

A.A. 2021-2022

LABORATORIO DI ACQUISIZIONE ED ELABORAZIONE DATI GEOFISICI

UNITA' DIDATTICA 3B - UD3B

**ELABORAZIONE DATI** GROUND PENETRATING RADAR

### SCHEMA UNITA' DIDATTICA

# Analisi (procedura temporanea/reversibile) ed elaborazione (procedura definitiva/irreversibile) dei dati

- 1. Conversione dati
- 2. Editing e Geometrizzazione
- 3. Drift removal (zero time correction)
- 4. Analisi spettrale e filtraggi
- 5. Rimozione delle componenti di rumore coerente (background)
- 6. Analisi e recupero di ampiezza (gain)
- 7. Analisi di velocità (dati multifold)
- 8. Correzione di NMO e Stack (dati multifold)
- 9. Conversione in profondità/migrazione

#### NON SONO POSSIBILI STANDARD DI ELABORAZIONE

Valutare caso per caso se vi sono problematiche particolari ed eventualmente quali strategie adottare per risolverle.

L'UNICA PROCEDURA SEMPRE NECESSARIA e' legata all'ATTENUAZIONE dell'onda elettromagnetica

→ RECUPERO DELL'AMPIEZZA (Gain)

### Fasi tipiche di elaborazione (processing flow)

- 1. Conversione dati
- 2. Editing e Geometrizzazione
- 3. Drift removal (zero time correction)
- 4. Analisi spettrale e filtraggi
- 5. Rimozione delle componenti di rumore coerente (background)
- 6. Analisi e recupero di ampiezza (gain)
- 7. Analisi di velocità (dati multifold)
- 8. Correzione di NMO e Stack (dati multifold)
- 9. Conversione in profondità/migrazione

1) CONVERSIONE - I dati vengono acquisiti in formati diversi a seconda delle strumentazioni utilizzate (dati binari privi o con header di traccia, formato seg2, formati proprietari).

Spesso vengono convertiti in formato SEG-Y che è lo standard per l'acquisizione sismica a riflessione e che consente di utilizzare tutti i software originariamente sviluppati per sismica di esplorazione petrolifera.

#### SEG-Y FORMAT:

Header di file (committente, località, tipo di antenna, operatore,...)

Header di traccia (offset, posizione T ed R, n° T,...)

DATO (matrice Ncampioni x Mtracce)

2) GEOMETRIZZAZIONE ed EDITING > Ai dati vengono assegnati valori nelle header che definiscono in maniera univoca le caratteristiche GEOMETRICHE utilizzate (posizione antenne trasmittenti e riceventi, offset, intervallo tra le tracce, ...)

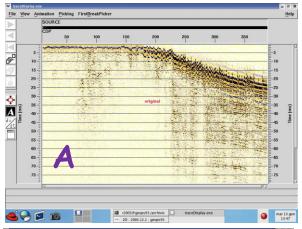
- 2) L' EDITING prevede il Quality Control dei dati e l'individuazione di eventuali problemi legati a malfunzionamento o a rumori, soprattutto sistematici (coerenti), ma anche eventuali spike o tracce aventi ampiezza anomala.
- Algoritmi specifici, di solito nel dominio del tempo, possono venir applicati (muting, despiking, applicazione di soglie, filtri nel dominio del tempo/medie mobili,...)
- 3) DRIFT REMOVAL (Zero time correction) Ci può essere un problema di timing (sincronizzazione) tra tempo di energizzazione (attivazione antenna T) e tempo di inizio ricezione (attivazione antenna R) Essendo noto l'OFFSET (x), fisso o variabile, è SEMPRE possibile spostare (static correction) i campioni registrati nella corretta posizione temporale:

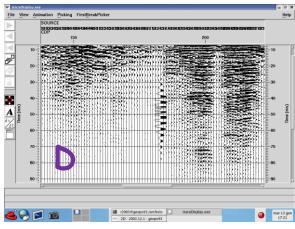
$$\frac{x}{c} = t_{aw}$$

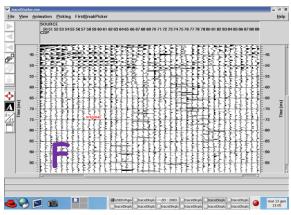
E' consigliabile introdurre volutamente uno sfasamento negativo dell'antenna R

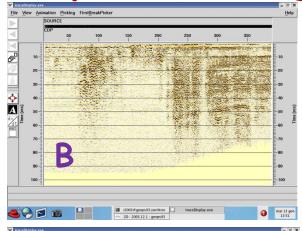
- → inizio registrazione PRIMA dell'attivazione di T
  - 1) Si è sicuri di non aver troncato i dati
- 2) Si dispone di una zona dove SICURAMENTE non ci sono segnali primari -> SOLO rumore ambientale che può così essere valutato.

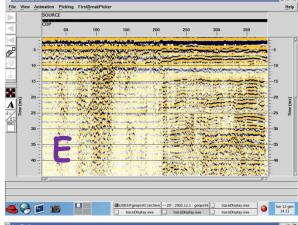
# Esempi di editing

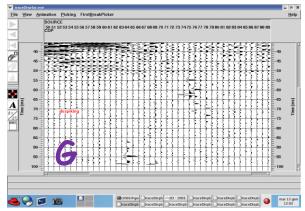


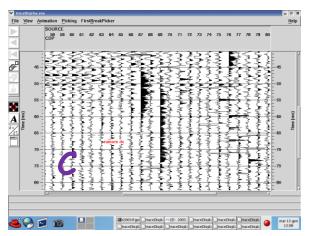












- A) Variazione tempo primi arrivi;
- 3) Flattening
- C) Rumore DC e spikes
- D) Traccia con ampiezza anomala
- E) Rumori coerenti (ringing)
- F) Spikes
- G) De-spiking

4) ANALISI SPETTRALE - FILTRAGGI Si analizzano i dati in domini trasformati (trasformata di Fourier - FT, FFT) Molto utili:

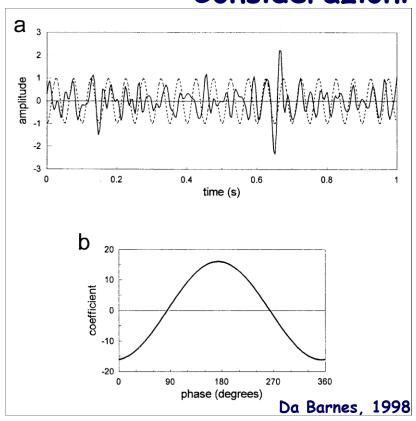
<u>Spettro di Ampiezza</u> → Esprime l'ampiezza delle diverse componenti in f entro una finestra lunga t e larga N tracce → evidenzia variazioni temporali

Spettro  $fx \rightarrow$  esprime la variazione del contenuto in frequenza tra tracce diverse - Evidenzia variazioni laterali

#### DEFINIZIONE DI FILTRI IN FREQUENZA

- 1) ANALISI DEL CONTENUTO IN FREQUENZA IN PORZIONI DIVERSE DEI PROFILI (ad es. prima dell'onda d'aria; sull'onda d'aria/di terra; prime riflessioni, riflessioni profonde, zone a scattering elevato, zone con rumore coerente, parte finale delle tracce) -> STIMA dell'INTERVALLO DI FREQUENZA legato al SEGNALE PRIMARIO.
- 2) SCAN DI FILTRAGGIO
- → PROGETTAZIONE DEL FILTRO, eventualmente time/space variant ATTENZIONE FENOMENI DI GIBBS -> Forma trapezoidale con raccordo più graduale verso le alte f

# 4. Analisi spettrale TRASFORMATA DI FOURIER (FT) Considerazioni pratiche e applicative



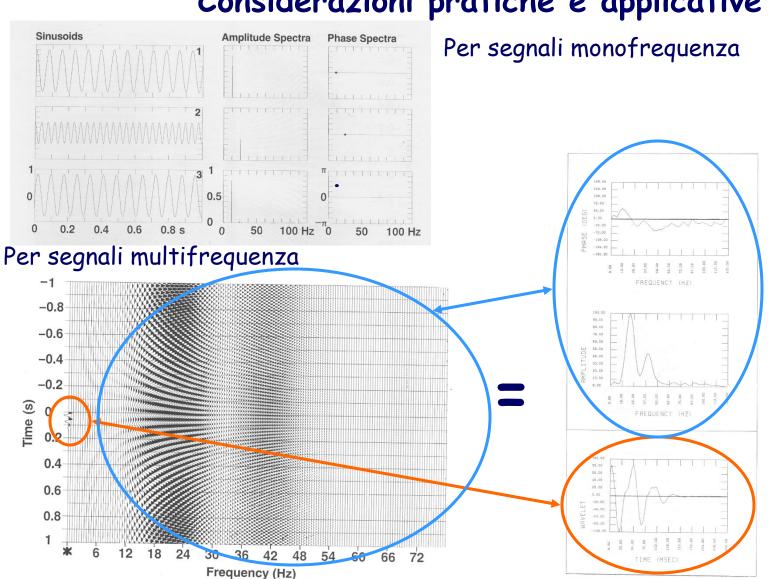
- (a) (Seismic) trace compared with a 20 Hz cosine wave with 175° of phase.
- (b) Correlation coefficients (unnormalized) for the seismic trace and the cosine wave as a function of the phase of the cosine, determined every 5°. The largest coefficient is 16.1 at 175°; these are the approximate Fourier amplitude and phase for this trace at 20 Hz.

