

## Correzioni relativistiche alle energie dell'atomo di H

Tutto è stato discusso in termini di un H non relativistica, vediamo le correzioni relativistiche che danno una struttura conosciuta come **Struttura Fine** (correzioni che vengono dalla equazione d'onda relativistica)

-Non faremo il trattamento formale (Dirac in potenziale centrale  $(E - c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - \beta mc^2)\Psi = 0$ )

-ma perturbativo con  $H = H_0 + H'$  e  $H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{(4\pi\epsilon_0)r}$

I termini perturbativi sono:  $H' = H'_1 + H'_2 + H'_3$

$$H'_1 = -\frac{p^4}{8m^3c^2}$$

$$H'_2 = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

$$H'_3 = \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\mathbf{r})$$

**Correzione relativistica dell' $E_{\text{kin}}$**

**Correzione Spin-Orbita:**  
accoppiamento tra  
Spin dell'e- con il  
momento angolare  
orbitale

**Termine di Darwin:** Riduzione  
dell'interazione elettrostatica e- nucleo  
dovuto alla natura quantistica  
dell'elettone (quantum fluctuations)

### Correzione relativistica dell' $E_{\text{kin}}$

Sostituendo l'energia cinetica classica ( $p^2/2m$ )

Con l'espressione relativistica  $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

Ed espandendo si ottiene una correzione piccola (prop  $(Z\alpha)^2$ ):  $-\frac{p^4}{8m^3 c^2}$

Diagonale in  $L^2, S^2, L_z, S_z$  e quindi la correzione è data al primo ordine perturbativo da:  $= -\frac{1}{2mc^2} \langle \psi_{nlm} | T^2 | \psi_{nlm} \rangle$

Cha ci da una correzione:

$$\Delta E_1 = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left[ \frac{3}{4} - \frac{n}{l + 1/2} \right]$$

## Interazione Spin Orbita

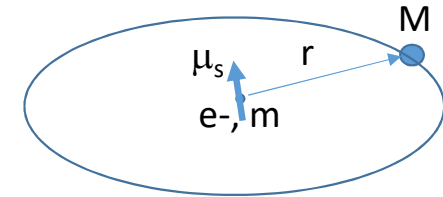
Interazione tra il momento di dipolo magnetico di Spin di un elettrone e il campo magnetico interno di un atomo che dipende dal momento angolare orbitale dell'elettrone

Un descrizione «efficace» di questo effetto si può ricavare ponendosi nel sistema di riferimento dell'elettrone in cui il nucleo con carica  $Ze$  in movimento genera un campo magnetico che interagisce con gli spin degli elettroni.

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad \text{Campo magnetico visto dall'e-}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{-e} = \frac{1}{er} \frac{dV}{dr} \mathbf{r} \quad \text{Il campo elettrico è legato al potenziale}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{er} \frac{dV}{dr} \mathbf{v} \times \mathbf{r} = \frac{1}{mc^2 e} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{L}$$



E utilizzando il momento magnetico associato allo spin dell'elettrone  $\mu_s = -\frac{e}{m} \mathbf{S}$  (note)

$$H_{so} = -\mu_s \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

Le approx. fatte (moto rettilineo e derivazione intuitiva... )  
il termine corretto ha un fattore 2 aggiuntivo (fattore di Thomas)

$$H_{so} = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

Accoppiamento di spin orbita (anche noto come correzione relativistica... Lo spin nasce dalla trattazione relativistica della meccanica quantistica...

Vedi Formalismo di Dirac (Appendice 7 Brandsen)

## Correzioni spin orbita (note)

Le correzioni sono piccole e verranno trattate perturbativamente.

Partiamo dalla considerazione che  $[H_{SO}, L^2]=0$  ma non commuta con  $L_z$  ed  $S_z$

$[L^2, L_z]=0$  e non agisce sulle coordinate di Spin      La perturbazione mescola stati con diversi valori di  $m$  e  $m_s$

Introduciamo l'operatore momento angolare totale  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

Dalla definizione di  $\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  ricaviamo  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2]$

Si vede bene che  $H_{SO} = \frac{1}{2} \xi(r) [\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2]$  è diagonale nel sottospazio degenere ( $n$  fissato)

Se utilizzo le autofunzioni degli operatori  $L^2, S^2, J^2, J_z$

Che posso scrivere come una combinazione lineare delle autofunzioni  $\chi_{ms} \Psi_{n\ell m}(\mathbf{r})$  degli operatori  $L^2, L_z, S^2, S_z$

$$\Psi_{n\ell jm} = \sum_{m, m_s} \underbrace{\langle \ell \frac{1}{2} m m_s | j m \rangle}_{\text{Coefficients of Clebsch-Gordan}} \chi_{ms} \Psi_{n\ell m}(\mathbf{r})$$

