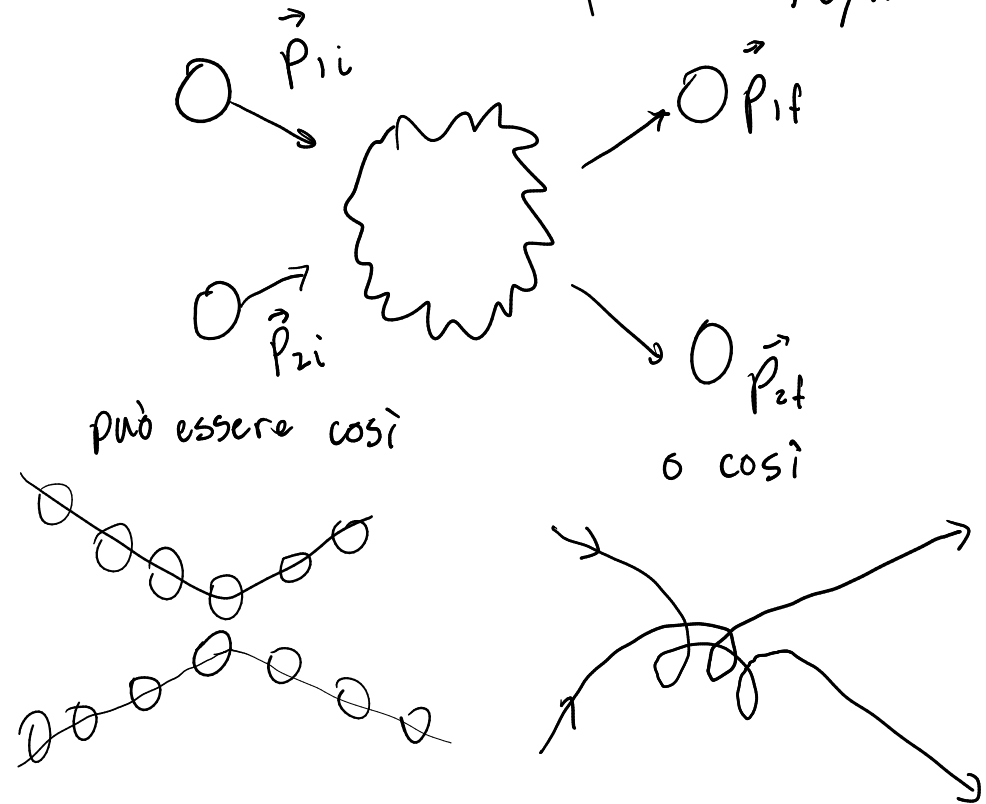
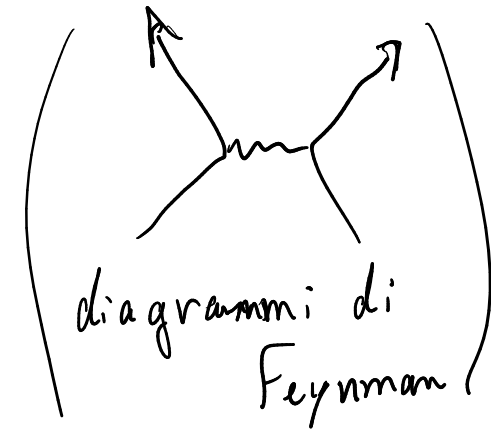


# Urti

Assolutamente fondamentale per la fisica moderna



Un urto a CERN



# Urti

\* Quantità di moto sempre conservata

tempo di interazione  
corpo paragonato al  
effetto delle forze esterne)

\* 3 categorie

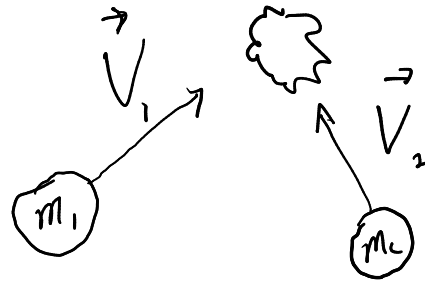
1. Urto elastico : energia cinetica conservata