MAX coefficiente di correlazione (per ogni frequenza) → AMPIEZZA

BEST angolo di fase → FASE

Quindi la FT determina il massimo coefficiente di correlazione e l'angolo di fase ad esso associato in una traccia sismica per tutte le frequenze

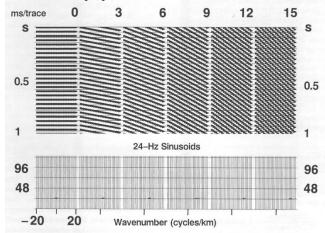
4. Analisi spettrale TRASFORMATA DI FOURIER (FT) Considerazioni pratiche e applicative

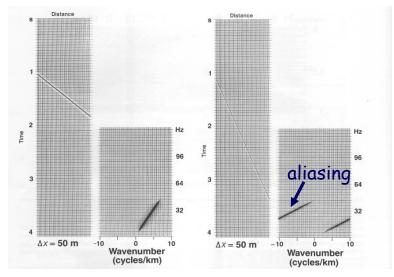


Quindi: la FT esprime il contenuto in frequenza e fase di una sequenza temporale di cui è una rappresentazione analoga e alternativa

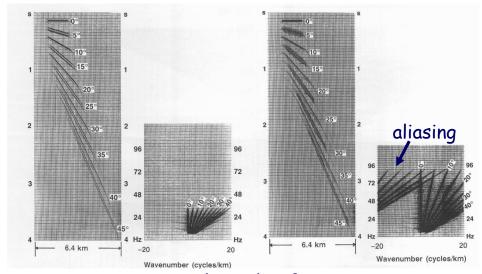
# 4. Analisi spettrale TRASFORMATA DI FOURIER (FT) Considerazioni pratiche e applicative

Per segnali monofrequenza e k=numero d'onda=cost

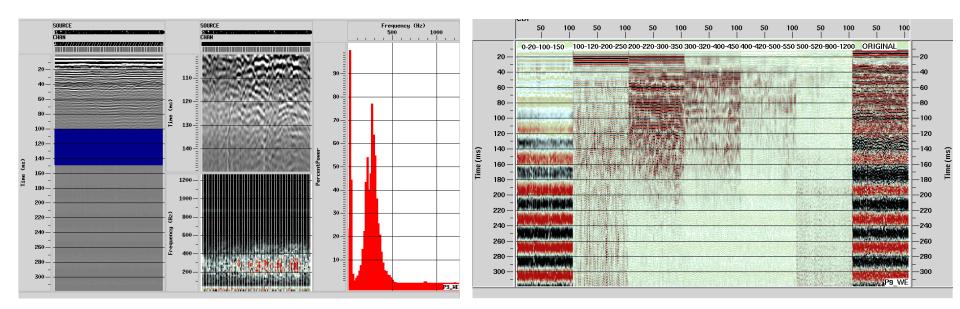




Per segnali multi frequenza e k=numero d'onda costante



Per segnali multi frequenza e k=numero d'onda=variabile LAEG A.A. 2021-2022

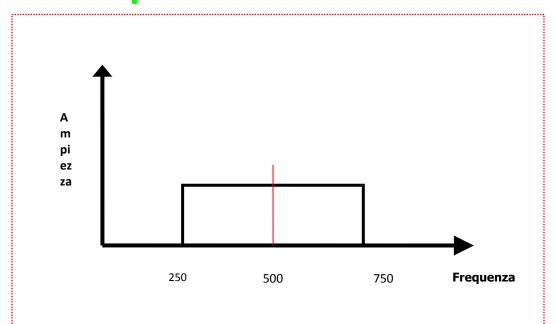


Lo scan di filtraggio va impostato inizialmente su intervalli (di solito di larghezza costante) che coprono un ampio range di frequenze. Successivamente l'analisi può essere concentrata su porzioni spettrali più piccole.

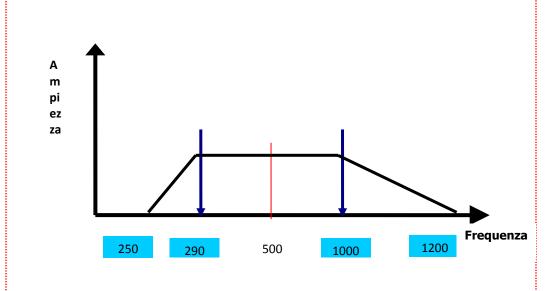
Importanza della fase del filtro (i dati GPR solitamente NON sono a fase minima)
Importanza del tapering → funzione di trasferimento del filtro

Possono essere progettati basati su parametri DIVERSI dalla frequenza o su più parametri (FILTRI fK,  $\tau p$ , ... )

# 4. Analisi spettrale - Funzione di trasferimento UD3B



BOXCAR Centrata a 500MHz



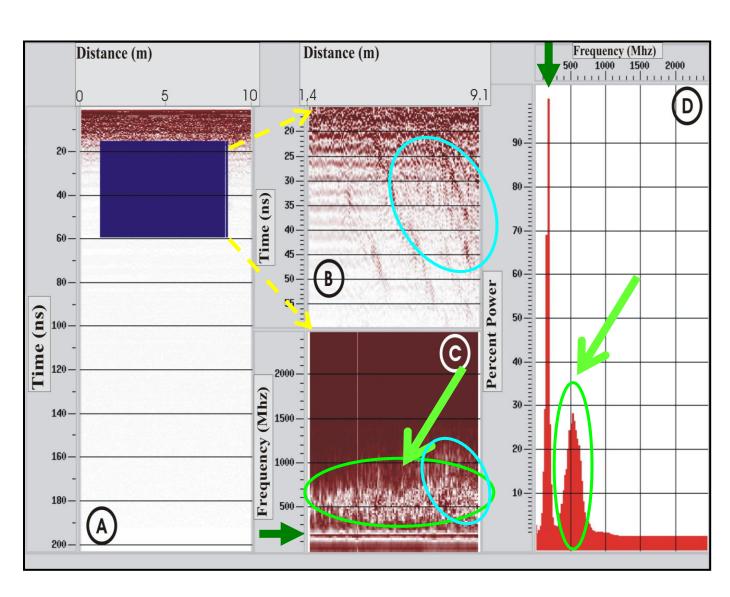
Funzione a "trapezio scaleno" Centrata a 500MHz

