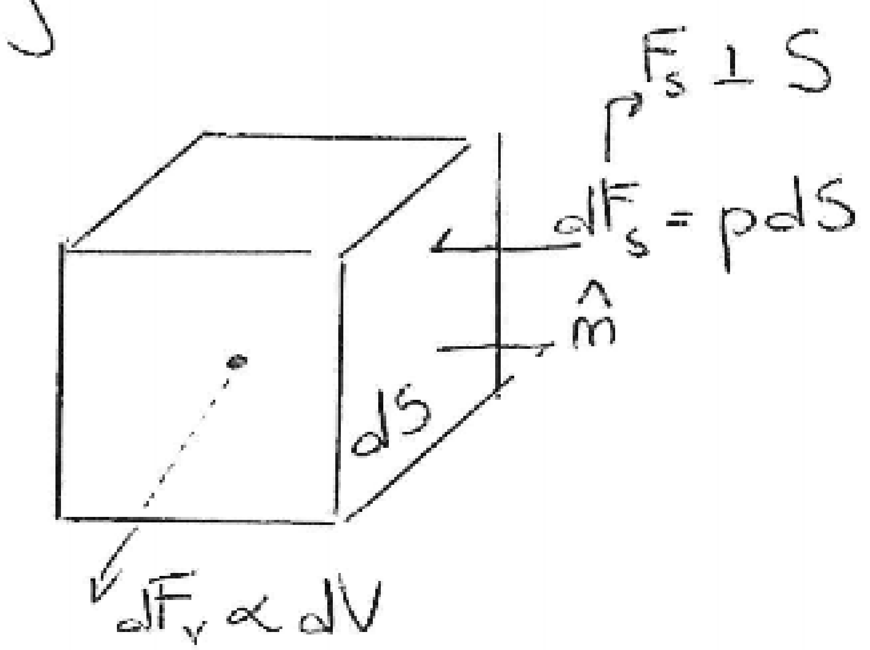
Recap

Fluidi:

$dm = \rho\, dV$



- Elemento di Massa fluido: $dm = \rho\, dV$ [Kg]
- Densità: $\rho = dm / dV$; se costante nel volume $\rho = m/V$ [Kg/m
- Pressione: $p = dF/dS$; o se F costante sulla sup. $p = F/S$ [Pa] = N/m

  F ⊥ alla sup.ce

  $1\,bar = 10^5\,Pa$

Per un elemento di fluido in equilibrio statico vale

$$d\vec{F}_p + d\vec{F}_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \; ; \; \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \; ; \; \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

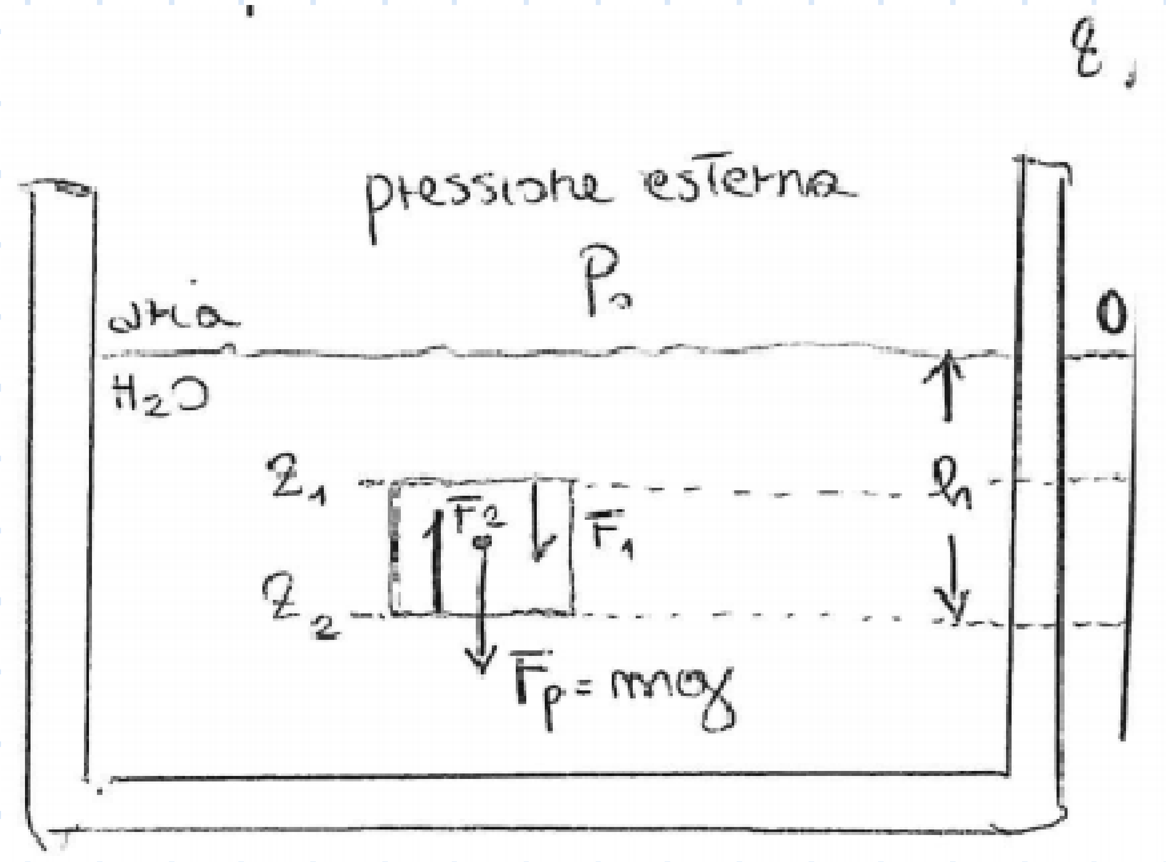
$$(\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}\,)$$

