SISTEMI DINAMICI

Sistemi dinamici lineari

Equazioni differenziali lineari

→ spazio delle fasi → $\mathbb{R}^n$

$$\frac{d}{dt} x = f(x) \qquad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineare}$$

→ può essere sempre rappresentata

da una matrice $n \times n$

$A \in Mat(n \times n; \mathbb{R})$ e $f(x) = A \cdot x$

il sistema dinamico diventa

$$\dot{x} = A x$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Idea: se abbiamo che v è un

autovettore di A $\quad (Av = \lambda v)$

Se scegliamo

$$x(t) = c(t)\, v$$

allora $\dot{x}(t) = \boxed{\dot{c}(t)\, v}$

$$= A\,x(t) = A\,c(t)\,v$$

$\dot{x} = Ax$

$$= c(t)\,A\,v = \boxed{c(t)\,\lambda\,v}$$

$$\dot{c}(t) = \lambda\,c(t) \Rightarrow c(t) = c_0 e^{\lambda t}$$

Abbiamo trovato $x(t) = c_0 e^{\lambda t} v$

$\mathbb{R}^n$ $\qquad c_0 e^{\lambda t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$Av = \lambda v \longrightarrow Av - \lambda v = 0$$

$(A - \lambda \mathbb{1})$ ha un ha una banda

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \exists\ p(\lambda)$$

polinomio caratteristico : problema

agli autovalori.

Assumiamo autovalori distinti

autovalori → reali

→ complessi coniugati

Ad esempio: A con autovalori

distinti e reali

$\lambda_1 \dots \lambda_n$ autovalori

$v_1 \dots v_n$

$$P = [v_1 \dots v_n]$$

$$P^{-1} A P \longrightarrow B = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$$

$$x \longrightarrow y \qquad \dot{y} = \operatorname{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)\, y$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} a_1 e^{t\lambda_1} \\ \vdots \\ a_n e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = P\, y(t)$$

Esempio:

$$\dot{x} = A x$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_{3\times 3}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

$$B = \operatorname{diag}(1, 2, -1)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 \\ \dot{y}_3 = -y_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1(t) = a e^{t} \\ y_2(t) = b e^{2t} \\ y_3(t) = c e^{-t} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ $\qquad\qquad$ $\lambda = 2$ $\qquad\qquad$ $\lambda = -1$

$$x(t) = P\, y(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a e^{t} \\ b e^{2t} \\ c e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a e^{t} \\ -2a e^{t} + b e^{2t} \\ a e^{t} + c e^{-t} \end{pmatrix}$$

Similmente: se A ha autovalori complessi e distinti $\alpha \pm i\beta$

$A v = (\alpha + i\beta)\, v$ $\qquad\qquad$ $w \to$ $\mathrm{Re}\, v$

$A \bar{v} = (\alpha - i\beta)\, \bar{v}$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathrm{Im}\, v$

T le cui colonne sono i vettori w

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_k \end{pmatrix}$$

$$D_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

Bisogna capire come risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = \alpha x + \beta y \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

$$x(\tau) = k_1 e^{\tau\alpha} \cos\beta\tau + k_2 e^{\tau\alpha} \sin\beta\tau$$
$$y(\tau) = k_2 e^{\tau\alpha} \cos\beta\tau - k_1 e^{\tau\alpha} \sin\beta(\tau)$$

$$\frac{d}{d\tau} \underbrace{(x+iy)}_{z} = (\alpha - i\beta) \overbrace{(x+iy)}^{z}$$

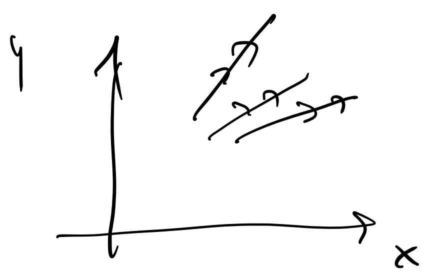
<u>Teorema</u>: A $n \times n$ con autovalori distinti, $\exists\, T$