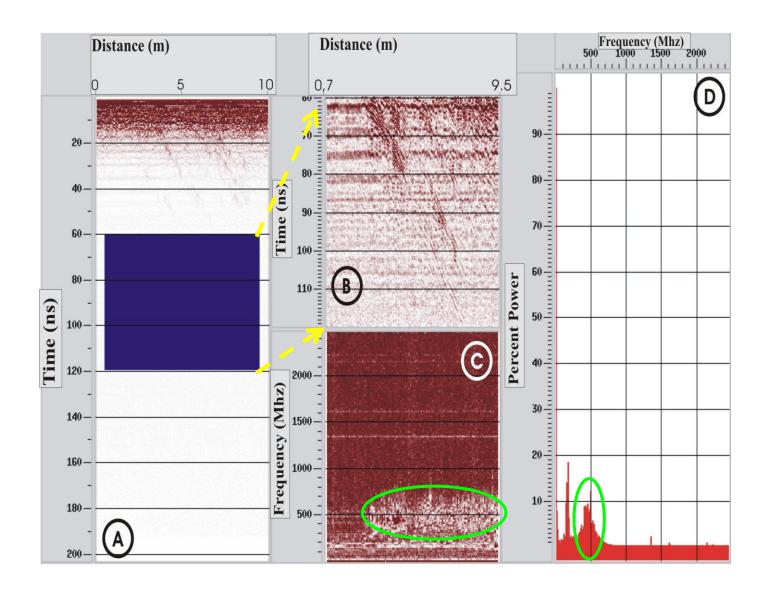
 $A \rightarrow$  sezione tx

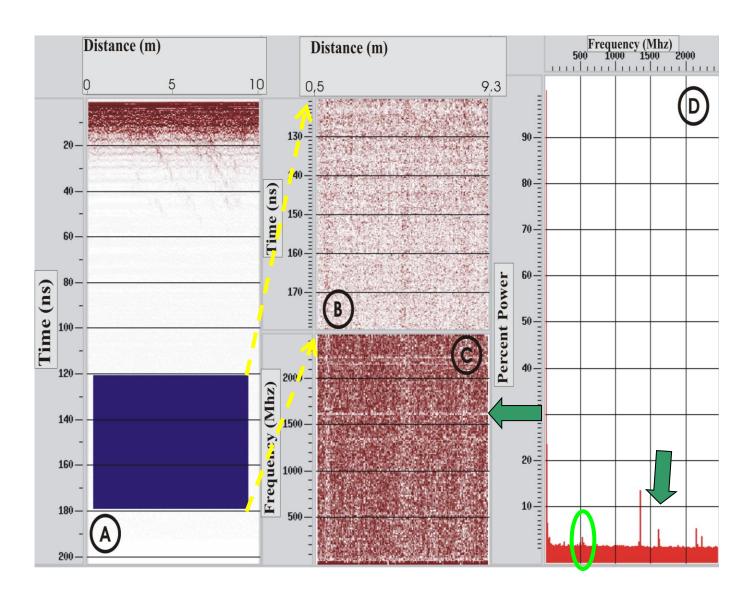
B → dettaglio di A

 $C \rightarrow spettro f-x$ 

 $D \rightarrow spettro A(f)$ 







# 5. Recupero di ampiezza (gain)

Automatic Gain Control (AGC) Algoritmi su finestre temporali mobili con lunghezza definita dell'analista. All'interno di ogni finestra viene calcolato il valore medio di ampiezza dei campioni. Questo valore viene poi utilizzato come valore di normalizzazione di ampiezza all'interno della finestra.

$$\text{Ad esempio } g(t) \textit{IST} = \frac{\textit{fixed RMS value}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |x_i|} \quad \text{oppure } g(t) \textit{RMS} = \frac{\textit{fixed RMS value}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2}} \\ x_i \text{ è l'ampiezza dell'iesimo campione di una traccia e N è il numero di campioni all'interno della finestra di calcolo. }$$

L'algoritmo è di facile utilizzo, ma fortemente dipendente dalla lunghezza della finestra temporale scelta: se essa infatti è lunga come tutta la traccia lascia i dati così come sono senza apportare nessun recupero d'ampiezza; viceversa se è troppo corta si rischia di amplificare anche il rumore. In ogni caso si effettua una equalizzazione dei vari segnali (e rumori) presenti perdendo la possibilità di discriminarli sulla base dell'ampiezza di riflessione.

Un altro approccio per effettuare il recupero di ampiezza è quello di costruire la curva di decadimento delle ampiezze in funzione del tempo, basandosi sui valori dei dati registrati. L'inverso di tali curve di decadimento costituisce la curva di quadagno che potrà essere applicate al dato.

BUON COMPROMESSO E VERSATILITA' DI IMPIEGO

Utilizzo di funzioni matematiche (crescenti nel tempo) da applicare ai dati.

Tipicamente curve del tipo  $g(t)=A\times Bt\times e^{Ct}$  (Curve ABC)

FACILE UTILIZZO, MA ALGORITMO SCOLLEGATO DAL DATO/NON TIENE CONTO

DI VARIAZIONI LATERALI

# 5. Recupero di ampiezza (gain)

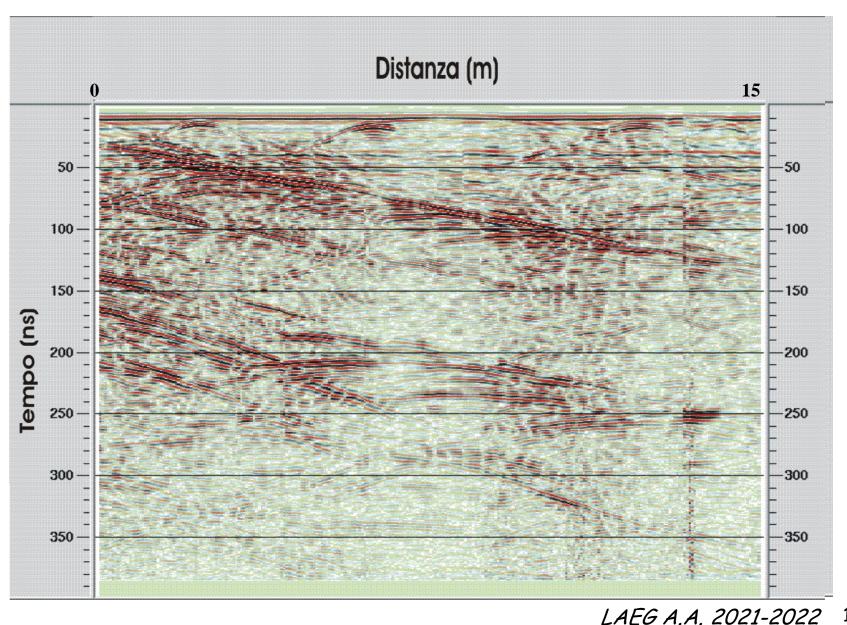
Approccio "true amplitude": si cercano di eliminare analiticamente TUTTI i fattori che concorrono all'attenuazione (Divergenza sferica, attenuazione intrinseca, riflessioni parziali) → ampiezza delle riflessioni dipendente SOLAMENTE dai parametri EM del sottosuolo.

MOLTO DIFFICILE DA OTTENERE/RICHIEDE CONOSCENZA ACCURATA DI VELOCITA', ATTENUAZIONE INTRINSECA,...



# 5. Recupero di ampiezza (gain)

CORREZIONE PER LA DIVERGENZA SFERICA + dB/ns=COST



# 6. Rimozione rumori coerenti (background) LD3B

Un rumore COERENTE è caratterizzato dalla sua regolarità/ripetitività/prevedibilità/ricorsività → COERENZA Il rumore INCOERENTE o CASUALE è del tutto RANDOM ovvero NON prevedibile.

Spesso i dati GPR contengono rumori di origine strumentale

- 1. Componenti DC (o a bassissima frequenza → <1/10 fc)
- 2. RINGING → riverberazioni tra gli estremi dell'antenna ricevente che, ad intervalli di tempo regolari, diventa trasmittente secondaria. → presenza di rumori con frequenze simili a quelle del segnale e tempi di registrazione COSTANTI.

#### STRATEGIE DI RIMOZIONE (di base):

1. Filtri taglia basso nel dominio delle f

(Oppure, se rumore REALMENTE DC, calcolo del valore medio di ogni traccia e sottrazione di questo valore da TUTTI i campioni)

2. Filtraggi nel dominio del tempo basati sull'Ampiezza

Si calcola il valore medio entro finestre mobili estese "n" tracce ed "m" campioni e si sottrae tale valore dal campione "centrale" della finestra.

L'operazione si ripete per TUTTI i campioni.