CONDIZIONE EQUILIBRIO STATICO di un FLUIDO

Equilibrio statico in presenza della forza peso:

$$p(h) = p_0 + \rho g h \qquad \text{(Legge di Stevino)}$$

p_0: pressione esterna — $\rho g h$: pressione colonna di fluido sovrastante



Principio di Pascal

i) $P = P_{ext} + \rho g h$

$P'_{ext} = P_{ext} + \Delta P_{ext} \leftarrow$

ii) $P' = P'_{ext} + \rho g h$

$\Rightarrow \Delta P = P' - P = P'_{ext} + \cancel{\rho g h} - P_{ext} - \cancel{\rho g h} = \Delta P_{ext}$

Non dipende da "h"

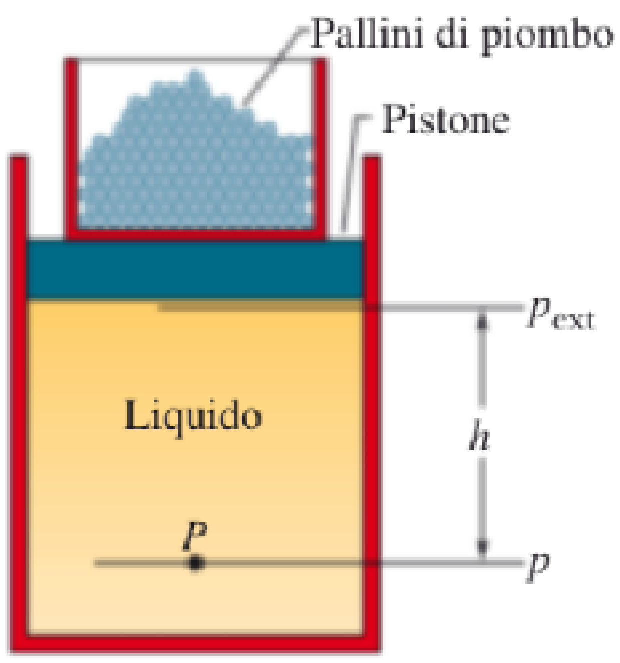


Figura 14.7 I pesi caricati sul pistone creano una pressione esterna p_{ext} in cima al liquido incomprimibile. Se si aumenta p_{ext}, aggiungendo altri pesi, la pressione aumenta della stessa quantità in tutti i punti del liquido.

Esempio: Martinetto Idraulico

$$S_A < S_S$$

$$\Delta p = \frac{F_a}{S_a} = \frac{F_s}{S_s}$$

$$^{*} F_s = F_a \overbrace{\frac{S_s}{S_a}}^{>1} > F_a$$

$$V = S_a d_a = S_s d_s \Rightarrow$$ i volumi di fluido spostato sono uguali

$$^{*} d_s = d_a \underbrace{(S_a / S_s)}_{<1} < d_a$$

$$W_s = F_s d_s = F_a \cancel{\left(\frac{S_s}{S_a}\right)} d_a \cancel{\left(\frac{S_a}{S_s}\right)} = W_a$$