Sommando i momenti angolari abbiamo  
 $j = \ell \pm \frac{1}{2}$  se  $\ell \neq 0$ ,  $j = \frac{1}{2}$  se  $\ell = 0$   
 e quindi  $-j \leq m_j \leq j$  ed assume  $2j+1$  valori

Coefficienti di Clebsch-Gordan  $\langle \ell s m m_s | j m \rangle$  con  $s=1/2$  e  $\ell \leq m \leq \ell$ ;  $m_s = \pm 1/2$

Se volessimo anche scrivere le corrette autofunzioni dovremmo introdurre i coefficienti CG:

$$\Psi_{n, \ell, j = \ell + 1/2, m_j = R_n(r)} = \left[ \sqrt{\frac{\ell + m_j + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m_j - \frac{1}{2}} \chi_+ + \sqrt{\frac{\ell - m_j + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m_j + \frac{1}{2}} \chi_- \right]$$

$$\Psi_{n, \ell, j = \ell - 1/2, m_j = R_n(r)} = \left[ -\sqrt{\frac{\ell - m_j + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m_j - \frac{1}{2}} \chi_+ + \sqrt{\frac{\ell + m_j + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m_j + \frac{1}{2}} \chi_- \right]$$

Ci interessa solo la correzione in energia  $\Delta E_{SO} = \langle \Psi_{n\ell j m_j} | H_{SO} | \Psi_{n\ell j m_j} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \langle R_{n\ell} | \xi(r) | R_{n\ell} \rangle \underbrace{[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]}_{\text{Autovalori di } J^2, L^2 \text{ ed } S^2}$

Usando il potenziale Coulombiano

$$V = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\xi(r) = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

Otteniamo così una correzione  $\langle \frac{1}{r^3} \rangle = \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 \ell(\ell + \frac{1}{2})(\ell + 1)}$

Si ricava così una correzione che possiamo scrivere come:

$$\Delta E_{SO} = \frac{1}{4} mc^2 (Z\alpha)^4 \left[ \frac{j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)}{n^3 \ell(\ell + \frac{1}{2})(\ell + 1)} \right]$$

Dove sostituendo  $s=1/2$  e  $j=\ell \pm 1/2$  otteniamo:

$$\lambda_{n\ell} = \hbar^2 \langle R_{n\ell} | \xi(r) | R_{n\ell} \rangle = \frac{\hbar^2}{2m^2c^2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 \ell(\ell + \frac{1}{2})(\ell + 1)} = \left[ \frac{\frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^4}{n^3 \ell(\ell + \frac{1}{2})(\ell + 1)} \right]$$

$$\Delta E_{SO} = \frac{1}{4} mc^2 (Z\alpha)^4 \left[ \frac{1}{n^3 (\ell + \frac{1}{2})(\ell + 1)} \right] \text{ se } j = \ell + \frac{1}{2}$$

$$\Delta E_{SO} = -\frac{1}{4} mc^2 (Z\alpha)^4 \left[ \frac{1}{n^3 \ell(\ell + \frac{1}{2})} \right] \text{ se } j = \ell - \frac{1}{2}$$

$$\Delta E_{SO} = 0 \text{ se } \ell = 0$$

**Termine di Darwin (note)**

$$H'_3 = \frac{\pi \hbar^2}{2m^2 c^2} \left( \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0} \right) \delta(\mathbf{r})$$

E' diagonale nelle autofunzioni ed agisce solo sui livelli  $\ell=0$  perchè sono gli unici con densità non nulla nell'origine

$$\Delta E_3 = -E_n \frac{(Z\alpha)^2}{n}$$

La correzione in energia è proporzionale alla densità di carica nell'origine

### Correzioni relativistiche alle energie dell'atomo di H

Combinando le tre correzioni ottengo delle correzioni che dependono solo dal valore del momento angolare totale: j

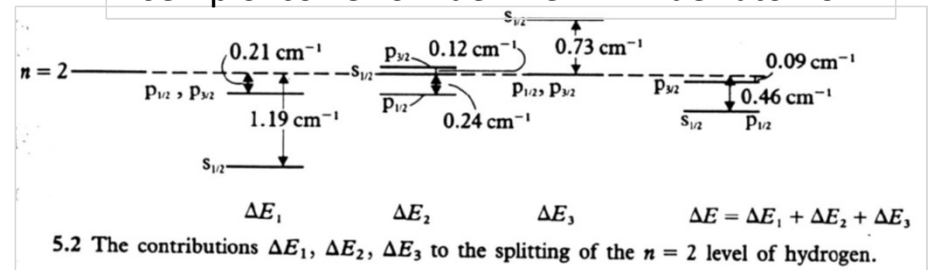
$$\Delta E_{nj} = E_n \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right)$$

E quindi i livelli n si dividono in n livelli uno per ogni valore del momento angolare totale  $j=1/2; 3/2; \dots n-1/2$

$$E_{nj} = E_n \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right]$$

Nota: mentre l'effetto di spin-orbita dipende da  $\ell$ , la somma dei tre termini dipende solo da  $j$ ; quindi a parità di  $j$  (e ovviamente  $n$ ) stati con diversi  $\ell$  sono ancora degeneri