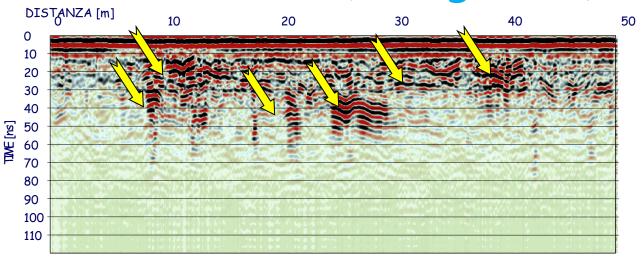
PARAMETRI FONDAMENTALI:

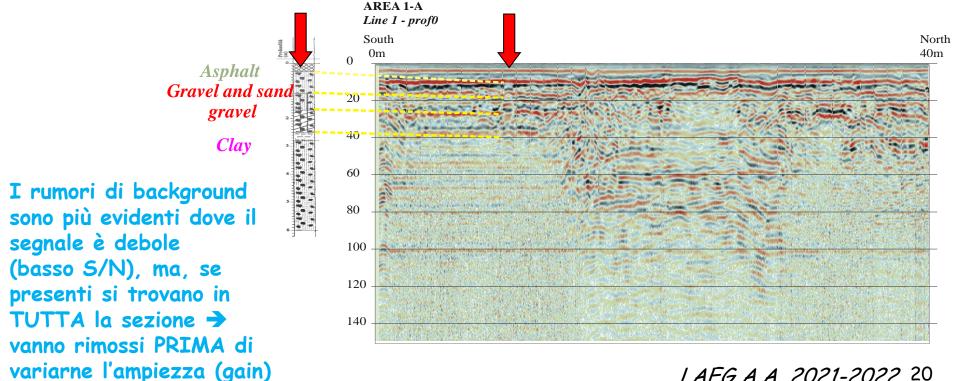
- NUMERO DI TRACCE → Se troppo limitato rimozione erronea di segnali (sub)orizzontali, se troppo lungo inefficace
- NUMERO DI CAMPIONI → E' sufficiente un unico campione per rumori perfettamente coerenti, me nella realtà è preferibile usare 3-9 campioni → media rispetto a t
- COMPORTAMENTO AI BORDI → riduzione progressiva delle dimensioni finestra
  - Estensione speculare profilo oltre limiti laterali ed inferiore

    LAEG A.A. 2021-2022 19

# 6. Rimozione rumori coerenti (background) LD3B

SBZZYONAE GERR COOPPO Lguaitagaione del Rumainainair backgacound





## 7. Analisi di Velocità su dati GPR

Ci sono varie tecniche proposte, le più accurate richiedono dati Multi Offset.

#### <u>I risultati dipendono da:</u>

- •Rapporto segnale/rumore;
- Presenza di riflessioni/diffrazioni;
- · Contrasti delle proprietà elettromagnetiche.

#### Misure di superficie

Dati Common Offset

- 1) A- fitting di iperboli di diffrazione
  B- Hough transform
- Calcolo diretto da dati indipendenti
- 3) Migration Velocity Scan
- 4) Analisi delle riflessioni dalla superficie

#### Misure in pozzo

- Profili a Offset costanti (Direct wave)
- Profili ad Offset variabile (Tomography)
- 3) Vertical Radar Profiling (VRP)

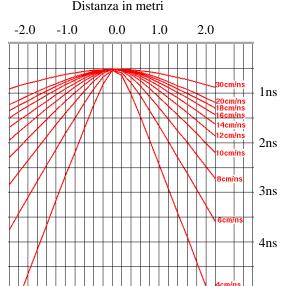
Dati Multi Offset

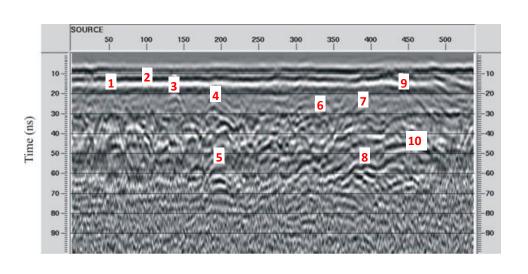
- 1) Uso delle Ground Wave
- 2) Uso delle Rifrazioni
- 3) Uso delle Riflessioni
  - <u>Semblance/altre misure di coerenza</u>
  - Fitting di iperboli di riflessione
  - CVG (Orizzontalizzazione del NMO)
  - CVS (miglior risultato di stack)
  - Migrazioni Pre-stack → Common Image Gather
  - Common Reflection Surface (CRS)
  - Analisi della dispersione
  - Brewster angle Metodi misti (combinazione di alcuni dei precedenti)

LAEG A.A. 2021-2022 21

# 7. Analisi di Velocità su dati GPR - SF

### SF - Fitting di iperboli di diffrazione





#### Metodo rapido e semplice, ma:

- Effettiva presenza di diffrazioni (meglio se sovrapposte);
- Problemi per fenomeni di interferenza (con riflessioni o altre diffrazioni);
- Spesso non si tratta di diffrazioni pure, ma di riflessioni con fenomeni di diffrazione verso uno o entrambi i lati → possibili valutazioni erronee.

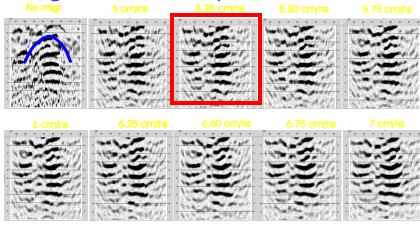
### SF - "Migration Velocity Scan"

Si migra il profilo con velocità via via diverse e si valuta per quali valori si ha la migliore migrazione per ogni evento diffratto.

→ Soggettività/indeterminazione

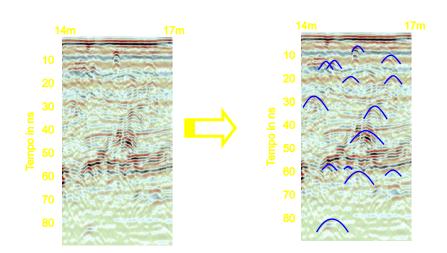
# 7. Analisi di Velocità su dati GPR - SF

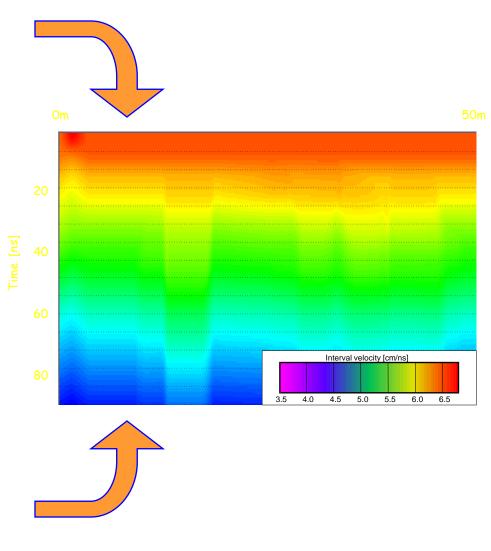
Migration Velocity Scan



Analisi iperboli di diffrazione:

- A) Fitting diretto
- B) Fitting automatizzato (Hough Transform)





### 7. Analisi di Velocità su dati GPR

Correzioni dinamiche: che velocità?

Definizioni di velocita' nell'analisi dei GPR (e sismici)

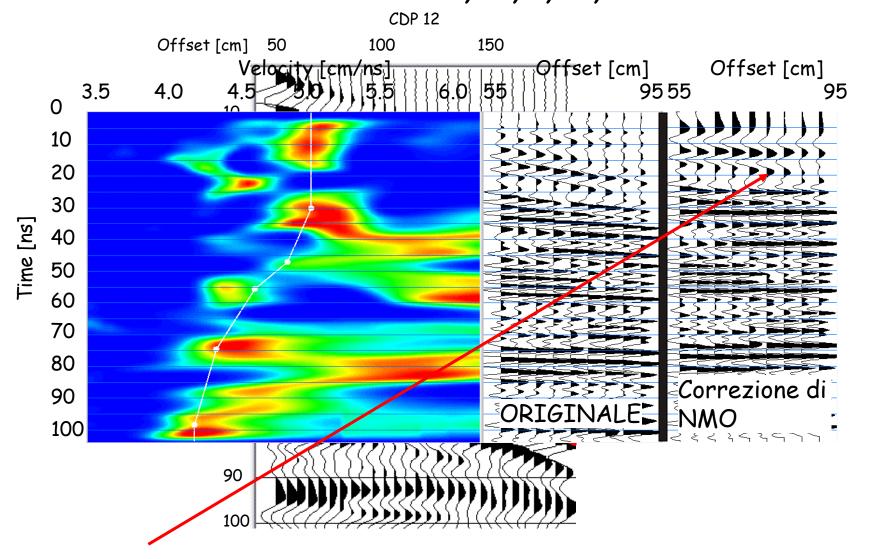
- Velocita' intervallare V<sub>i</sub>= velocita' di propagazione dell'onda sismica nell' i-esimo strato
- Velocita' Root Mean Square (RMS) V<sub>rms</sub>= velocita' di propagazione quadratica media dell'onda sismica in una serie di strati
- Velocita' di stack V<sub>s</sub>= velocita' che introdotta nella correzione di NMO consente di ottenere la somma in fase ottimale degli arrivi riflessi
- Velocita' NMO V<sub>nmo</sub>= velocita' che entra nella definizione analitica del ritardo di NMO
- Velocita' di migrazione V<sub>m</sub>= velocita' utilizzata per ricostruire la corretta posizione spaziale degli eventi riflessi