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & D_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & D_l \end{pmatrix}$$

$$D_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$$

SISTEMI LINEARI PLANARI

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y \end{cases}$$



come sono fatte le traiettorie?

localmente $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

è utile considerare le linee dove $\dfrac{dy}{dx}$ è costante: ISOCLINE

Ad esempio:

$\underline{\dot{x} = 0}$ $\rightarrow$ Traiettorie hanno vettori tangenti verticali (o stazionarie)

$\underline{\dot{y} = 0}$ $\rightarrow$ Tutti i vettori tangenti sono orizzontali (o stazionarie)

Autovalori reali & distinti

Siano $\lambda_1 < \lambda_2$ gli autovalori

- $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
- $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
- $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x \\ \dot{y} = \lambda_2 y \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\lambda_2 y}{\lambda_1 x}$$

$$|y|^{\lambda_1} = k\,|x|^{\lambda_2}$$

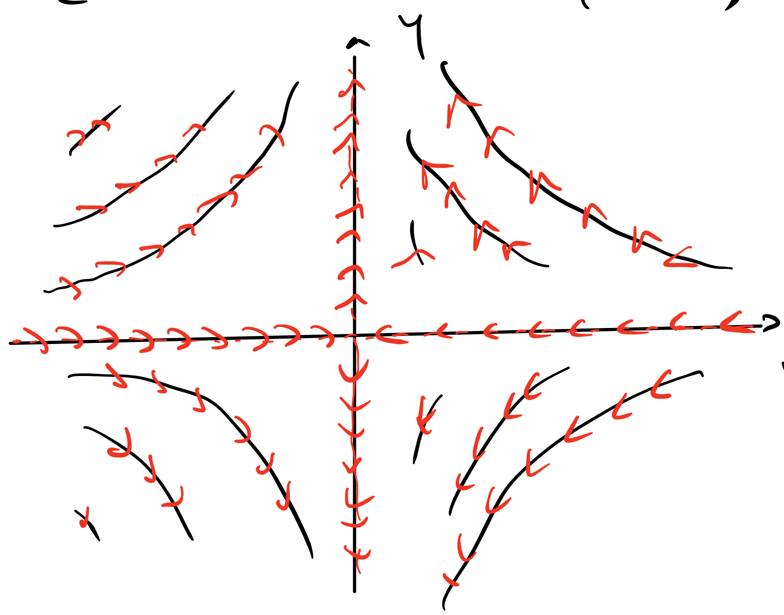
Esempi notevoli

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\lambda_1 < 0 < \lambda_2}$$

$$x(\tau) = \alpha e^{\lambda_1 \tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 \tau} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha e^{\lambda_1 \tau} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è sull'asse delle x

e tende a $(0,0)$ per $\tau \to +\infty$



La chiamiamo "linea stabile"

$\beta e^{\lambda_2 \tau} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ "linea instabile"

Le altre soluzioni vanno (per $\tau \to \infty$) ad infinito in direzione della linea instabile ($\alpha e^{\lambda_1 \tau} \to 0$, $\beta e^{\lambda_2 \tau}$ domina)

$\longrightarrow$ SELLA (o SADDLE)