2. Urto anelastico : i due corpi si incollano (stessa velocità finale)

3. Urto parzialmente anelastico : parte dell'energia è dispersa.

# Urti tra 2 corpi

Quantità di moto  
 $\vec{p} = m\vec{v}$



problema generale

← sistema di riferimento  
"laboratorio" \*

$\vec{V}, \vec{p}$  in sistema lab.

Centro di massa: 
$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_1 + \vec{P}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}_{tot}}{m_{tot}}$$

Passiamo al sistema di riferimento centro di massa (si sposta con velocità  $\vec{v}_{cm}$ )

$$\vec{v}_1 = \vec{V}_1 - \vec{v}_{cm} \quad \vec{v}_2 = \vec{V}_2 - \vec{v}_{cm}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{tot} = 0 \leftarrow \text{utile perché } \vec{P}_{tot,i} = \vec{P}_{tot,f} = 0$$

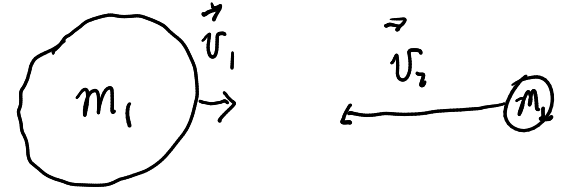
# Urti tra 2 corpi

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

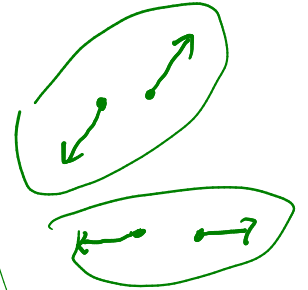
Ne sistema di riferimento CM:

$$\vec{p}_{tot} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \Rightarrow &\boxed{\vec{p}_1 = -\vec{p}_2} \end{aligned}$$



stati finali  
possibili



\* Conservazione della quantità di moto

$$\vec{p}_{tot,i} = 0 = \vec{p}_{tot,f} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

\* Energia cinetica

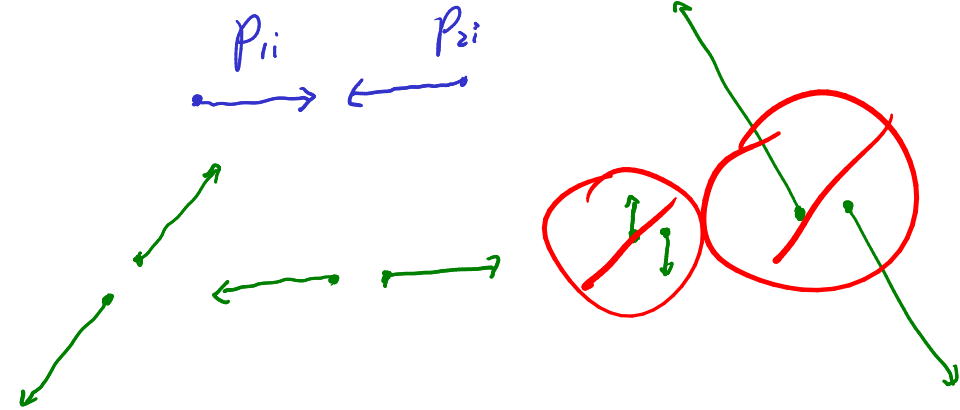
$$K_i = \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2m_1} \overbrace{p_{1i}^2}^{\text{uguali}} + \frac{1}{2m_2} p_{2i}^2 = p_{1i}^2 \underbrace{\left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)}$$

$$K_f = \frac{1}{2m_1} p_{1f}^2 + \frac{1}{2m_2} p_{2f}^2 = p_{1f}^2 \underbrace{\left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)}$$