$$v_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{i} v_{i} t_{i}^{2}}{\sum_{i} t_{i}}} \quad \text{con} \quad v_{i} = \sqrt{\frac{v_{n}^{2} t_{n} - v_{n-1}^{2} t_{n-1}}{t_{n} - t_{n-1}}}$$

$$t_{n} - t_{n-1}$$

$$t_{AEG A.A. 2021-2022}$$

# 7. Analisi di Velocità su dati GPR - MF CMP Beindelta Mædoveilloycithyalyneilysis

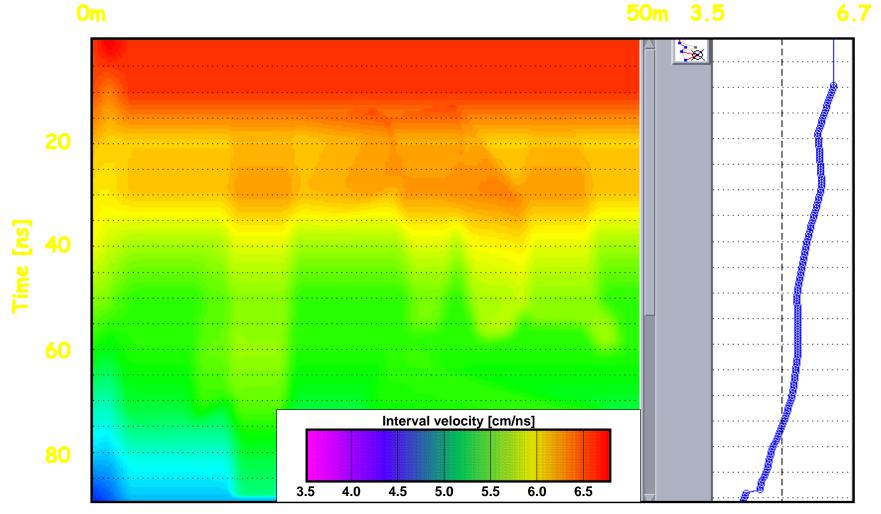


Stiramento dell'onda (stretching) soprattutto per piccoli tempi di arrivo, basse vlocità e grandi offset LAEG A.A. 2021-2022 25

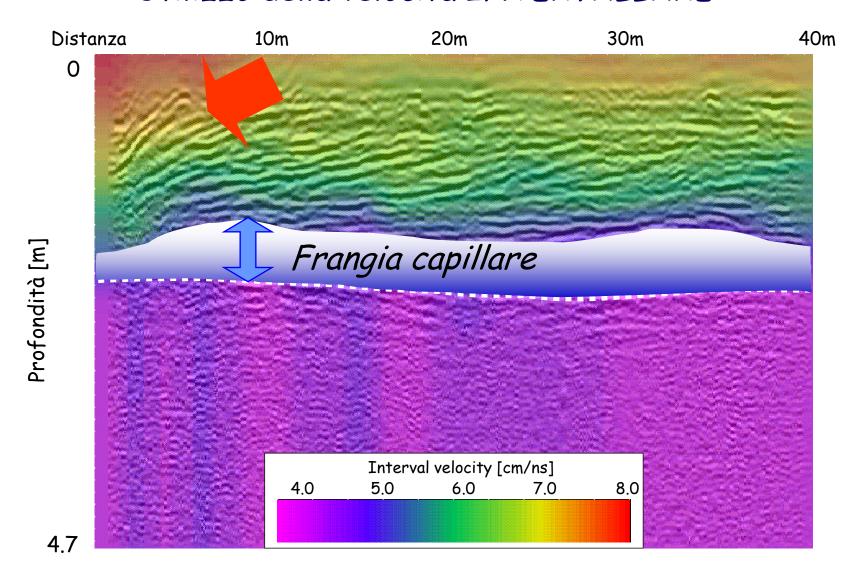
# 7. Analisi di Velocità su dati GPR - SF



Velocity [cm/ns]



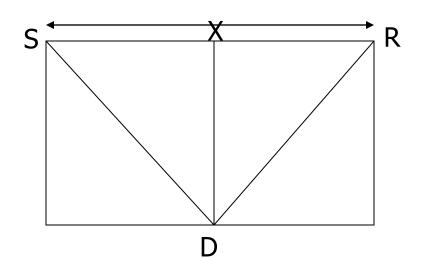
# 7. Analisi di Velocità su dati GPR - SF Utilizzo della velocità INTERVALLARE



### 8. Correzione di Normal Move Out - NMO

#### Velocita' di NMO e stack

Caso di riflettore singolo orizzontale



$$t_x = \frac{\overline{SD}}{V_0} + \frac{\overline{DR}}{V_0} = 2\frac{\overline{SD}}{V_0} = \sqrt{t_0^2 + \frac{x^2}{V_0^2}}$$

$$\Delta T_{nmo} = t_x - t_0 = t_0 \left| \sqrt{1 + \left(\frac{x}{V_{nmo}t_0}\right)^2 - 1} \right|$$

### 8. Correzione di Normal Move Out - NMO

$$t_x^2 = c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + c_3 x^6 + K$$

#### Velocita' di NMO e stack

Caso di riflettori multipli orizzontali  $c_1 = \frac{1}{V^2}$ 

$$c_0 = t_0^2$$

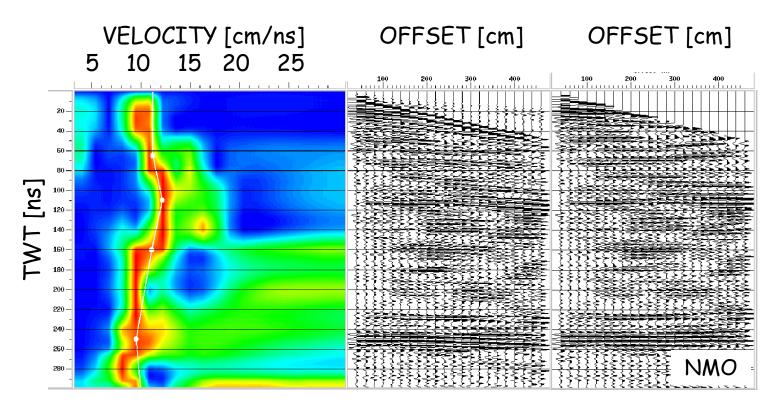
$$c_1 = \frac{1}{V_{rms}^2}$$

$$V_{nmo} = V_{rms} \qquad se \qquad x << h$$

1 strato orizz.	V mezzo superiore
+ strati orizz.	V <sub>RMS</sub> (Small spread approx.)
1 strato inclinato	V mezzo/cosα
+ strati POCO incl.	V <sub>RMS</sub> (Small spread + small dip approx.)
+ strati MOLTO incl	Funzione complessa

Nel caso generale la V<sub>NMO</sub> Dipende dalla situazione geologica

### 8. Correzione di Normal Move Out - NMO



Velocity dependence from layer dips and Presence of LATERAL and VERTICAL variations