#### Esempio: correzioni dei livelli $n=2$ dell'atomo H

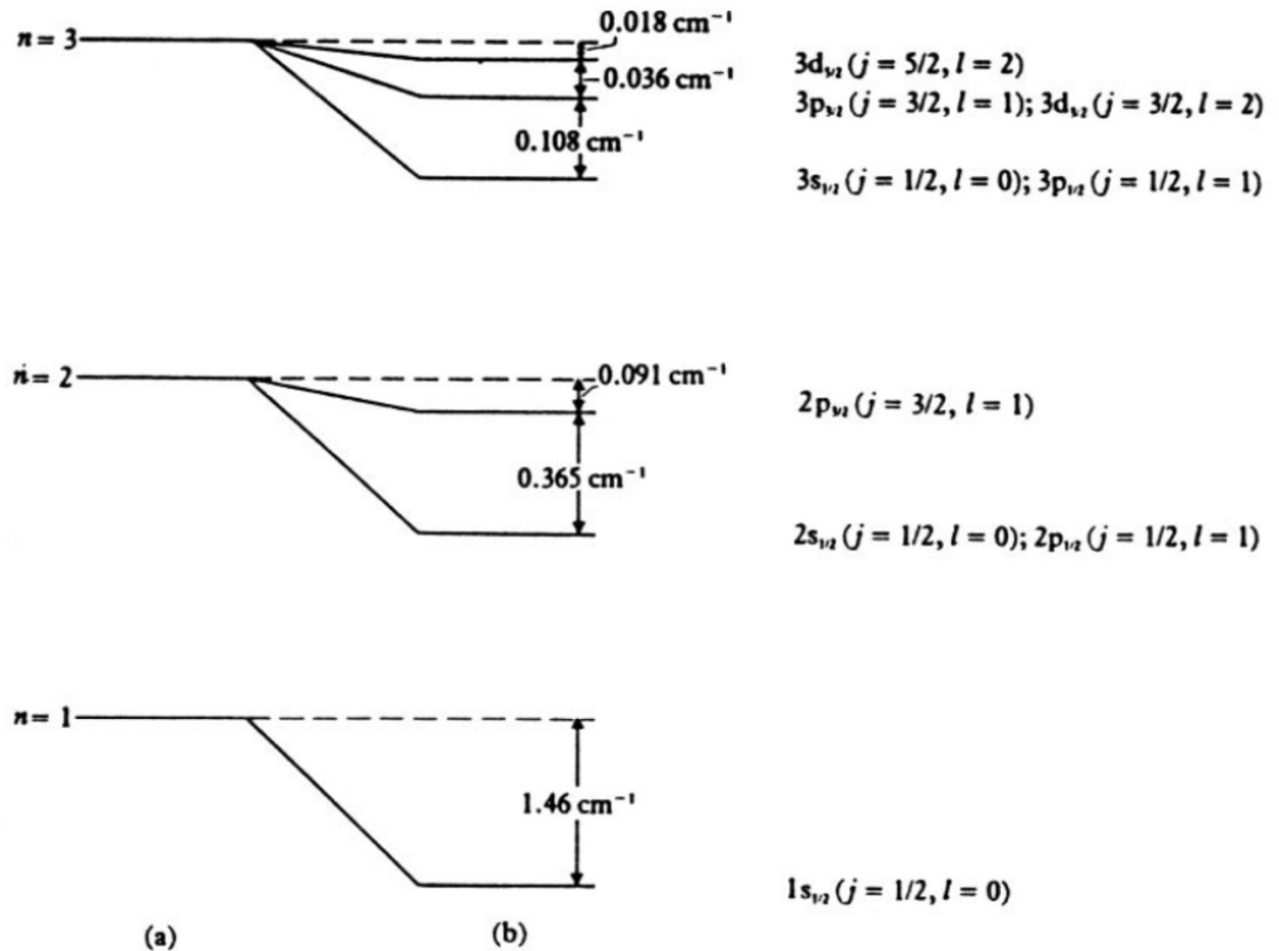


Stati con diverso  $l$  ed uguale  $j$  restano degeneri

$\Delta E < 0$  : Le correzioni relativistiche producono sempre stati **più legati**

$\Delta E$  : Scala con inversamente con  $n^2$ ; i.e. Stati più esterni sono meno perturbati dalle correzioni relativistiche

$\Delta E$  : Gli effetti di spin orbita scalano con  $Z^4$  e quindi effetti relativistici più rilevanti sono osservati per atomi pesanti



5.1 Fine structure of the hydrogen atom. The non-relativistic levels are shown on the left in column (a) and the split levels on the right in column (b), for  $n = 1, 2$  and  $3$ . For clarity, the scale in each diagram is different.