SISTEMI DINAMICI

Sistemi dinamici $\quad \dot{x} = f(x) \quad$ continui

$x_n \xrightarrow{f} x_{n+1} \quad$ discreti

1 Dim : $\mathbb{R} \longrightarrow$ def generali + biforcazioni

1 Dim discreti $\longrightarrow$ def generali + dinamica caotica.

$\downarrow$

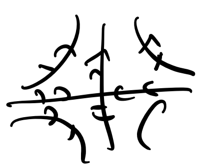
sistemi n dim

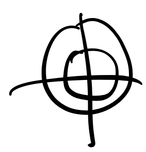
Siamo partiti da sistemi lineari:

$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$f \longrightarrow A \in Mat(n \times n ; \mathbb{R})$

$\dot{x} = A x \longrightarrow$ caso 2D





$\hookrightarrow$ il problema ODE diventa un problema spettrale

In generale la soluzione di $\dot{x} = Ax$

$$x(t) = e^{tA} x_0 \qquad e^{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow e^{t\alpha} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

$$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{semi semplice}}}{S} + \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{nilpotente}}}{N}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \underbrace{\left(e^{-tA} y \right)}_{\text{costante}} = 0 \right. \qquad y = \text{cost}\; e^{tA}$$

<u>Stabilità per sistemi lineari</u>

Intuitivamente: stabilità è determinata

dall'andamento delle soluzioni per $t \to +\infty$.

La soluzione è $x(t) = e^{tA} x_0$

<u>Def</u> Un sistema dinamico lineare si dice spettralmente stabile se nessuno dei suoi autovalori ha parte reale positiva.

Se $\underset{\mathbb{R}^n}{T : E} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{E}$

possiamo decomporre $E = E^u \oplus E^c \oplus E^s$

Se scriviamo gli

autovalori λ_i

autovettori $(\bar{v}_i) = u_i + i w_i$

- $E^u = \underset{u_1,\, u_3,\, w_3}{\text{Span}} \{ u_i, w_i \mid Re(\lambda_i) > 0 \}$

sottospazio instabile

- $E^c = \text{Span}\{u_i, w_i \mid Re(\lambda_i) = 0\}$
  sottospazio centrale

- $E^s = \text{Span}\{u_i, w_i \mid Re(\lambda_i) < 0\}$
  sottospazio stabile

Def Un sistema dinamico lineare si dice iperbolico se $E^c = \emptyset$
(Tutti autovalori hanno parte reale non zero).

Diciamo che sistemi iperbolici sono "generici".

Def Un sistema dinamico lineare si dice linearmente stabile se tutte le soluzioni sono limitate per $t \to +\infty$

Def Stabilità lineare asintotica

se tutte le soluzioni vanno a

0 per $t \to +\infty$ $\quad (E = E^s)$

Teo Abbiamo che

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tA} x_0 = 0 \qquad \forall x_0$$

$\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di A

hanno parte reale negativa.

Dim [Idea]

Se tutti gli autovalori hanno $\mathrm{Re} < 0$

$$x_0 \in E^s \longrightarrow t^k e^{t a_i} e^{i t b_i}$$

$e^{t a_i}$ va a zero perché $a_i < 0$ per $t \to +\infty$

$e^{i t b_i}$ limitati

Viceversa: considerazioni analoghe

SISTEMI DINAMICI NON LINEARI

$\dot{x} = f(x)$ $\qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\qquad$ M

$(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

Equilibrio : soluzioni più semplici x^* per cui $f(x^*) = 0$

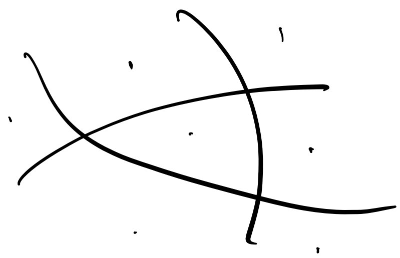
Isocline : per avere un'idea dell'andamento del flusso possiamo studiare le superfici definite da

$$\boxed{\dot{x}_i = 0 = f_i(x_1, \ldots, x_n)} \quad \forall i$$

Scriviamo il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ è l'eq. di una superficie, divide lo spazio in regioni dove $\dot{x}_i > 0$ oppure $\dot{x}_i < 0$



→ dividiamo lo spazio delle fasi in regioni in cui sappiamo la direzione del flusso.

<u>Esempio</u>

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Punti critici $(x^*, y^*) = (-1, 0)$

Isocline :