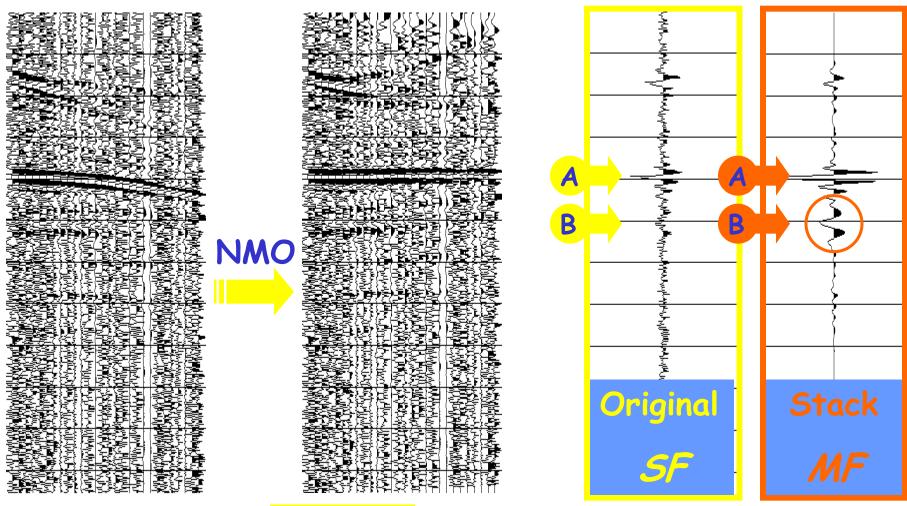
inhomogeneous materials

But also ... Azimuthal variations

anisotropic materials

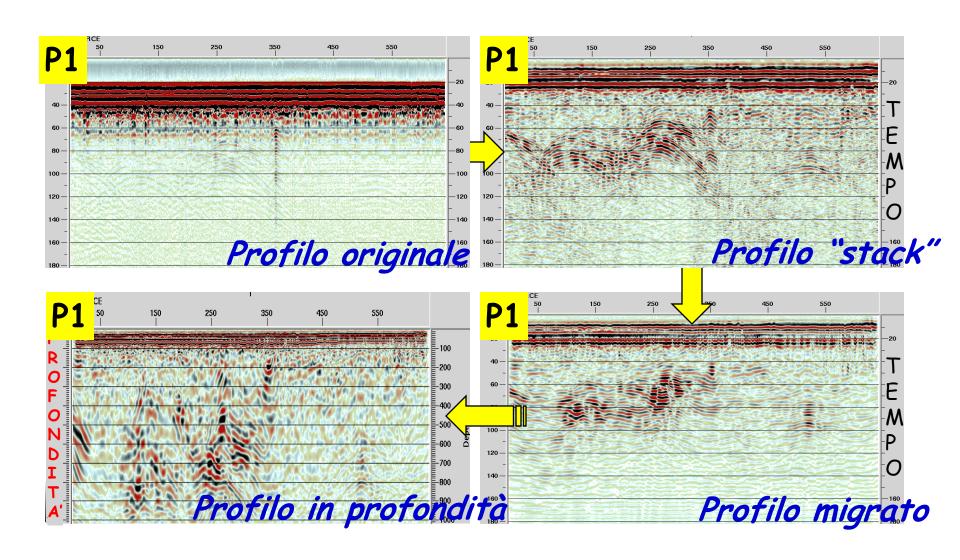
### 8. NMO e Stack

### Rimozione del rumore > incremento S/N



Incremento teorico  $S/N = \sqrt{n}$ 

# 8. Stack e 9. Migrazione



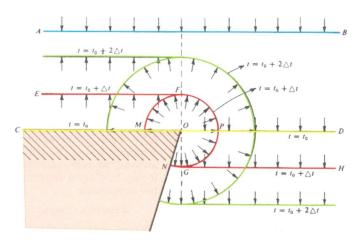
La MIGRAZIONE permette di ottenere la corretta ricostruzione geometrica del sottosuolo → Forme, profondità, limiti → IMAGING

MIGRAZIONE

$$P(x,z=0,t) \rightarrow P(x,z,t=0)$$

Dal campo d'onda registrato in superficie (z=0 si ricostruisce la riflettività nel sottosuolo (t=0)

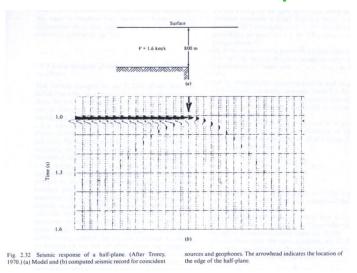
#### Diffrazioni da un piano fagliato



Il fronte dell'onda diffratta al tempo  $t_o+\Delta t$  sarà l'arco di cerchio MFPGN centrato in O, punto di diffrazione. L'onda diffratta che verrà registrata sarà MFP. Anche all'interno dello strato inferiore avremo un fronte d'onda sferico con raggio inversamente proporzionale alla velocità dello strato.

LAFG A.A. 2021-2022 33

#### Diffrazioni da un semi-piano



Esistono moltissimi algoritmi di migrazione che si basano su approcci ed approssimazioni diversi:

Migrazione alle differenze finite (phase shift)
Migrazione f-k (Stolt)
Wave equation (Kirchhoff)

Possibilità di applicazione: 2D, 3D Pre-stack, Post-stack tempo, profondità

Approssimazione 2D → La sezione da migrare NON contiene energia proveniente al di fuori del piano della sezione stessa
Approssimazione ZERO OFFSET → Le antenne T e R sono coincidenti

Situazioni piu' complesse per variazioni verticali e soprattutto LATERALI di velocità (molto comuni nel caso GPR)

Se velocità di migrazione > di quella corretta → SOVRAMIGRAZIONE (SMILES) / → · · ·

Se velocità di migrazione < di quella corretta → Non completa FOCALIZZAZIONE energia diffratta e parziale imaging riflettori



# 2 problemi fondamentali:

Riflettori pendenti

- Variazioni laterali di velocita'

Gli effetti di queste due diverse situazioni possono alterare anche pesantemente la corretta interpretazione dei dati.

Mentre per i riflettori pendenti (e conflicting dip) si hanno buoni risultati con la migrazione (in particolare 3D) anche in TEMPO, le variazioni laterali di velocità producono effetti correggibili attraverso l'applicazione della migrazione in PROFONDITA'.

Un riflettore inclinato sarà collocato in una posizione diversa rispetto alla sua posizione reale; saranno diversi anche la sua lunghezza e pendenza.

In figura, per semplicità, si considerano i raggi riflessi prodotti da una sorgente e registrati da un ricevitore ubicati nella stessa posizione (T1R1 in A, T2R2 in B)

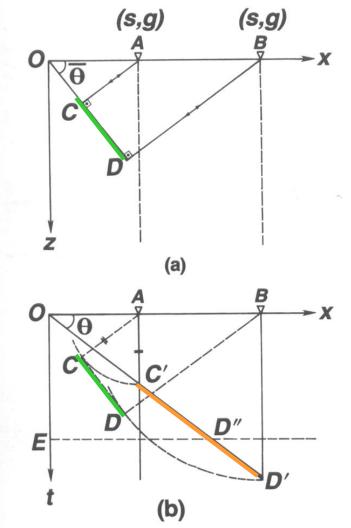
PRIMA

$$\tan \theta = \frac{\overline{BD'}}{\overline{OB}}$$

DOPO

$$sen\overline{\theta} = \frac{BD}{\overline{OB}}$$

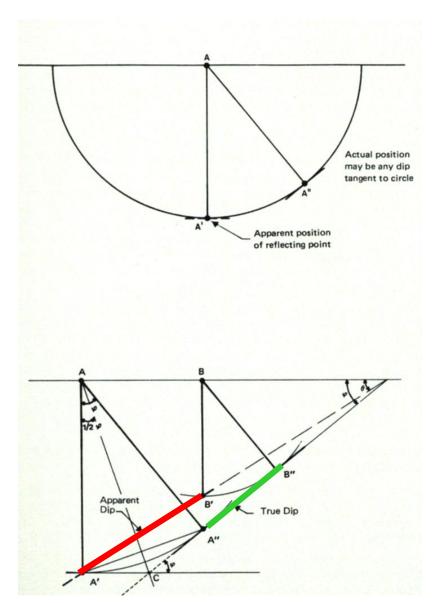
$$\tan \theta = \operatorname{sen} \overline{\theta}$$



## 9. Migrazione

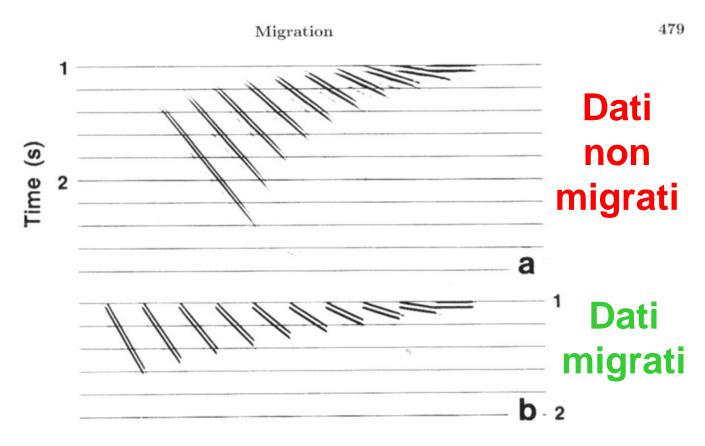
#### Quindi la migrazione:

- 1. Ricostruisce la CORRETTA pendenza dei riflettori (> di quella apparente)
- 2. Sposta i riflettori verso la superficie
- 3. Accorcia i riflettori
- 4. Focalizza l'energia delle iperboli di diffrazione nel punto (zona) che ha prodotto la diffrazione stessa



## 9. Migrazione

# Esempio sintetico da modello con riflettori inclinati da 0 a 45° con step di 5°



Da Yimaz, 2001

### 9. Migrazione

Nel caso GPR importanza basilare della migrazione perché:

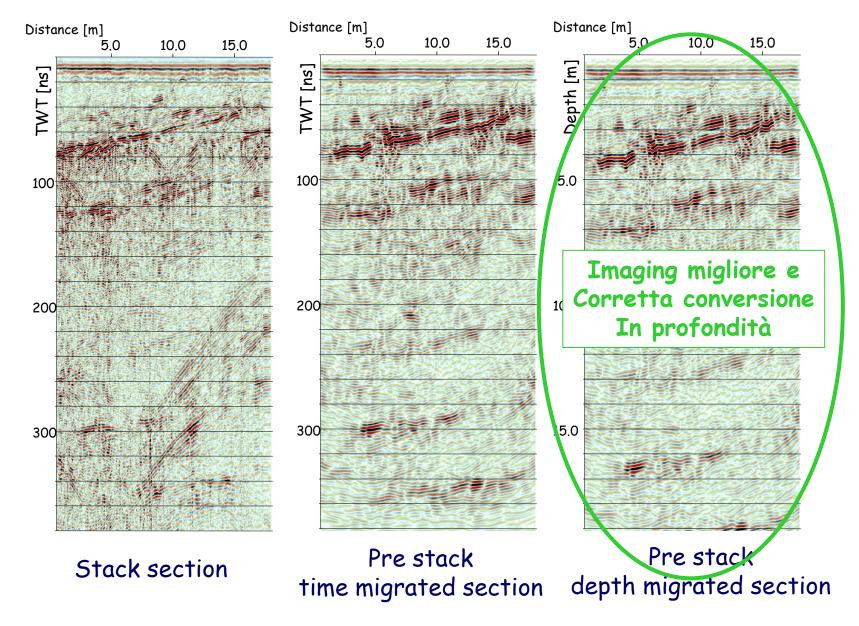
- · STRUTTURE COMPLESSE con variazioni di inclinazione
- · Variazioni verticali e laterali di velocità
- Scattering spesso presente (soprattutto per antenne ad alta frequenza → numerosi oggetti aventi dimensioni dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda dominante.

Tuttavia le iperboli di diffrazione costituiscono un ausilio in fase di interpretazione → utilizzo integrato di sezione NON MIGRATA e MIGRATA.

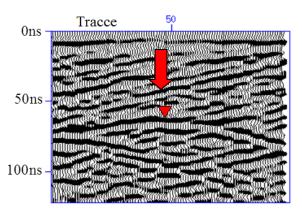
#### Problemi specifici legati a:

- DIFFICOLTA' NEL RICOSTRUIRE CORRETTAMENTE E CON SUFFICIENTE DETTAGLIO IL CAMPO DI VELOCITA' DELL'ONDA ELETTROMAGNETICA
- INTERFERENZA TRA DIFFRAZIONI DIVERSE E DIFFRAZIONI CON RIFLESSIONI
- · EFFETTI DI BORDO (SOPRATTUTTO BOTTOM) MARCATI A CAUSA DELLA LIMITATA ESTENSIONE TEMPORALE DEI PROFILI (RISPETTO ALLA SISMICA)
- PRESENZA DI DIFFRAZIONI LEGATE A PROPAGAZIONI DI SEGNALI IN ARIA (SPECIE, MA NON SOLO, CON ANTENNE NON SCHERMATE)
- · ARTEFATTI ED IMPRECISIONI DOVUTI ALLA TOPOGRAFIA, SPECIE SE MARCATA → LAYER STRIPPING E/O TOPOGRAPHIC MIGRATION (Lehmann e Green, 2000) LAEG A.A. 2021-2022 39

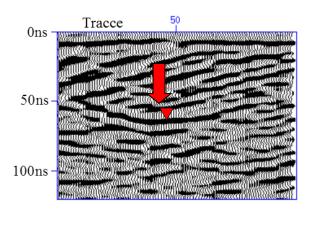
### 9. Migrazione: esempi di applicazione



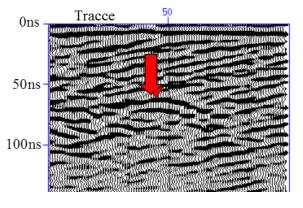
## 9. Migrazione: esempi di applicazione



## ESEMPIO DI MIGRAZIONE IPERBOLE DI DIFFRAZIONE



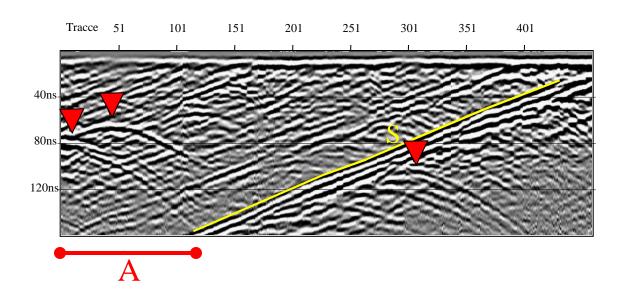
- SOVRAMIGRATA



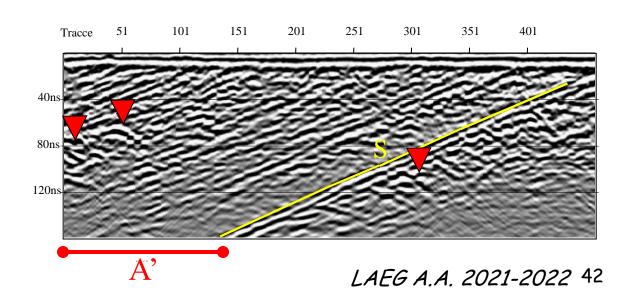
- MIGRATA
CORRETTAMENTE

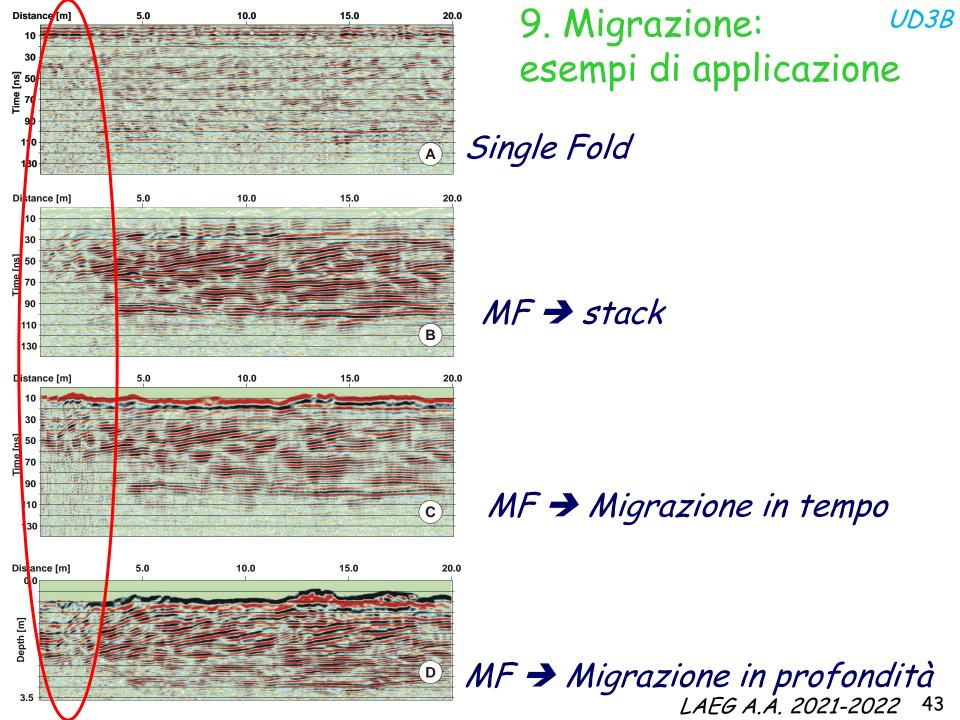
## 9. Migrazione: esempi di applicazione





