SISTEMI DINAMICI

Sistemi dinamici lineari

$$\frac{d}{dt} x = f(x) \qquad f \text{ operatore lineare}$$

$$f \longmapsto A \in Mat(n \times n; \mathbb{R})$$

Sistemi dinamici lineari servono come approssimazione di sistemi dinamici non lineari

A autovalori reali $\longrightarrow e^{\lambda t} \begin{pmatrix} v_1 \\ | \\ v_n \end{pmatrix}$

autovalori complessi coniugati $\longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

$\alpha \pm i\beta$

$$\begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_n \end{pmatrix}$$

$$A \longrightarrow P^{-1} A P \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 \times \lambda_n & & & 0 \\ & D_1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D_e \end{pmatrix}$$

Esponenziale di una matrice

Idea: $\dot{x} = Ax \qquad x(t) = e^{tA} x_0$

⌈ come per $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad \dot{x} = \alpha x$

$x = e^{\alpha t} x_0$ ⌋

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$E \longrightarrow E$$

Se x è un vettore, $|x|$ è la sua norma (euclidea)

<u>Def</u> Definiamo

$$\|T\| = \sup_{|x|=1} |T(x)|$$

"norma uniforme"

<u>Def</u> T è detto limitato se

$$\|T\| < \infty$$

Rappresento T con una matrice

$$|T(x)|^2 = x^T A^T A x = x^T S x \geq 0$$

$S = A^T A$ è simmetrica $\quad S^T = (A^T A)^T = A^T A$

$\exists\, O$ ortogonale t.c. $S = O^T \Lambda O$

con $\Lambda = \mathrm{diag}(z_1^2, z_2^2, \dots, z_n^2)$

Gli elementi z_i = le radici quadrate non negative

si dicono "valori singolari di T"

$$|T(x)|^2 = (O^T y)^T S (O^T y)$$

$$x = O^T y$$

$$= y^T O O^T \Lambda O O^T y = y^T \Lambda y$$

$$= \sum_{i=1}^{n} z_i^2 y_i^2$$

allora $|T(x)| = \sqrt{\sum_i z_i^2 y_i^2}$

$$|y| = 1$$

$$\|T\| = \max_{i=1,\dots,n} z_i < \infty$$

Ogni matrice descrive un operatore limitato

Def $$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$$

Teorema La serie $\sum_k \frac{T^k}{k!}$ è assolutamente convergente per ogni operatore T limitato.

Dim Si può vedere che se T è limitato, allora T^k è limitato

Poniamo $\|T\| = \alpha > 0$

Allora $\left\| \frac{T^k}{k!} \right\| \leq \frac{\alpha^k}{k!}$

Ma $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}$ converge a e^α

$\Rightarrow$ la serie esponenziale per T converge assolutamente

:)

Alcune proprietà

1) $\exp(PTP^{-1}) = P e^{T} P^{-1}$

Infatti: $(PTP^{-1})^{k} = PT^{k}P^{-1}$

$$PTP^{-1}PTP^{-1}PTP^{-1}\dots$$

$$P\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{T^i}{i!}\right)P^{-1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(PTP^{-1})^i}{i!}$$

l'identità segue per $n \to \infty$

2) Supponiamo $AB = BA$. Allora

$$e^{A+B} = e^{A} e^{B}$$

Possiamo usare il teorema binomiale

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$e^{A+B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} A^k B^{n-k}$$

$$= \sum_{0 \le k \le n < \infty} \frac{1}{k!\,(\underbrace{n-k}_{\ell})!} A^k B^{\underbrace{n-k}_{\ell}}$$

poniamo $\ell = n-k$

$$k \le n \Rightarrow n-k \ge 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{\ell!} A^k B^{\ell} =$$

$$= e^A \cdot e^B$$

3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

segue da 2) con $B = -A$

4) Supponiamo di avere

$$T v = \lambda v \Rightarrow e^T v = e^\lambda v$$

λ reale

Infatti:

$$e^T v = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!} v \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k v}{k!} = e^\lambda v$$

5) Se $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

allora $\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

$$\Rightarrow e^\Lambda = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Commento non la useremo, ma

se $[A, B] = AB - BA \neq 0$

$$e^A \cdot e^B = e^C$$

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] - \frac{1}{12}[B,[A,B]] + \dots$$