- $\dot{y} = 0$ → il flusso è orizzontale

$\dot{y} = -y$ ⇒ per $y = 0$

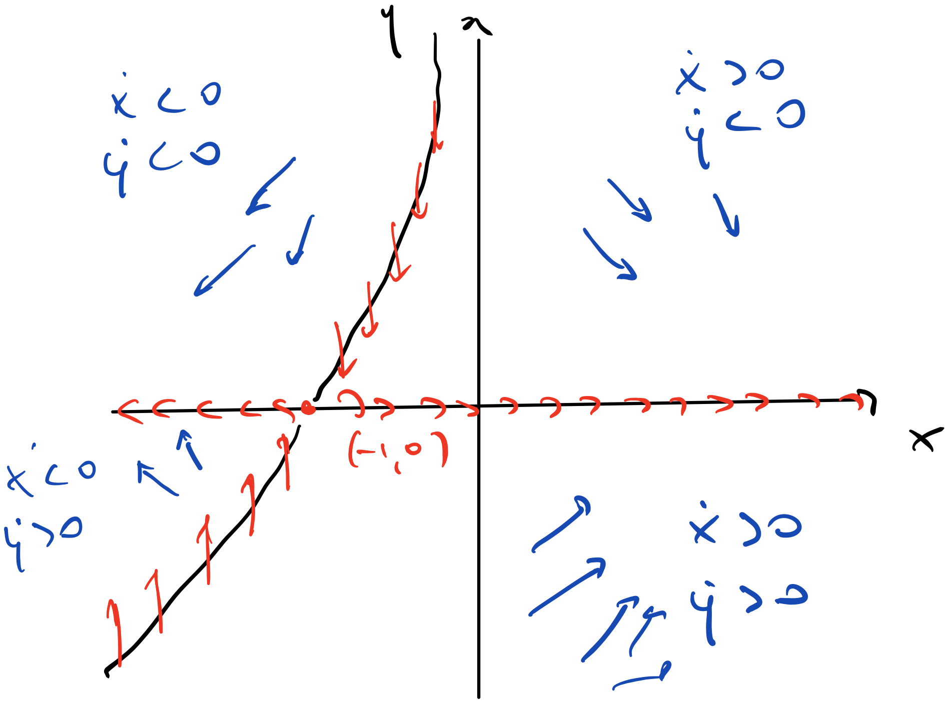
il flusso va verso destra per $\dot{x} > 0$

$$\dot x = x + e^{-y}$$

vogliamo $\dot x = (x + e^{-y})\big|_{y=0}$

$= x + 1$

$\dot x > 0$ per $x > -1$



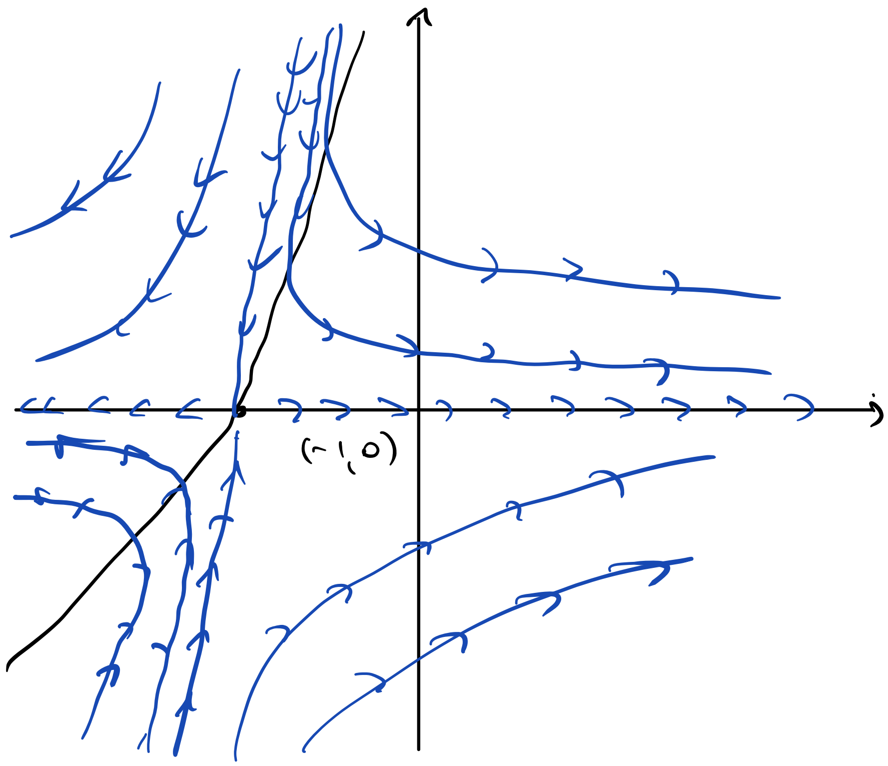
• $\dot x = 0$ flusso verticale

$x + e^{-y} = 0$

Semipiano sup $y > 0$

$\dot y = -y < 0$

Mettiamo tutto insieme



le traiettorie cambiano direzione quando intersecano $e^{-y} + x = 0$

PPLANE

Linearizzazione

Sia $x^* \in \mathbb{R}^n$, stazionario per $\dot{x} = f(x)$

cioè $f(x^*) = 0$.

Allora $z = x - x^*$, per Taylor

$$\frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}(z + x^*) = \dot{z}$$

$$= f(z + x^*) = \underbrace{f(x^*)}_{0} + Df(x^*)\, z$$

+ ordini superiori

$$\dot{z} = Df(x^*)\, z$$

$Df(x^*)$ matrice Jacobiana calcolata in x^*

$$(Df(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$ calcolata in x^*

Se questo è giustificato

$$\dot{z} = A z \qquad A = Df(x^*)$$

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_{x^*}$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}y + 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 \\ \dot{y} = -x + 2y + 4xy \end{cases}$$

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

$(0,0)$ punto fisso

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + 4x & -\frac{1}{2} + y \\ -1 + 4y & 2 + 4x \end{pmatrix}$$

sistema linearizzato è

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La struttura locale è determinata dagli autovalori di $A = Df|_{x^*}$

associati con la decomposizione

$$E^{s} \oplus E^{c} \oplus E^{u}$$