MECCANICA RAZIONALE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

→ sistema dinamico

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\underline{y} = \underline{F}(\underline{y}(t)) \\ \\ \underline{y}(t=0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

$$\underline{y} = (q_1, \dots, q_\ell, p_1, \dots, p_\ell)$$

→ Traiettorie nello spazio delle $\underline{y}$

($= \mathbb{R}^{2\ell}$ spazio delle fasi)

Teorema di Lyapunov:

sistema materiale

stabile $\longleftrightarrow$ $\mathcal{H}$ $\quad \frac{d}{dt}\mathcal{H}(y(t)) \leq 0$

H è decrescente (o costante) lungo le orbite

Intuitivamente:

stabile: i moti che partono da configurazioni "vicine" non si allontanano "troppo"

[caso particolare di sistemi conservativi $\longrightarrow$ minimo di $V(\underline{q})$]

Criterio di Dirichlet, può essere riformulato con PLV

$\underline{q} = \underline{q}(t)$

$t \in [a, b]$

$\underline{q}(a) = \underline{q}_I$

$\underline{q}(b) = \underline{q}_F$

$$LV = \int_a^b \sum_{i=1}^{\ell} Q_i \underbrace{\frac{dq_i}{d\tau}\, d\tau}_{\delta q} =$$

$$= -\int_a^b \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{dq_i}{d\tau}} d\tau$$

$$= -\int_a^b \frac{dV}{d\tau}\, d\tau = -\left(V(\underline{q}^F) - V(\underline{q}_E) \right)$$

$$V = V(\underline{q}(\tau)) \longrightarrow \frac{dV}{d\tau} = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \tau}$$

Segue che

$\underline{q}_E$ sia un minimo proprio di V (Criterio di Dirichlet) $\longleftrightarrow$ il LV per andare da $\underline{q}_E$ a $\underline{q}_F$ è negativo.

Stabilità delle rotazioni permanenti di un rigido in precessione

Equazioni di Eulero → precessioni di inerzia

rotazione attorno all'asse principale di inerzia i-esimo → $\begin{cases} \omega_i = \omega_0 \\ \omega_j = 0 \quad i \neq j \end{cases}$

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\,\omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\,\omega_1 \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\,\omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

Equazioni di Eulero

$$\frac{d}{dt}\underline{y} = \underline{F}(\underline{y}(t))$$

$$\underline{y} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Esistono due quantità che si conservano

- l' energia cinetica K
- modulo del momento angolare

$$\frac{d}{dt} \underline{L}(O) = 0$$

$$\| \underline{L}(O) \|^2 = \text{costante} = L_0^2$$

In formule:

1) $2K = J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2K_0$

2) $\| \underline{L}(O) \|^2 = L_0^2 = J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2 + J_3^2 \omega_3^2$

Spazio delle fasi è $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

La traiettoria del sistema (siccome devono soddisfare entrambe le condizioni) devono soddisfare entrambe queste condizioni, e quindi giaciono all'intersezione fra queste due superfici.

Prendiamo 1) e moltiplichiamolo per

$$I_0 = \frac{L_0^2}{2k_0}$$

1) $J_1 \omega_1^2 I_0 + J_2 \omega_2^2 I_0 + J_3 \omega_3^2 I_0 = \frac{2k_0}{2k_0} L_0^2$

2) $J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2k_0$

Sottraiamo le due eq.

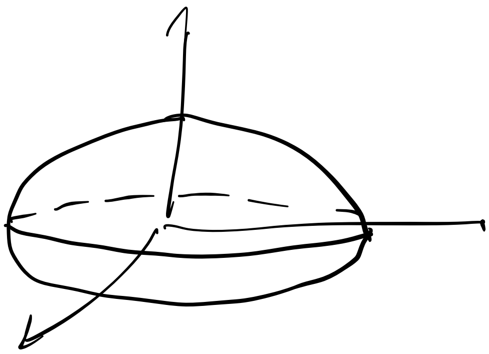
1) $J_1 (J_1 - I_0) \omega_1^2 + J_2 (J_2 - I_0) \omega_2^2 +$

$$+ J_3 (J_3 - I_0) \omega_3^2 = 0$$

2) $J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 = 2k_0$

Notiamo: 2) è l'eq. dell'ellissoide di inerzia $\underline{x} \cdot I_0(\underline{x}) = \text{cost.}$