Esempio $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

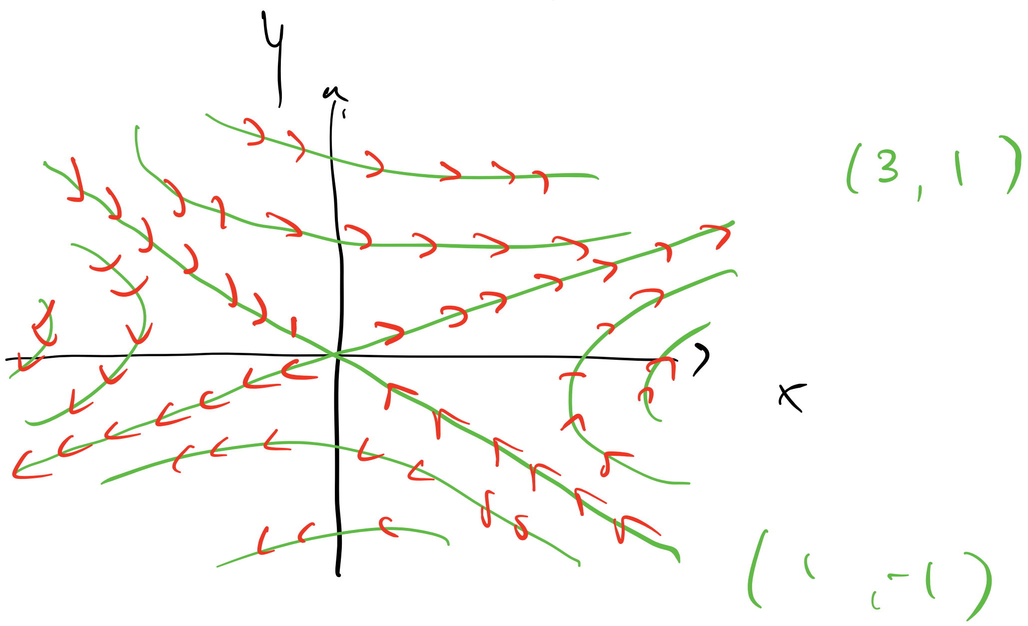
$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 3$$
$$= -1 + \lambda^2 - 3 = 0$$

$\lambda = \pm 2$

$\lambda = +2 \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\lambda = -2 \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$$x(t) = \alpha e^{2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{linea instabile}} + \beta e^{-2t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{linea stabile}}$$



<u>Esempio</u> $\qquad \lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\qquad$ POZZO (SINK)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entrambe tendono a $(0,0)$ per $t \to \infty$

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t}$$

$$y(t) = \beta e^{\lambda_2 t}$$

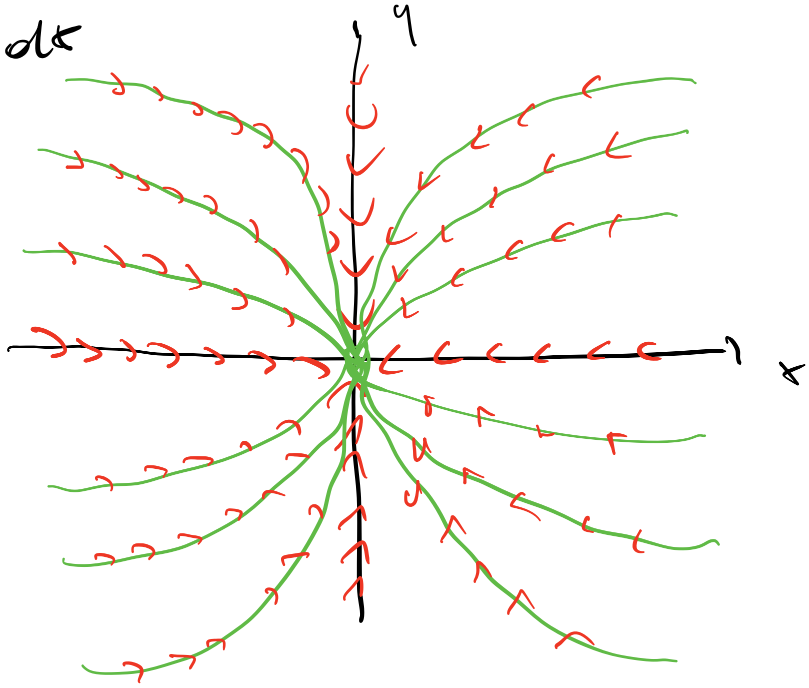
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\lambda_2 \beta e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 \alpha e^{\lambda_1 t}} = \frac{\lambda_2 \beta}{\lambda_1 \alpha} e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t}$$