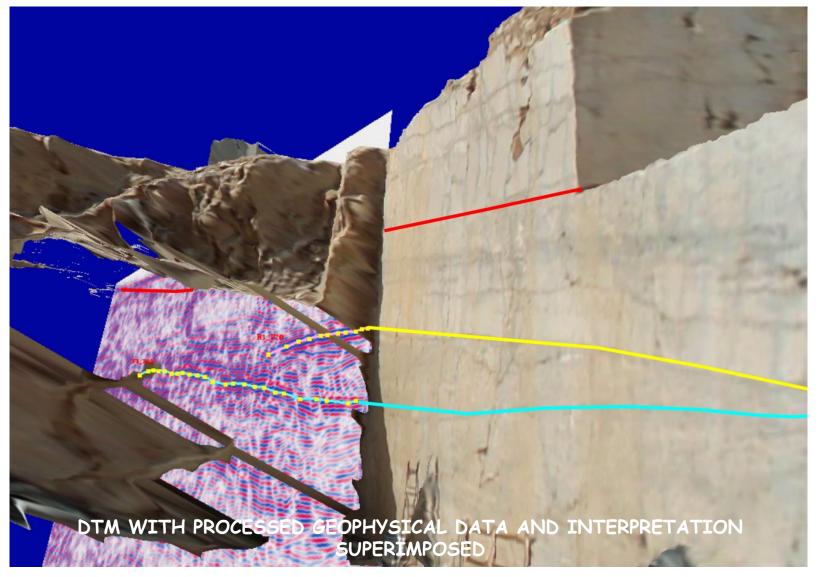
MIGRATA





Interpretazione e ricostruzione dettagliata delle strutture nel sottosuolo

#### ACQUISIZIONE -> ELABORAZIONE/ANALISI/INTERPRETAZIONE





#### **APPROFONDIMENTI**

## TRASFORMATA DI FOURIER (FT) trattazione continua

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt$$
 = FT x(t) con x(t) funzione continua nella variabile (t) SE (t)=tempo  $\rightarrow \omega = 2\pi f$ 

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$
 = FT<sup>-1</sup>

 $X(\omega)$  Nel caso generale è una variabile complessa che può essere espressa nella forma:

$$X(\omega) = A(\omega) \exp[i\varphi(\omega)]$$

$$A(\omega)$$
 = spettro di ampiezza =  $A(\omega) = \sqrt{X_r^2(\omega) + X_i^2(\omega)}$ 

$$\varphi(\omega)$$
 = spettro di fase =  $\varphi(\omega)$  =  $\tan^{-1} X_i(\omega)/X_r(\omega)$ 

$$X_r(\omega), X_i(\omega)$$
 = parti Reale e Immaginaria della FT  $X(\omega)$ 

Da cui  $X(\omega) = X_r(\omega) + iX_i(\omega)$  e, confrontando e considerando la notazione di Eulero per i complessi:

$$X_r(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$$

$$X_i(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

#### **APPROFONDIMENTI**

#### TRASFORMATA DI FOURIER (FT) trattazione discreta

Una funzione discreta è una SERIE. Nel caso GPR/sismico consideriamo serie temporali ottenute digitalizzando funzioni continue (analogiche) secondo intervalli di tempo  $\Delta$ t costanti Quando viene digitalizzata la funzione continua assume la forma:  $\chi(t) \to \chi(T)$ 

Con 
$$T = n\Delta t$$

$$x(T) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \delta(t - k\Delta t) \qquad k = 0,1,2,\dots$$

 $\delta(t-k\Delta t)$  È la funzione chiamata "Delta di Dirac" e  $\Delta t$  è l'intervallo di campionamento

La FT in questo caso sarà: 
$$X(\Omega) = \sum x_k \exp(-i\omega k \Delta t)$$
  $k = 0,1,2,...$ 

Se introduciamo una nuova variabile z  $\stackrel{\sim}{\to} z = \exp(-i\omega\Delta t)$  avremo che:

$$X(z) = \sum x_k z^k = x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \dots$$

Il polinomio X(z) è la z-trasformata della funzione originaria, ovvero della serie temporale x(t)

#### In piu' dimensioni

Per un generico campo d'onda in 2D (nel caso sismico t e x) p(x,t) la sua FT sarà:

$$P(k_x \omega) = \iint p(x,t) \exp(ik_x x - i\omega t) dx dt \quad \text{E In FT-1:}$$

$$p(xt) = \iint P(k_x \omega) \exp(-ik_x x + i\omega t) dk_x d\omega$$

#### APPROFONDIMENTI

#### SHORT TIME FT

Nella STFT uno spettro tempo-frequenza viene calcolato all'interno di una predefinita finestra temporale che viene traslata nel tempo (Cohen, 1995).

Definire una certa lunghezza della finestra fissa la RISOLUZIONE in frequenza che si puo' ottenere.

Abbiamo già visto che:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt = FT x(t) \cos x(t) \text{ funzione continua nella variabile (t)}$$

Se applicata ad un segnale sismico si ottiene il contenuto GLOBALE in frequenza (in cui le ampiezze max. hanno peso maggiore).

Per un segnale NON STAZIONARIO → variazione temporale → suddivisione del segnale in finestre (windowing) → FT su ogni finestra → STFT → contenuto in f LOCALE

La STFT si ottiene tramite prodotto scalare tra il segnale f(t) ed una finestra che si sposta nel tempo  $\Phi(t)$ ,

ovvero:

$$STFT(\omega, \tau) = \left\langle f(t), \phi(t-\tau)e^{i\omega t} \right\rangle = \int f(t)\overline{\phi}(t-\tau)e^{-i\omega t}dt$$

In cui la funzione finestra  $\varphi$  è centrata al tempo  $t=\tau$  e  $\phi$  è il complesso conjugato di  $\varphi$ 

Nel caso DISCRETO la scelta del campionamento  $\Delta t$ , del numero di campioni della finestra di analisi N e di conseguenza della sua lunghezza temporale T, condiziona la RISOLUZIONE:

f di Nyquist 
$$f_{\text{max}} = f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{N}{2T}$$

Risoluzione in f 
$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N}$$
 Con  $f_s = \frac{1}{\Delta t}$  = f di campionamento

Con 
$$f_s = \frac{1}{\Lambda t}$$
 = f di campionamento

$$f_{\min} = \frac{2}{N\Delta t} = \frac{2}{T}$$

## APPROFONDIMENTI SHORT TIME FT

La STFT è stata introdotta da A. Gabor nel 1940, per cui l'equazione:

$$S_f(\omega, \tau) = \int f(t) \bar{\varphi}(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt$$

viene anche chiamata Trasformata di Gabor.  $\phi(t)$  è una funzione "finestra" scelta opportunamente e l'espressione:.

$$g(t) = \varphi(t - \tau) \exp(-i\omega t)$$

Rappresenta le "funzioni di Gabor"

È richiesto inoltre che:  $\int g(t)^2 dt = 1$  Principio di globalità

Lo Spettrogramma quindi è pari a:  $\left|S_f(\omega, \tau)\right|^2$ 

#### SHORT TIME FT

La risoluzione dell'analisi è infatti limitata dal principio di indeterminazione o disuguaglianza di Heisenberg:



Ovvero: una finestra di analisi lunga fornisce migliore risoluzione in f, ma scarsa in t; viceversa una finestra corta buona risoluzione in t, ma scarsa in f.

In altre parole: un segnale NON può essere rappresentato su un piano tempo-frequenza come un punto, si può unicamente dire che la sua posizione è all'interno di un rettangolo.

#### RIASSUMENDO:

- La FT non è adatta per segnali non stazionari, cioè tempo varianti (come nel caso sismico o GPR)
- La FT fornisce una perfetta risoluzione in frequenza, ma una "globalità" nel tempo, ovvero non fornisce alcuna informazione COME/DOVE varia nel tempo il segnale sotto esame.
- La STFT è una soluzione adatta per l'analisi di segnali tempovarianti, ma ha limiti di risoluzione in ted f non superabili