Appello di Logica — Aprile 2022

Docente: Eugenio Omodeo; a.a. 2021/2022

A. Portare in forma congiuntiva normale `3CNF` l'enunciato

$$s \;\;\leftrightarrow\;\; (\,p\,?\,q : r\,)\ ,$$

dove p, q, r, s sono lettere proposizionali distinte e $(\,p\,?\,q : r\,)$ è il costrutto "se p allora q altrimenti r" definito dalla tabellina

p	q	r	$(\,p\,?\,q : r\,)$
v	**v**		**v**
v	**f**		**f**
f		**v**	**v**
f		**f**	**f**

(Qui gli spazi vuoti vanno intesi come entrambe le possibilità **v** / **f**).

B. Spiegare perché sono veri i due enunciati

$$\big(\forall\, x\, (0 \leqslant x \;\;\&\;\; x \leqslant 1)\big) \;\;\&\;\; \neg\, 1 \leqslant 0\,,$$
$$\forall\, x\, \forall\, y\left(x \leqslant y \;\rightarrow\; \big(y \leqslant x \vee \exists\, z\, (\neg\, z \leqslant x \;\;\&\;\; \neg\, y \leqslant z)\big)\right),$$

se si prende come dominio del discorso l'intervallo dei numeri reali compresi fra 0 ed 1 e si interpreta $\leqslant$ come l'usuale ordinamento dei reali.

Riformulare il secondo di questi enunciati impiegando un simbolo di Skolem al posto del quantificatore esistenziale; indicare come potrebbe essere interpretato il simbolo di funzione introdotto da tale skolemizzazione.

C. Si consideri un sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_0 & = & \{\, x_{0,1}, \ldots, x_{0,M_0} \,\} \\ x_1 & = & \{\, x_{1,1}, \ldots, x_{1,M_1} \,\} \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ x_N & = & \{\, x_{N,1}, \ldots, x_{0,M_N} \,\} \end{array}\right. \qquad (*)$$

di equazioni *insiemistiche*, con N ed $M_0, \ldots, M_N$ numeri naturali, nel quale:

- $x_0, \ldots, x_N$ sono le incognite, distinte una dall'altra;
- ogni $x_{i,j}$ è una di dette incognite.

1) Dimostrare che quando ciascuna $x_{i,j}$ figura fra $x_0, \ldots, x_{i-1}$, allora il sistema (*) ha una e una sola soluzione.

(continua) $\longrightarrow$

2) Assumendo che la relazione di appartenenza *non* formi cicli fra insiemi, individuare una condizione necessaria e sufficiente perché (*) ammetta una e una sola soluzione.

D. Un noto teorema asserisce che

> ogni intero $m \geqslant 0$ può venir rappresentato come $m = x^2+y^2+z^2$ per opportuni interi x, y, z se e solo se m <u>non è</u> rappresentabile come $m = 4^h\,(8\,k+7)$ per h, k interi $\geqslant 0$.

Ricavare di qui che gli interi $\geqslant 0$ sono tutti e soli quegli interi n tali che $4\,n+1$ può venir rappresentato come $$4\,n+1 \quad = \quad x^2+y^2+z^2 \ .$$