

Limiti di validità dell'equazione dei gas perfetti

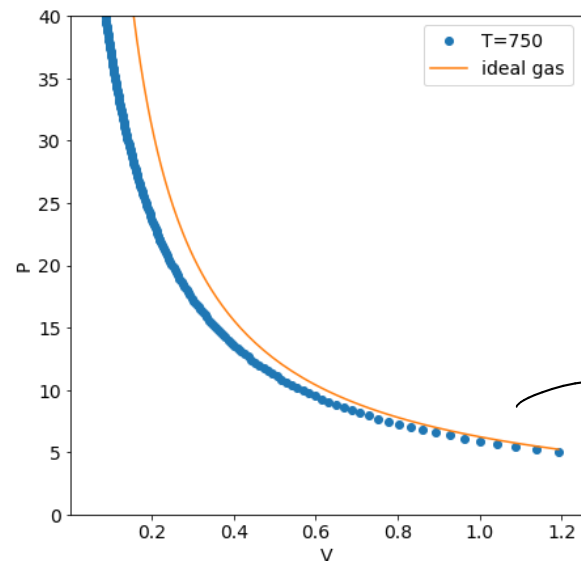
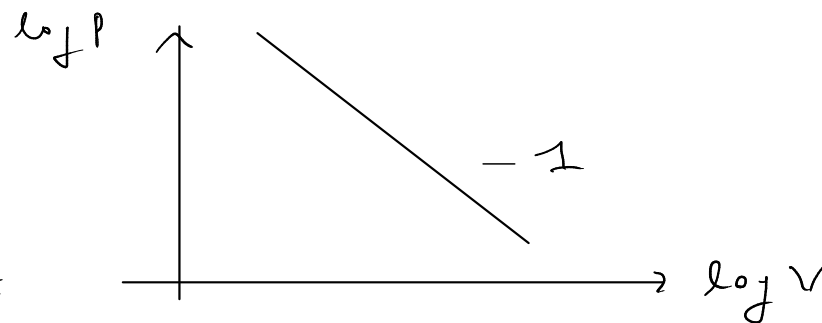
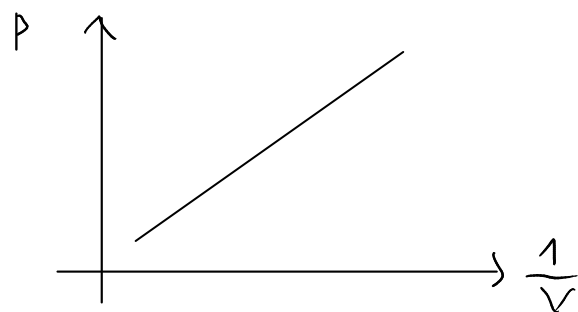
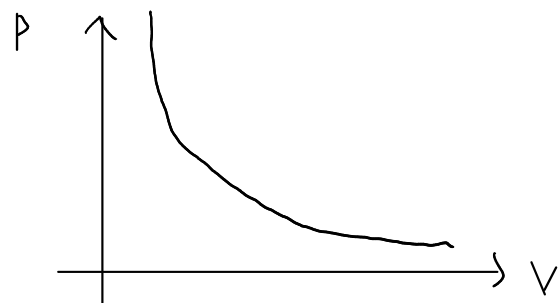
$$PV = NK_B T = nRT \quad \rightarrow \quad PV - NK_B T = 0$$

$$f(N, V, P, T) = 0$$

H₂O T = cost n = 1 mol

$$PV = nRT$$

$$P = \frac{nRT}{V} \sim \frac{1}{V}$$

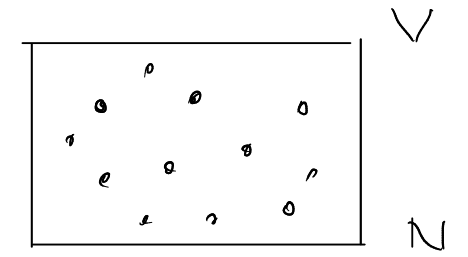


→ diluito: a bassa densità c'è accordo

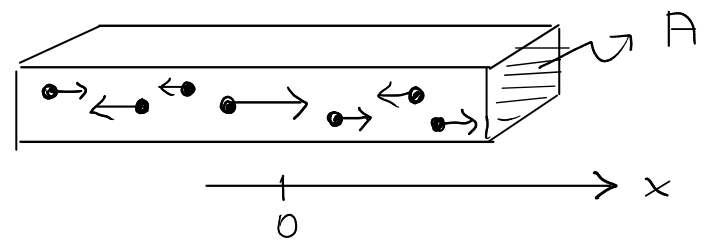
Interpretazione microscopica di pressione e temperatura