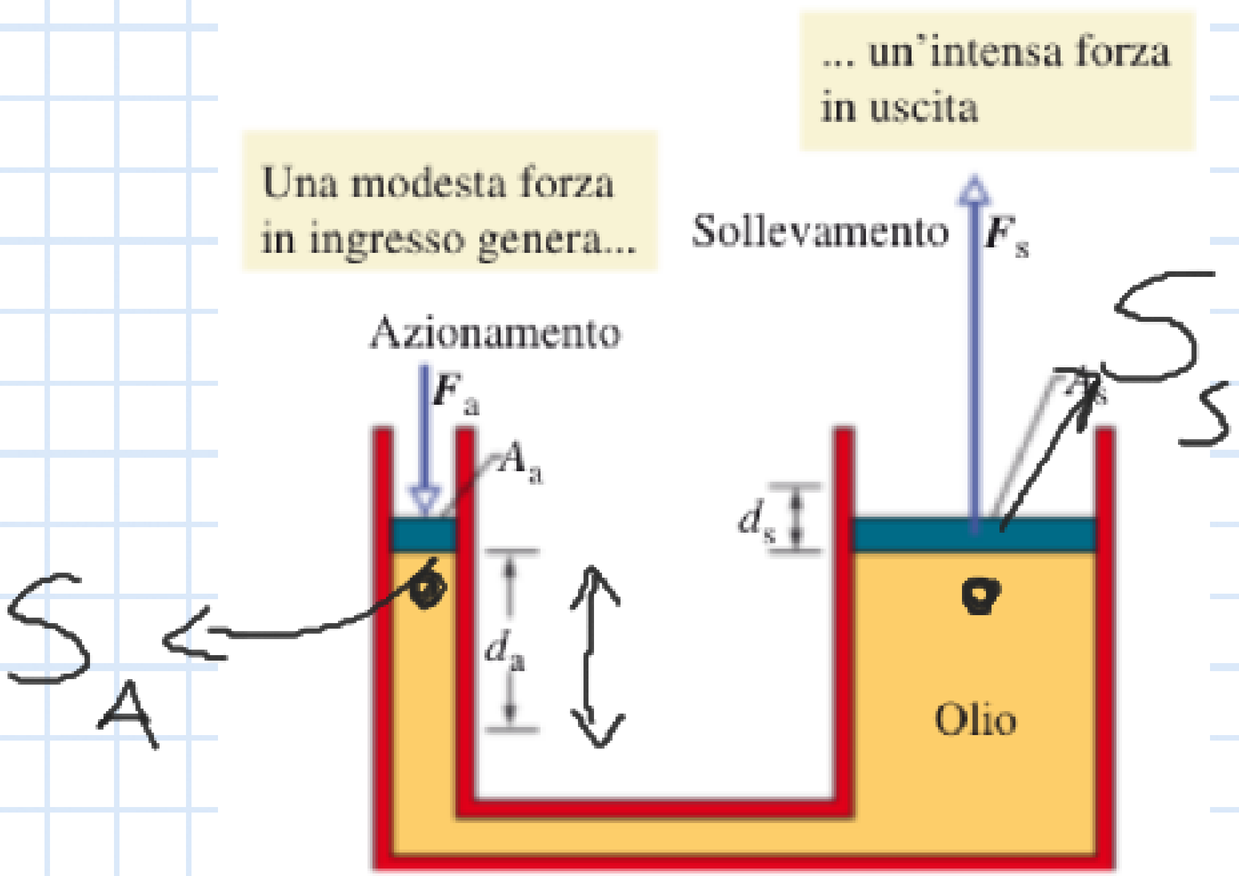


Figura 14.8 Un dispositivo idraulico utilizzato per amplificare la forza F_a. Il lavoro compiuto dalla forza F_s tuttavia, non è amplificato ed è lo stesso per le due forze nei due pistoni.

Principio di Archimede:

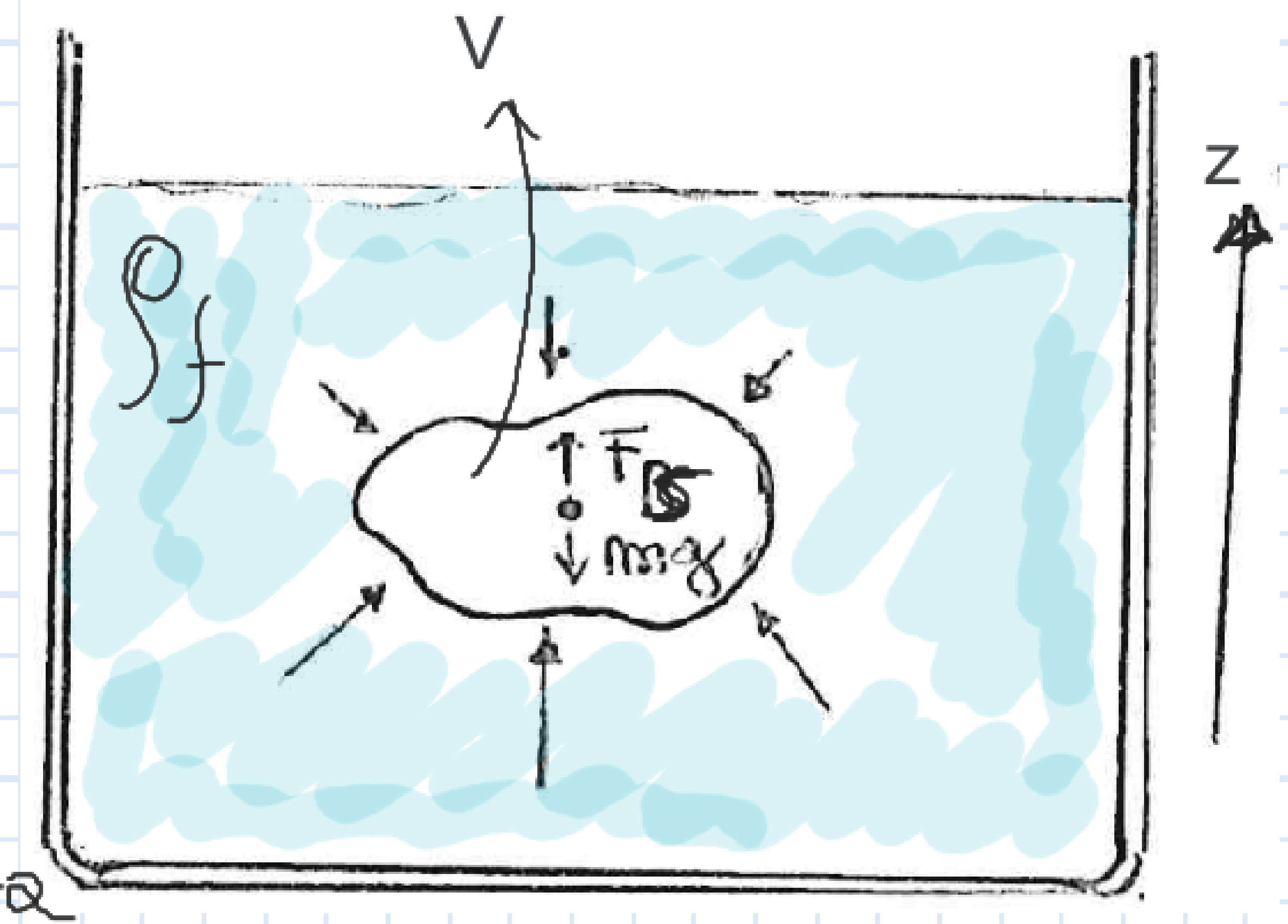
Dalla condizione di eq.io:

$\vec{F}_S + m\vec{g} = 0 \Rightarrow F_S - mg = 0$

Forza di galleggiamento $\leftarrow F_S = mg = \rho_f V g$

$\Rightarrow$ Sostituire V con una sostanza di densità ρ

$$F_{TOT} = F_S - m'g = \rho_f V g - \rho V g = (\rho_f - \rho) V g$$



Principio di Archimede:

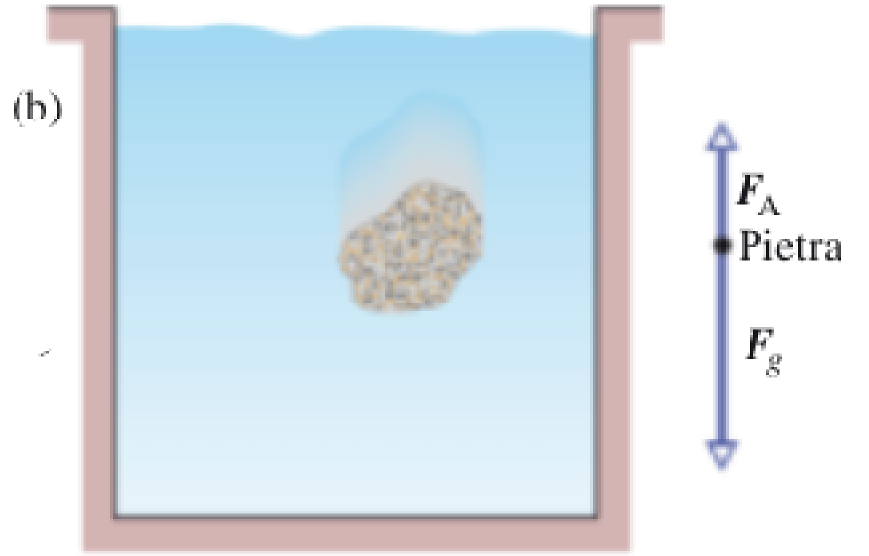
$$\vec{F}_{tot} = (\rho_f - \rho) V g$$

Se $\rho > \rho_f \Rightarrow F_{tot} < 0 \rightarrow$ il corpo affonda

Se $\rho < \rho_f \Rightarrow F_{tot} > 0 \rightarrow$ il corpo galleggia

$\Downarrow$

In entrambi i casi il corpo subisce
riceve la stessa spinta di galleggiamento



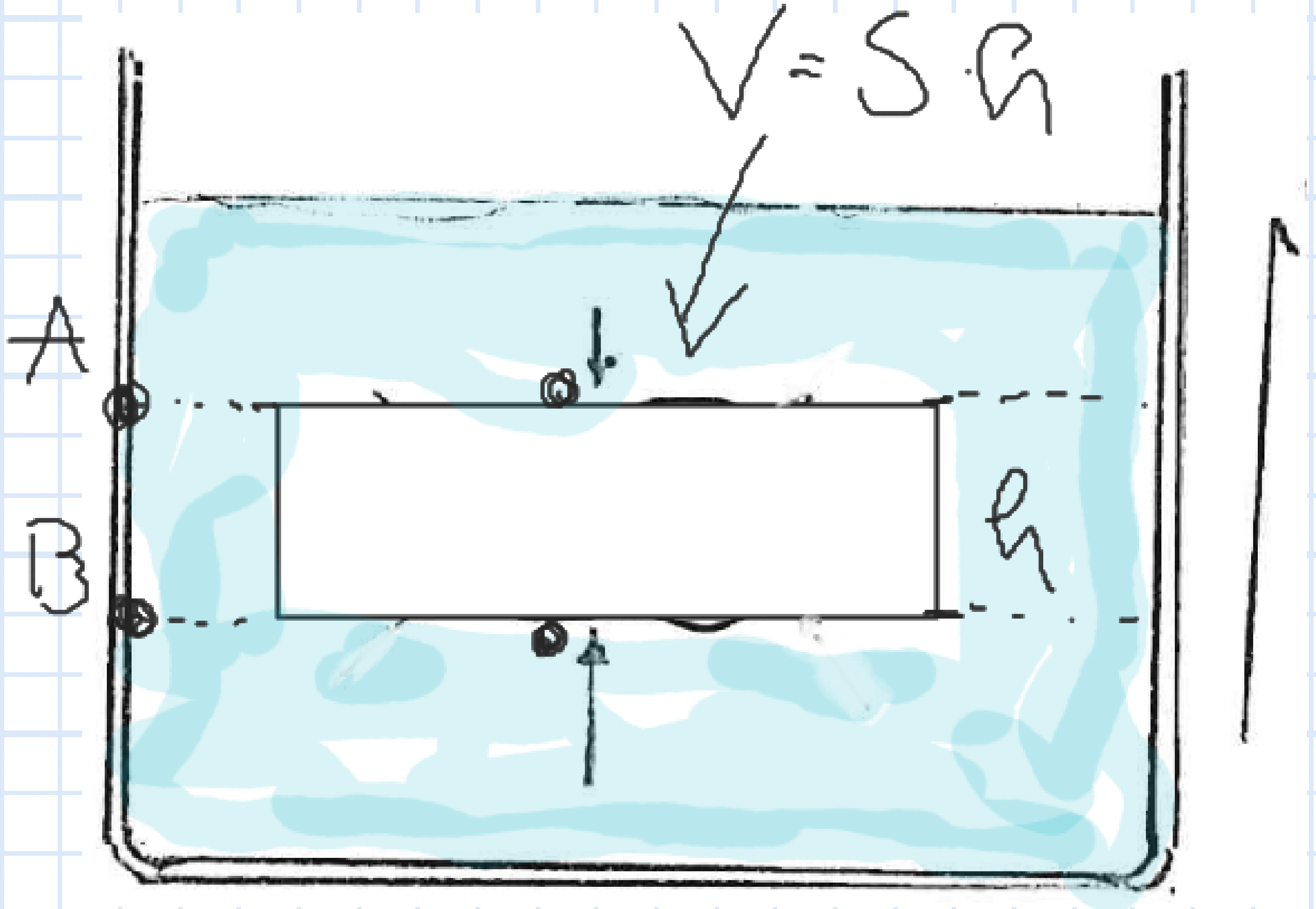
La forza netta è diretta verso il basso, sicché la pietra accelera verso il basso