$\underline{\omega}\cdot I_0(\underline{\omega}) = \text{costante}$



Assumiamo: $J_1 < J_2 < J_3$

$\Rightarrow \quad J_1 < I_0 < J_3$. Infatti:

$$I_0 = \frac{L_0^2}{2K_0} = \frac{J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2}{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2} >$$

siccome $J_1 < J_2 < J_3$

$$> \frac{J_1^2\omega_1^2 + \underline{J_2 J_1}\,\omega_2^2 + \underline{J_3 J_1}\,\omega_3^2}{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2} = J_1$$

$$I_0 = \frac{J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2}{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2} < \frac{J_1 J_3\omega_1^2 + J_2 J_3\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2}{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2}$$

$$= J_3$$

$$\rightarrow \quad J_1 < I_0 < J_3$$

(ovviamente assumo $J_1 < J_2 < J_3$)

Inoltre: prendiamo $\underline{\omega}$ diretto lungo un asse principale di inerzia

$$\underline{\omega} = \omega_i \underline{u}_i \qquad I_0 = \frac{J_i \omega_i^2}{J_i^2 \omega_i^2} = J_i$$

dove i può essere $1, 2, 3$

Per le rotazioni permanenti può essere $I_0 = J_1, J_2$ o J_3

·) Se $I_0 = J_1$

Prendiamo l'eq 1

$$J_2 \underbrace{(J_2 - J_1)}_{>0} \omega_2^2 + J_3 \underbrace{(J_3 - J_1)}_{>0} \omega_3^2 = 0$$

$$J_1 < J_2 < J_3 \longrightarrow \begin{array}{l} J_2 - J_1 > 0 \\ J_3 - J_1 > 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_2 = \omega_3 = 0$$

•) se $I_o = J_3$ $\rightarrow$ stesso

argomento $\omega_1 = \omega_2 = 0$

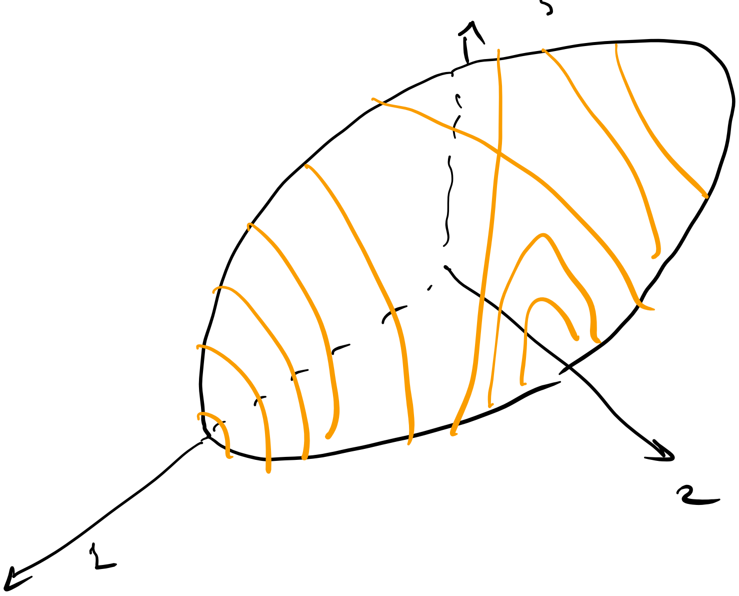
•) se $I_o = J_2$

$$J_3 \underbrace{(J_3 - J_2)}_{>0} \omega_3^2 = J_1 \underbrace{(J_2 - J_1)}_{>0} \omega_1^2$$

$$\sqrt{J_3 (J_3 - J_2)}\, \omega_3 = \pm \sqrt{J_1 (J_2 - J_1)}\, \omega_1$$

$\longrightarrow$ coppia di piani passanti per l'asse 2

Continuando in questo modo



questo permette di determinare graficamente le traiettorie

($J_1 < J_2 < J_3$ $\longrightarrow$ le rotazioni permanente altro dall'asse 2 sono instabili)