# Urti elastici

Conservazione dell'energia cinetica

$$K_i = K_f \Rightarrow |p_i| = |p_f|$$



$$\Rightarrow |v_{1i}| = \frac{|p_{1i}|}{m_1} = \frac{|p_{1f}|}{m_1} = |v_{1f}|$$

$$|v_{2i}| = \frac{|p_{2i}|}{m_2} = \frac{|p_{2f}|}{m_2} = |v_{2f}|$$

# Urti – conclusioni

conservazione  
dell'energia

$$|v_{1i}| = |v_{1f}|$$

↕

$$|p_{1i}| = |p_{1f}|$$

||

$$|p_{2i}| = |p_{2f}|$$

↕

$$|v_{2i}| = |v_{2f}|$$

conservazione  
della q.tà di  
moto

$$\vec{p}_{1i} = -\vec{p}_{2i} \quad \vec{p}_{1f} = -\vec{p}_{2f}$$

conservazione della quantità  
di moto

$$|p_{1i}| = |p_{2i}| = |p_{1f}| = |p_{2f}|$$

Urti elastici

urti  
elastici

"il modulo della velocità di  
avvicinamento è uguale al modulo  
della velocità di separazione"

$$\begin{aligned} |\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}| &= |v_{1i}| + |v_{2i}| \\ &= |v_{1f}| + |v_{2f}| \\ &= |\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}| \end{aligned}$$

stessa  
rete, verso  
opposto

# Urto in 1D - elastico

Unica possibilità:



componenti

$$p_{1f_x} = -p_{1i_x}$$

$$p_{2f_x} = -p_{2i_x}$$

$$v_{1f} = -v_{1i}$$

$$v_{2f} = -v_{2i}$$

Sistema laboratorio:

$$V_{1f} = v_{1f} + v_{cm}$$

$$= -v_{1i} + v_{cm}$$

$$= -(V_{1i} - v_{cm}) + v_{cm}$$

$$= -V_{1i} + 2v_{cm} = \dots = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} V_{2i} + \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} V_{1i}$$

Componenti non moduli!

(eq. 10.21  
10.22  
in libro)

Caso limite

# Urto in 1D - elastico

$$m_2 \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2m_2}{m_1+m_2} \rightarrow 2$$

$$V_{1f} = 2V_{2i} - V_{1i}$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow -1$$

$$V_{2f} = V_{2i}$$

$$m_1 \rightarrow \infty$$

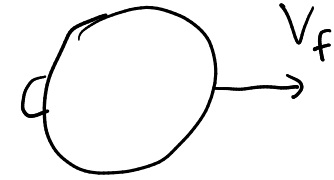
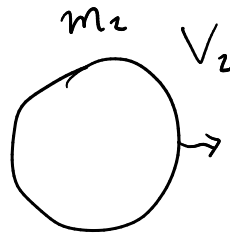
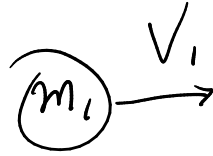
$\Rightarrow$

$$\frac{2m_2}{m_1+m_2} \rightarrow 0$$

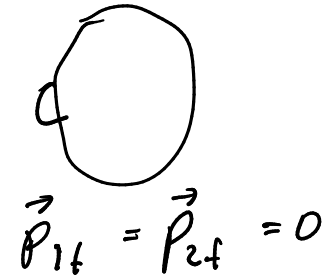
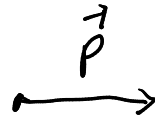
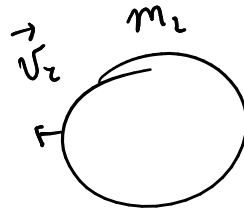
$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow 1$$

# Urto in 1D - anelastico

sistema lab



sistema CM



sistema lab

$$V_{1f} = V_{2f} = v_{cm} = \frac{m_1 V_{1i} + m_2 V_{2i}}{m_1 + m_2}$$

(in libro  
dopo  
eq. 10.22)