$\lambda_2 - \lambda_1 > 0$

Allora per $t \to \infty$, le pendenze

$\frac{dy}{dx}$ vanno a $\pm\infty$

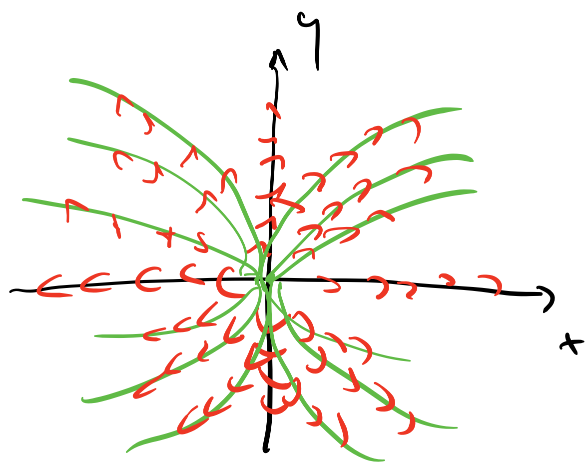
$\lambda_1 < \lambda_2$



Esempio $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

SORGENTE

source



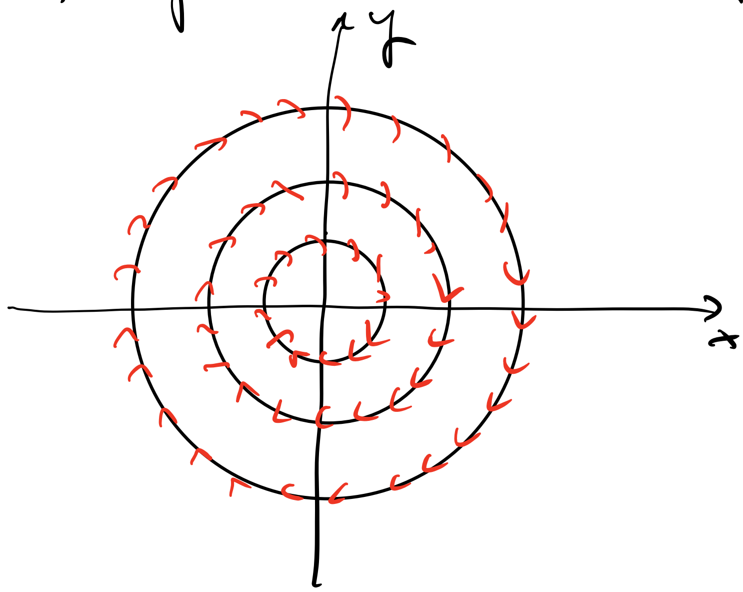
Autovalori complessi

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = \pm i\beta$

si verifica che $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ è autovettore per $\lambda = +i\beta$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos\beta t \\ -\sin\beta t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin\beta t \\ +\cos\beta t \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\beta}$