Formula di Baker - Campbell - Hausdorff

<u>Teorema</u> Sia $A \in Mat_{\mathbb{R}}(n \times n)$,

allora

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(T=0) = x_0 \end{cases}$$

ha l'unica soluzione $x(T) = e^{TA} x_0$

<u>Dim</u> Per la proprietà 2)

$$\frac{d}{dT} e^{TA} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(T+h)A} - e^{TA}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{TA} e^{hA} - e^{TA}}{h}$$

$$= e^{TA} \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^{hA} - I}{h} \right) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} = I + hA + h^2 \dots$$

$$= e^{TA} A$$

$$\frac{d}{dT} \left(\underbrace{e^{TA} x_0}_{x} \right) = A e^{TA} x_0 = A x$$

Dimostriamo l'unicità: supponiamo

$y(T)$ sia soluzione

$$\frac{d}{dT} \left(e^{-TA} y(T) \right) = -A e^{-TA} y(T) + e^{-TA} \frac{d}{dT} y(T) =$$

$$= -A e^{-TA} y(T) + e^{-TA} A y(T)$$

$$= \left(-A e^{-TA} + e^{-TA} A \right) y(T) = 0$$

abbiamo dimostrato che

$$e^{-TA} y(T) = \text{costante} = y_0$$

e quindi $y(\tau) = e^{\tau A} y_0$

Se imponiamo le condizioni iniziali $\Rightarrow$ $y_0 = x_0$ $\Rightarrow$ $x(\tau) = y(\tau)$

ba

Quindi per risolvere $\dot{x} = Ax$ dobbiamo calcolare $e^{\tau A}$.

A autovalori distinti:

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & D_\ell \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$e^{\tau A} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \tau} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\lambda_k \tau} & & & \\ & & & e^{D_1 \tau} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{D_\ell \tau} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$e^{P^{-1}\tau A P} = P^{-1} \underline{e}^{\tau A} P =$$

$$e^{\tau A} = P \left(\underline{\qquad} \right) P^{-1}$$

L'ultimo ingrediente è $e^{\tau D}$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \alpha \, \overset{\mathbb{1}}{\overset{\shortparallel}{id_{2\times 2}}} + \beta \sigma$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbb{1}, \sigma] = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

$$\sigma \cdot \sigma \cdot \sigma = \sigma \cdot (-\mathbb{1}) = -\sigma$$

$$\sigma \cdot \sigma \cdot \sigma \cdot \sigma = \sigma \cdot (-\sigma) = -(-\mathbb{1}) = \mathbb{1}$$

Allora

$$e^{\tau\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k \sigma^k}{k!} =$$

$$= \mathbb{1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \tau^{2j}}{(2j)!} + \sigma \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \tau^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau \\ -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}$$

$$e^{\tau D} \underset{\substack{\uparrow \\ [\mathbb{1}, \sigma] = 0}}{=} e^{\tau\alpha \mathbb{1}} e^{\tau\beta\sigma} = e^{\tau\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta\tau & \sin\beta\tau \\ -\sin\beta\tau & \cos\beta\tau \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ sappiamo cos'è $e^{\tau A}$

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_\cdot & & \\ & & D_1 & \\ & & & \ddots D_\cdot \end{pmatrix}$$

$$e^{\tau A} = P \begin{pmatrix} e^{\tau\lambda_1} & & & \\ & \ddots e^{\tau\lambda_k} & & \\ & & e^{\tau D} & \\ & & & \ddots e^{\tau D_\ell} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Commento

$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad v \in \ker(T - \lambda \mathbb{1})$

$E \longrightarrow E$

Se λ_k ha una molteplicità algebrica

m_k :

$$E_k = \ker\left[(T - \lambda_k \mathbb{1})^{m_k} \right]$$

Si può dimostrare che sono invarianti rispetto all'azione di T

$$(v \in E_j \Rightarrow Tv \in E_j)$$

<u>Teo</u> [Hirsch - Smale]

Sia $T : E \longrightarrow E$ con autovalori

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ distinti

Allora $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$

dove $\dim E_i$ = molteplicità algebrica di λ_i

Una conseguenza è che gli

autovettori generalizzati

$(T - \lambda_k I)^{m_k} v = 0$

sono una base di $\tilde{V}_j$.

Allora $P = [v_1 \dots v_n]$

e possiamo definire $S = P \Lambda P^{-1}$

dove $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_n)$

$\rightarrow$ contiene l'informazione sugli

autovalori

Una matrice S di questo tipo

si dice semisemplice.

<u>Teo</u> Dato A, $S = P \Lambda P^{-1}$

Allora $N = A - S$ è tale

che $[N, S]$ e N è

nilpotente ($\exists\, l$ t.c. $N^l = 0$)

Teo $A = N + S$ è unica, con

S semisemplice, N nilpotente

$$e^{tA} = e^{tS} e^{tN} =$$

$$= P e^{t\Lambda} P^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\ell} \frac{(tN)^i}{i!} \right)$$

dove ℓ è l'indice per cui $N^{\ell} = 0$