# Urti - riepilogo

\* Conservazione della quantità di moto si applica sempre

$$\vec{P}_{tot i} = \vec{P}_{tot f}$$

$$\text{in sistema CM} \quad \vec{p}_{1i} = -\vec{p}_{2i} \quad \vec{p}_{1f} = -\vec{p}_{2f}$$

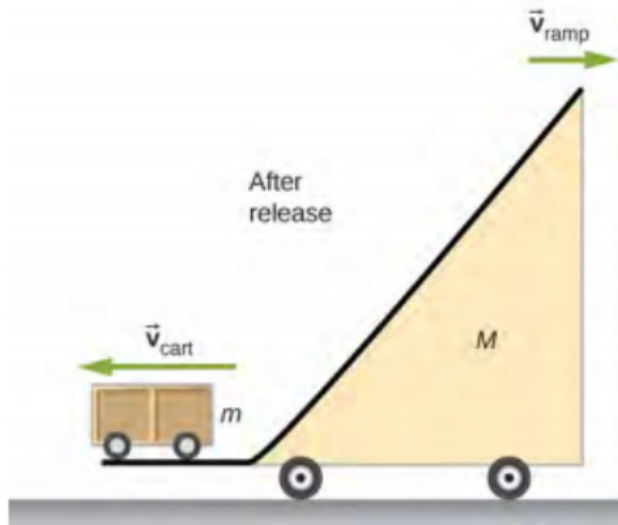
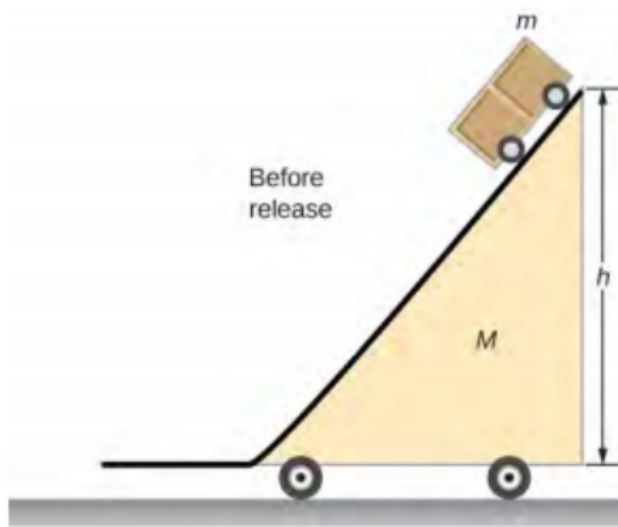
\* se si conserva l'energia cinetica, urto elastico

↳ modulo della velocità relativa all'avvicinamento  
= modulo velocità relativa dopo urto

$$K_i = K_f$$

↳ in sistema CM  $|p_{1i}| = |p_{1f}| = |p_{2i}| = |p_{2f}|$

\* urto completamente anelastico: velocità finale è quella del centro di massa



$$v_r = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(m+M)}}$$

\* Conservazione della quantità di moto:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{ci} + \vec{p}_{ri} = 0 + 0 = 0$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{cf} + \vec{p}_{rf} = \vec{v}_c m + \vec{v}_r M = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{cf} = -\vec{p}_{rf}$$