Modello di gas perfetto

- ① molecole = particelle
- ② particelle non-interagenti + urto elastico con pareti



Sistema 1d : $v_x \neq 0$ $v_y = v_z = 0$



- ③ non ci sono posizioni privilegiate : OMOGENEO
- ④ non ci sono direzioni / versi privilegiati : ISOTROPICO

Non posso determinare la posizione di una molecola ...
 ... ma posso determinare la sua posizione media

Posizione media di una particella

$$\langle x \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Raggruppo le x_i facendo un istogramma
 con n intervalli $\Delta x = x_{j+1} - x_j$

$$\langle x \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n N(x_j) x_j = \sum_{j=1}^n \frac{N(x_j)}{N} x_j$$

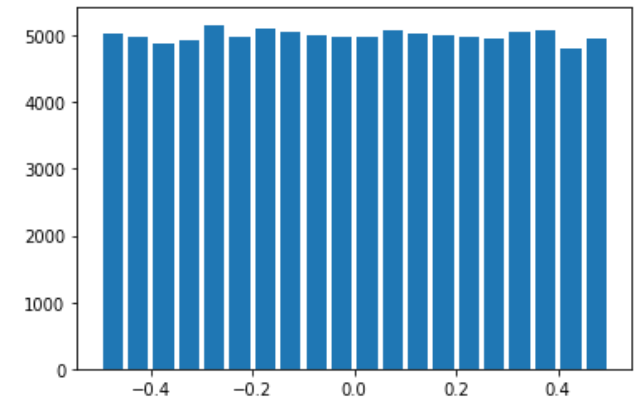
Densità di probabilità

$$p(x_j) \equiv \frac{N(x_j)}{N \Delta x}$$

$$N \gg 1, \Delta x \rightarrow 0$$

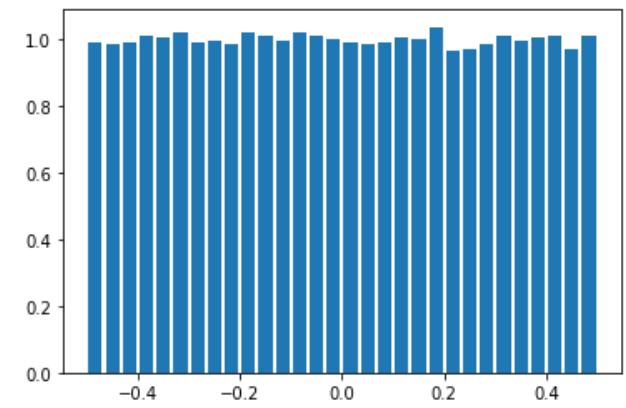
$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) x$$