orario $\beta > 0$

antiorario per $\beta < 0$

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Se abbiamo

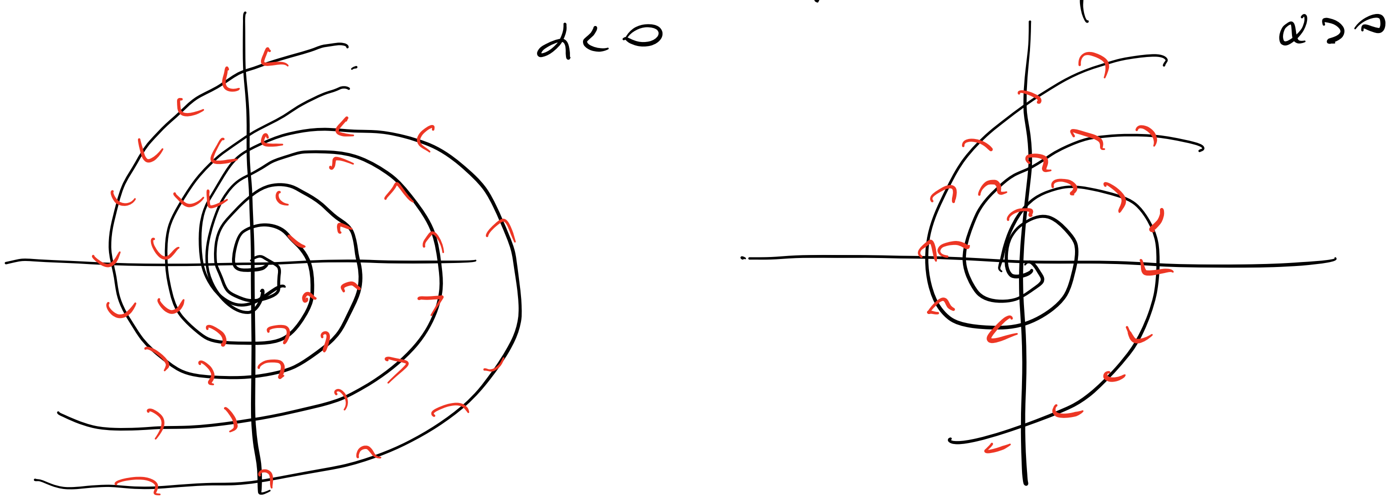
$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y \\ \dot{y} = -\beta x + \alpha y \end{cases}$$

$\lambda = \alpha \pm i\beta$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Verificare che $\longrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = -\beta \end{cases}$



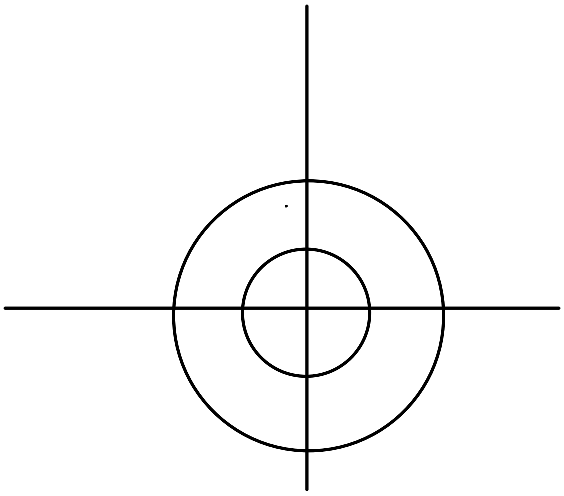
Esercizio

$\dot{x} = Ax \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$

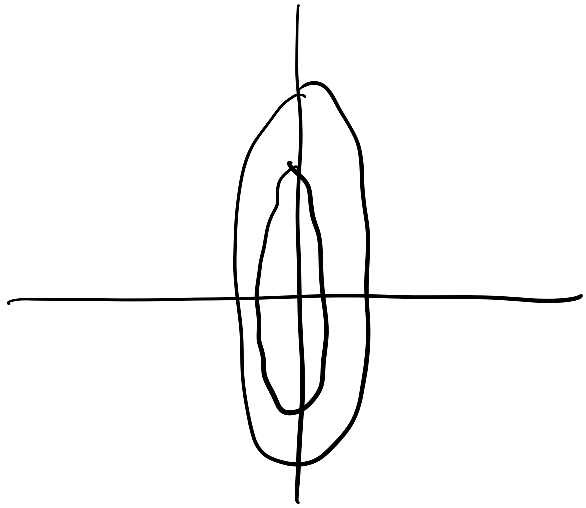
$\rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 2i$

Si vede che $(1, 2i)$ è autovettore per $\lambda = +2i$ $\qquad \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = 0$

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$$



$\dot{y} = By$



$\dot{x} = Ax$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$