$$\vec{v}_c m = -\vec{v}_r M$$

$$\Rightarrow \vec{v}_c = -\vec{v}_r \frac{M}{m}$$

conservazione

\* Conservazione dell'energia meccanica

$$E_i = E_f$$

$$E_i = K_{ci} + K_{ri} + U_i$$

$$0 + 0 + mgh$$

$$E_f = K_{cf} + K_{rf} + U_f$$

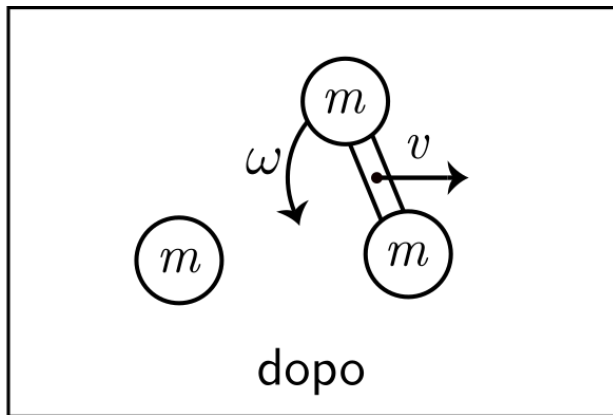
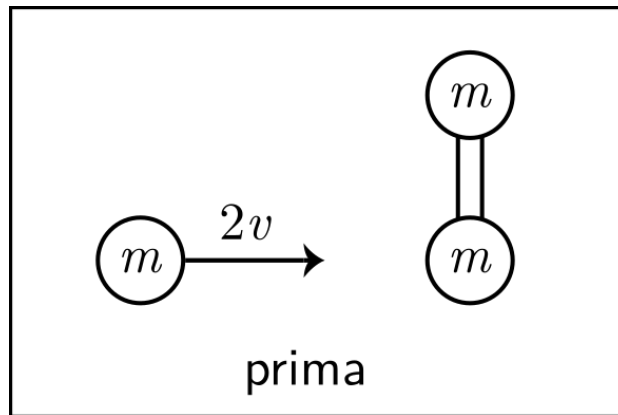
$$= \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mv_r^2 + 0$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mv_r^2$$

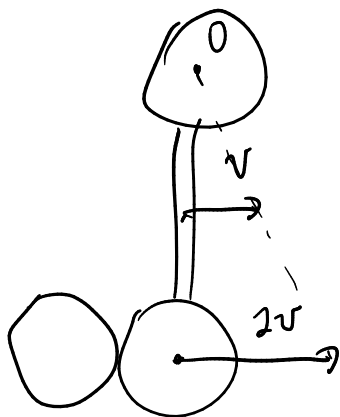
$$= \frac{1}{2}mv_r^2 \frac{M^2}{m^2} + \frac{1}{2}Mv_r^2$$

$$= \frac{1}{2}M\left(1 + \frac{M}{m}\right)v_r^2$$

$$v_r = \sqrt{\frac{2mgh}{M(1 + \frac{M}{m})}}$$



elastico o no?



$$K_f = K_i$$

# Moto dei razzi

NY Times 1920



Robert Goddard con il suo primo razzo in 1926

## TOPICS OF THE TIMES.

### A Severe Strain on Credulity.

As a method of sending a missile to the higher, and even to the highest, part of the earth's atmospheric envelope, Professor GODDARD's multiple-charge rocket is a practicable, and therefore promising, device. Such a rocket, too, might carry

safe enough, for after the rocket quits our air and really starts on its longer journey, its flight would be neither accelerated nor maintained by the explosion of the charges it then might have left. To claim that it would be is to deny a fundamental law of dynamics, and only Dr. EINSTEIN and his chosen dozen, so few and fit, are licensed to do that.