La forza netta è rivolta verso l'alto, sicché il legno accelera verso l'alto

Principio di Archimede:

$$\Delta p = \rho g h$$

$$F_S = \Delta p S = \rho g h \cdot S = \rho g V$$



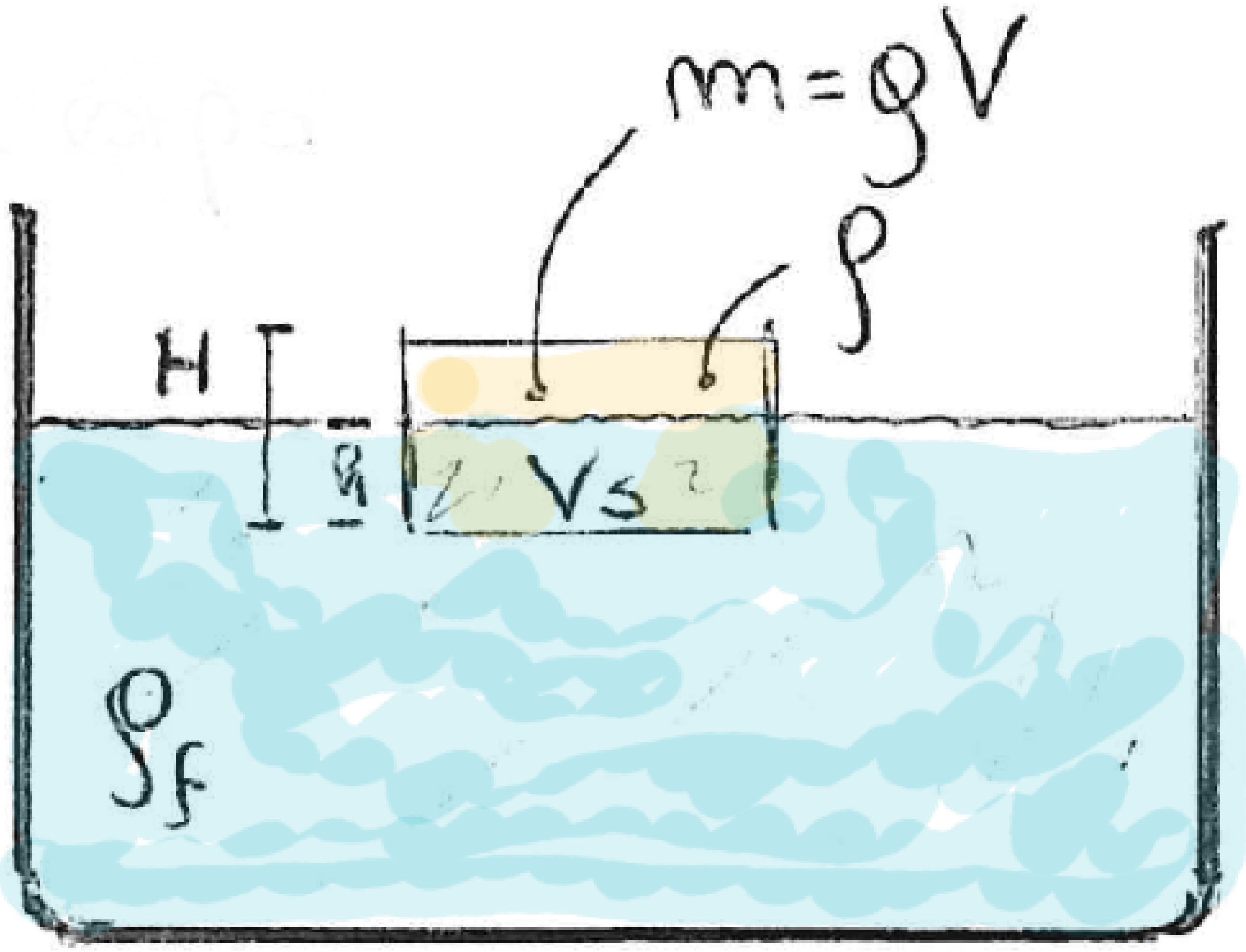
Esempio: Densita' di un corpo che galleggia