$N(x_j)$



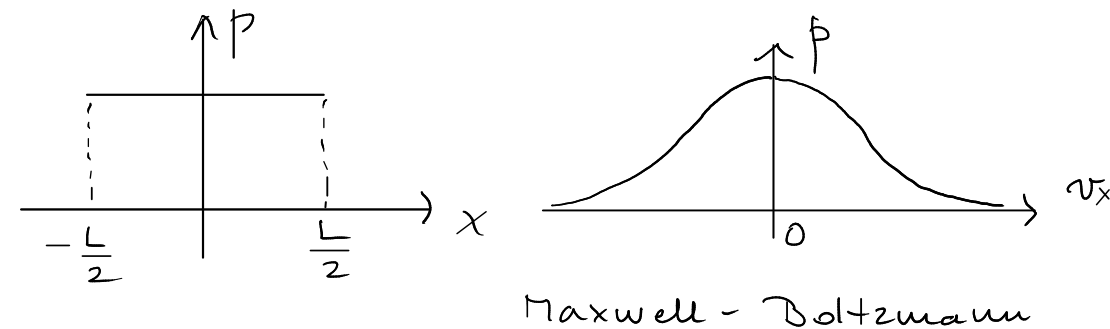
x_j

$p(x_j)$

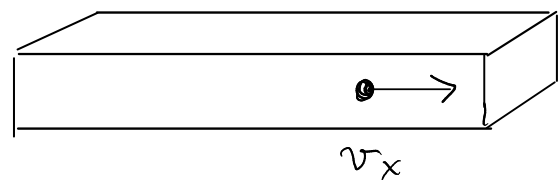


x_j

Sistema omogeneo : $\langle x \rangle = 0$ energia cinetica
 Sistema isotropo : $\langle v_x \rangle = 0$ media di una
 $\langle v_x^2 \rangle \neq 0$ particella
 $\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \rangle$



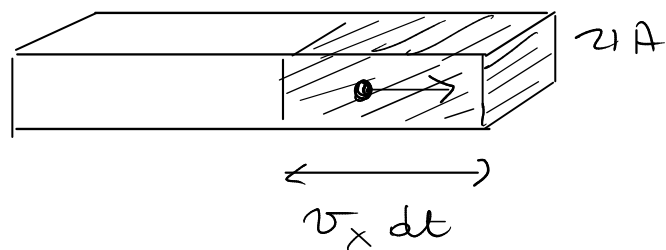
Intervallo di tempo dt , massa m



1 particella : $dp_x = -2mv_x = F_x dt$
 $p_{xf} - p_{xi} = -mv_x - mv_x$
 ↑ sulla particella

Fisso $v_x > 0$, quante particelle urtano con la parete?

Densità di particelle



$v_x dt A \cdot \frac{N}{V}$
 volume densità

$\rho_N = \frac{N}{V}$

Forza esercitata da queste particelle sulla parete

$F_x = -\frac{2mv_x}{dt}$

$F = \frac{2mv_x}{dt} \cdot v_x dt A \cdot \frac{N}{V} = 2mv_x^2 A \frac{N}{V}$

III Newton

Somma su tutte le particelle \rightarrow media sulle velocità

$$\langle F \rangle = \frac{1}{2} \langle 2 m v_x^2 A \frac{N}{V} \rangle = m A \frac{N}{V} \langle v_x^2 \rangle \quad v_x > 0$$

Forza media sulla parete per unità di superficie

$$\frac{\langle F \rangle}{A} = m \frac{N}{V} \langle v_x^2 \rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\langle F \rangle}{A} \cdot V = N m \langle v_x^2 \rangle \\ P \quad V = N K_B T \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{\langle F \rangle}{A} \\ T = \frac{m}{K_B} \langle v_x^2 \rangle = \frac{2}{K_B} \langle \frac{1}{2} m v_x^2 \rangle \end{array} \right.$$

Pressione \rightarrow urti delle molecole sulle pareti (forza media per unità di area)

Temperatura \rightarrow energia cinetica media delle molecole (se CM immobile)

$$\frac{1}{2} K_B T = \langle \frac{1}{2} m v_x^2 \rangle \quad 3d : \quad T = \frac{2}{3 K_B} \langle \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \rangle$$

$$\frac{3}{2} K_B T = \langle \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \rangle$$

Es.: velocità tipica delle molecole d'aria a temperatura ambiente

$$T = 300 \text{ K}$$

velocità tipica : $\sqrt{\langle |\vec{v}|^2 \rangle}$ ← velocità quadratica media

massa molare dell'aria : $M_A \approx 28 \text{ g/mol}$

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{1}{2} m \langle |\vec{v}|^2 \rangle$$

$$k_B N_A = R$$

$$\frac{3}{2} R T = \frac{1}{2} M_A \langle |\vec{v}|^2 \rangle$$

$$\sqrt{\langle |\vec{v}|^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 R T}{M_A}} = \left(\frac{3 \times 8,314 \text{ J/K/mol} \times 300 \text{ K}}{28 \times 10^{-3} \text{ Kg/mol}} \right)^{1/2} \approx 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$