### His Plan Is Not Original.

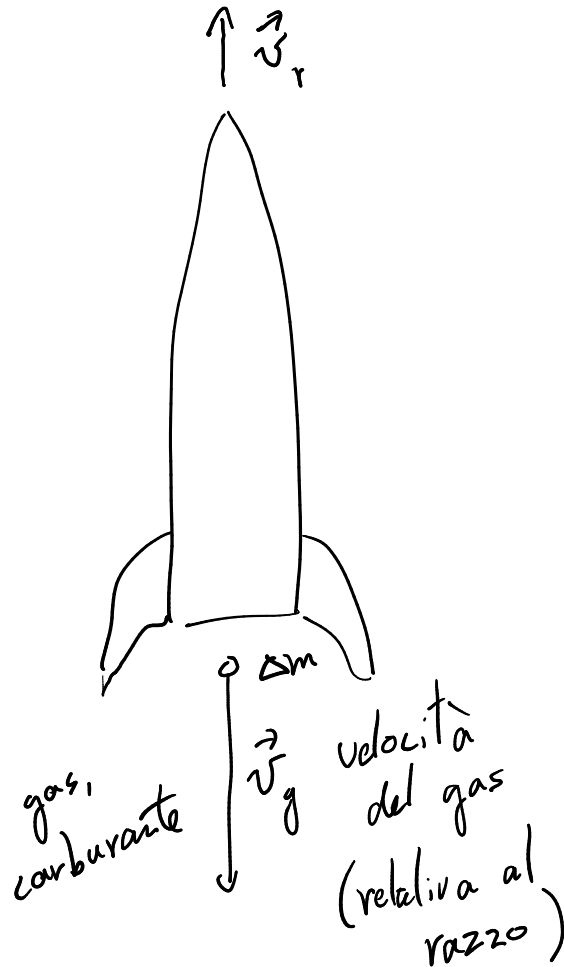
That Professor GODDARD, with his "chair" in Clark College and the countenancing of the Smithsonian Institution, does not know the relation of action to reaction, and of the need to have something better than a vacuum against which to react—to say that would be absurd. Of course he only seems to lack the knowledge ladled out dally in high schools.

Come un metodo per inviare un proiettile verso la parte più alta, persino la parte le più alta, dell'atmosfera terrestre, il razzo a carica multipla del Prof. Goddard è un dispositivo praticabile e quindi promettente.

(...) dopo che il razzo ha lasciato la nostra aria ed ha iniziato davvero il suo viaggio più lungo, il suo volo non sarebbe né accelerato né mantenuto dall'esplosione delle cariche che potrebbe avere ancora. Affermare che lo sarebbe è negare una legge fondamentale della dinamica, e solo il dottor Einstein e la sua dozzina prescelta, pochi e capaci, sono autorizzati a farlo.

Che il Prof. Goddard (...) non conosca la relazione tra azione e reazione, e della necessità di avere qualcosa di meglio di un vuoto contro cui reagire – dire questo sarebbe assurdo.

# Moto dei razzi



$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} \approx \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t}$$

massa totale del razzo

velocità del gas nel sistema laboratorio

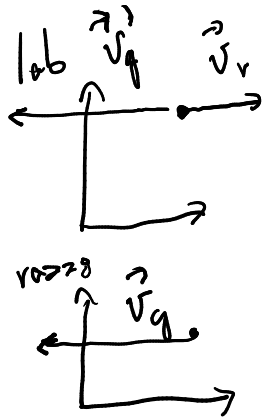
$$\vec{p}_i = m \vec{v}_r$$

$$\vec{p}_f = (m - \Delta m)(\vec{v}_r + \Delta \vec{v}_r) + \Delta m(\vec{v}_g + \vec{v}_r)$$

$$= m \vec{v}_r - \cancel{\Delta m \vec{v}_r} + m \Delta \vec{v}_r - \cancel{\Delta m \Delta \vec{v}_r} + \Delta m \vec{v}_g + \cancel{\Delta m \vec{v}_r}$$

$$= \frac{1}{\Delta t} (m \Delta \vec{v}_r + \Delta m \vec{v}_g - \underbrace{\Delta m \Delta \vec{v}_r}_{\text{tende a 0}})$$