LINEARIZZAZIONE

Equazioni di Lagrange per sistemi olonomi, assumiamo vincoli fissi.

$$K = \frac{1}{2}\, \underline{\dot{q}} \cdot A(\underline{q})\, \underline{\dot{q}} \qquad \left(\frac{\partial x_B}{\partial t}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \underline{p} = A(\underline{q})\, \underline{\dot{q}} \qquad \left(p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \left(A^{-1}(\underline{q}) \cdot \underline{p} \right)_i \\ \dot{p}_i = \left(\dfrac{\partial K}{\partial q_i} + Q_i \right) \Bigg|_{\underline{\dot{q}} = A^{-1} \underline{p}} \end{cases}$$

obbiamo usato $\frac{d}{dt} p_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right)$

Supponiamo di avere una configurazione di equilibrio $\underline{q}_E$

Poniamo

$$\to \underline{q} = \underline{q}_E + \eta \underline{x}(\tau)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \to \underline{\dot{q}} = \underline{0} + \eta \underline{\dot{x}}(\tau) \\ \to \underline{p} = \underline{0} + \eta \underline{v}(\tau) \end{cases}$$

Andiamo a vedere le equazioni:

1) $$\dot{q}_i = \left(A^{-1}(\underline{q})\, \underline{p} \right)_i \qquad i = 1, n\ell$$

$$\dot{q}_i - \left(A^{-1}(\underline{q}), \underline{p} \right)_i = 0$$

$$= \eta \dot{x}_i - \left(A^{-1}(\underline{q}_E + \eta \underline{x})\, \eta \underline{v} \right)_i$$

Prendiamo η "piccolo" $\longrightarrow$ legittima l' espansione in serie di Taylor

$$\simeq \eta \left(\dot{x}_i - A^{-1}(\underline{q}_E)\, \underline{v} \right)_i + O(\eta^2)$$

$$A^{-1}(q_E + \eta \underline{x}) \sim \underbrace{A^{-1}(\underline{q}_E)}\, + \eta \frac{\partial A^{-1}}{\partial \eta} \cdots$$

Le equazioni linearizzate:

$$\dot{\underline{x}} = A^{-1}(\underline{q}_E)\, \underline{v}$$

2) $$p_i = \left(\underbrace{\frac{\partial k}{\partial q_i}}_{O(\eta^2)} + \underset{\eta Q_i^1 + O(\eta^2)}{Q_i} \right) \Bigg|_{\dot{\underline{q}} = A^{-1} \underline{p}}$$

$$\to \underline{p_i} = 0 + \underline{\eta}\, v_i$$

$$\to \frac{\partial k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}} \cdot A(\underline{q})\, \dot{\underline{q}} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{2} \eta \dot{\underline{x}} \cdot A(\underline{q}_E + \eta \underline{x})\, \eta \dot{\underline{x}} \right)$$

$\tau \quad q \to x$

$= O(\eta^2)$

Ci rimane $Q_i(\underline{q}_\varepsilon + \eta \underline{x}, \eta \underline{\dot{x}})$

$$= \underbrace{Q_i(\underline{q}_\varepsilon, 0)}_{=0} + \eta \frac{d}{d\eta} Q_i(\underline{q}_\varepsilon + \eta \underline{x}, \eta \underline{\dot{x}})\Big|_{\eta=0}$$

$$+ \underline{O(\eta^2)}$$

$$= \eta Q_i^L$$

$$Q_i^L := \frac{d}{d\eta} Q_i(\underline{q}_\varepsilon + \eta \underline{x}, \eta \underline{\dot{x}})\Big|_{\eta=0}$$

Mettendo tutto insieme:

$$\begin{cases} \underline{\dot{x}} = A^{-1}(\underline{q}_\varepsilon)\, \underline{v} \\ \underline{\dot{v}} = \underline{Q}^L \end{cases}$$