$$= m \frac{\Delta \vec{v}_r}{\Delta t} + \vec{v}_g \frac{\Delta m}{\Delta t}$$

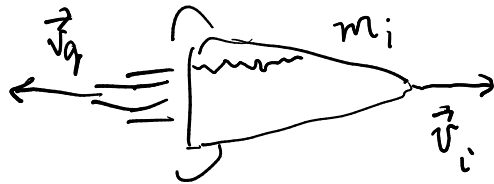


# Moto dei razzi

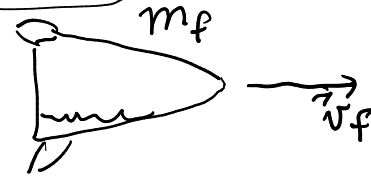
limite  $\Delta t \rightarrow 0$        $\frac{\Delta \vec{v}_r}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r$        $\frac{\Delta m}{\Delta t} \rightarrow \frac{dm}{dt}$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}_r + \underbrace{\vec{v}_g \frac{dm}{dt}}_{\text{spinta del razzo}}$$

Nello spazio:  $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$



$$m\vec{a}_r = -\vec{v}_g \frac{dm}{dt}$$



Componente orizzontale:  $m \frac{dv}{dt} = -v_g \frac{dm}{dt}$        $\frac{dv}{dt} = -\frac{v_g}{m} \frac{dm}{dt}$

$$\frac{d}{dt} \ln(m(t)) = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$$

# Moto dei razzi

$$\frac{dv}{dt} = -v_g \frac{d}{dt} \ln(m(t))$$

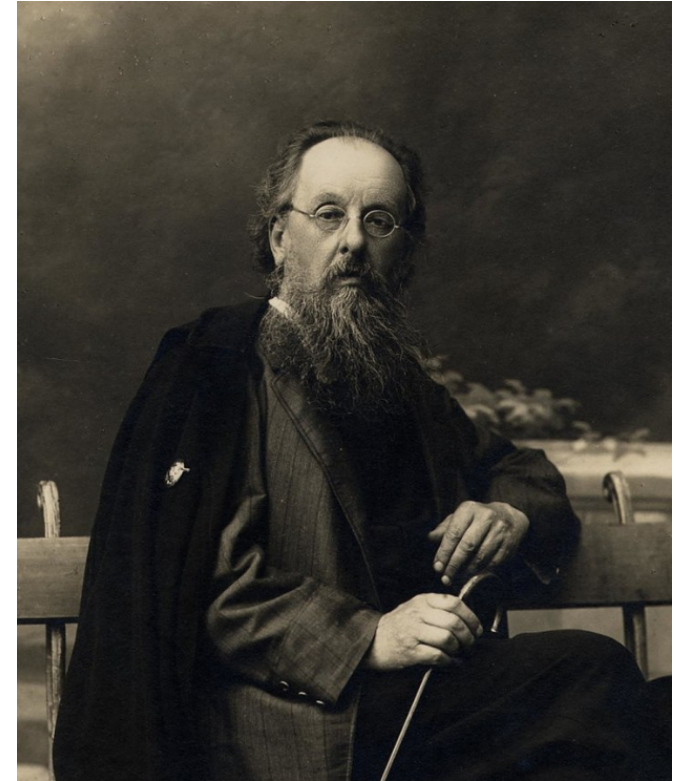
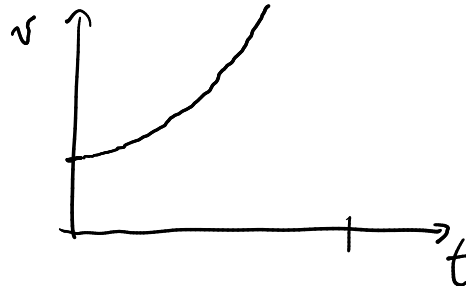
$$v_f - v_i = -v_g [\ln(m_f) - \ln(m_i)]$$

$$v_f - v_i = \Delta v = -v_g \ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right) \quad \text{eq. di Ciolkovskij}$$

$$\frac{m_f}{m_i} < 1$$

anche:

$$v(t) = v_i - v_g \ln\left(\frac{m(t)}{m_i}\right)$$



Tsiolkovsky (1857-1935)  
Ciolkovskij