$V_s =$ volume sommerso $= Sh$

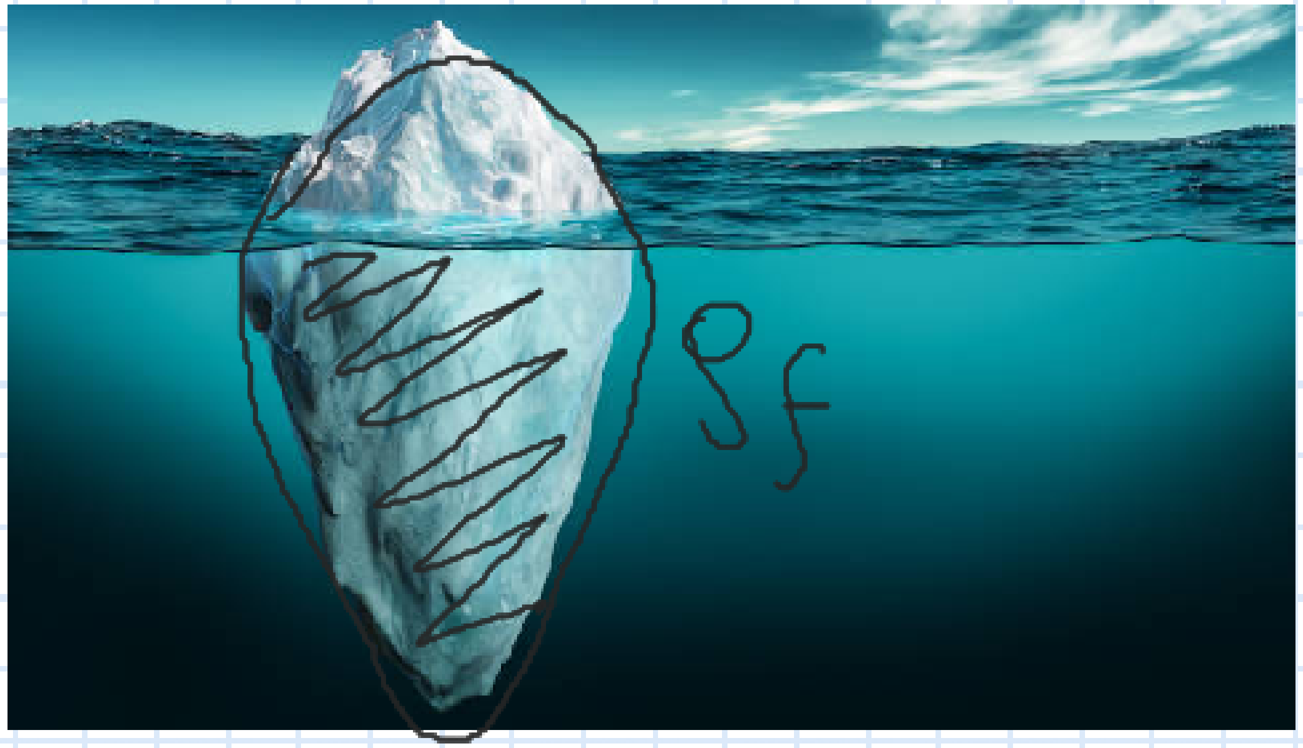
$V =$ volume Totale $= SH$

$$F_s = \rho_f g V_s = mg = \rho V g$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_f \frac{V_s}{V} = \rho_f \frac{\cancel{S}h}{\cancel{S}H} = \rho_f \frac{h}{H} \to < 1 < \rho_f$$



Esempio: Volume sommerso di un iceberg



Calcolare la percentuale di volume sommerso dell'iceberg

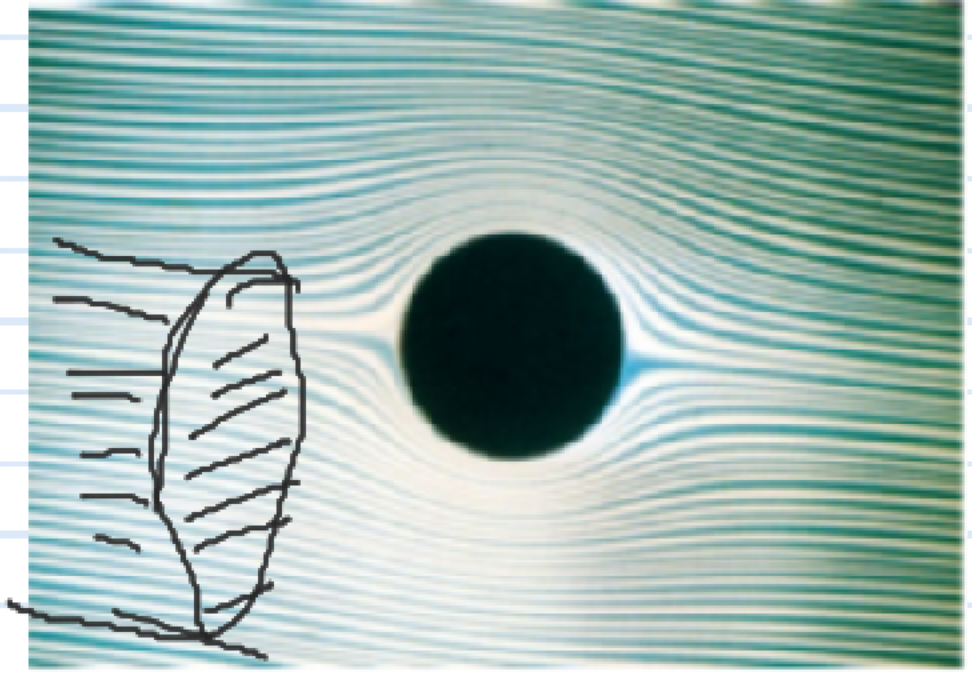
$$F_s = \rho_f V_s g = m g = \rho_{ice} V_{Tot}\, g$$

$$\frac{V_s}{V_{Tot}} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{sea}} = \frac{917\ Kg/m^3}{1024\ Kg/m^3} \cong 0.9 \Rightarrow 90\%$$

$$V_e = 1 - \frac{V_s}{V_{Tot}} = 0{,}1 = 10\%$$

Fluidi Ideali in Moto:

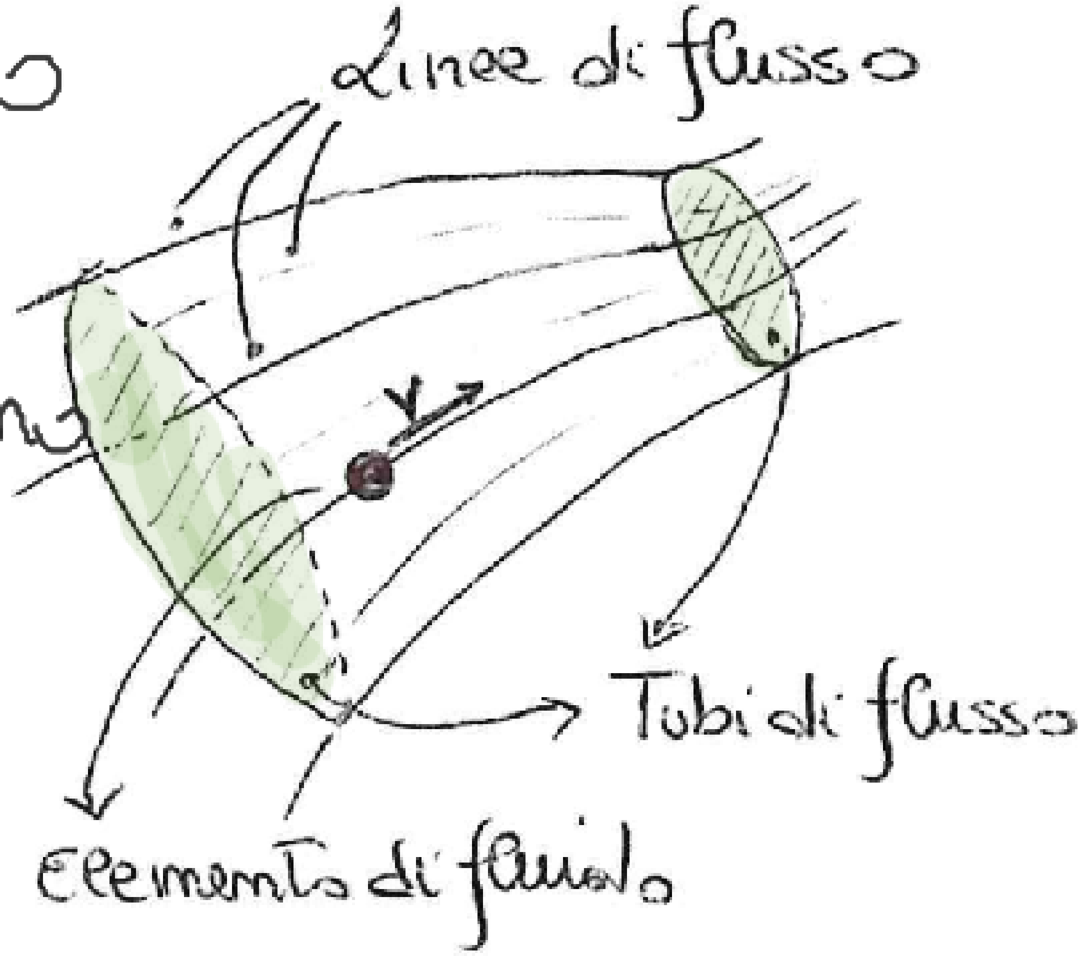
- Non Viscoso (No forze di attrito)
- INCOMPRIMIBILE $\Rightarrow \rho = \text{cost}$



Per gentile concessione di D.H. Peregrine, University of Bristol.

Figura 14.13 Il flusso laminare di un fluido intorno a un cilindro, messo in evidenza da un tracciante colorato.

- Regime Stazionario: $v(x, y, z)$ è costante nel tempo
- Linee di flusso: traiettoria seguita da un elemento di fluido
- Tubo di flusso: definito da tutte le linee di flusso che attraversano una sezione S



Equazione di Continuità:

$$V = S_1 h_1 = S_2 h_2$$

$$h_1 = v_1 \Delta t \qquad h_2 = v_2 \Delta t$$

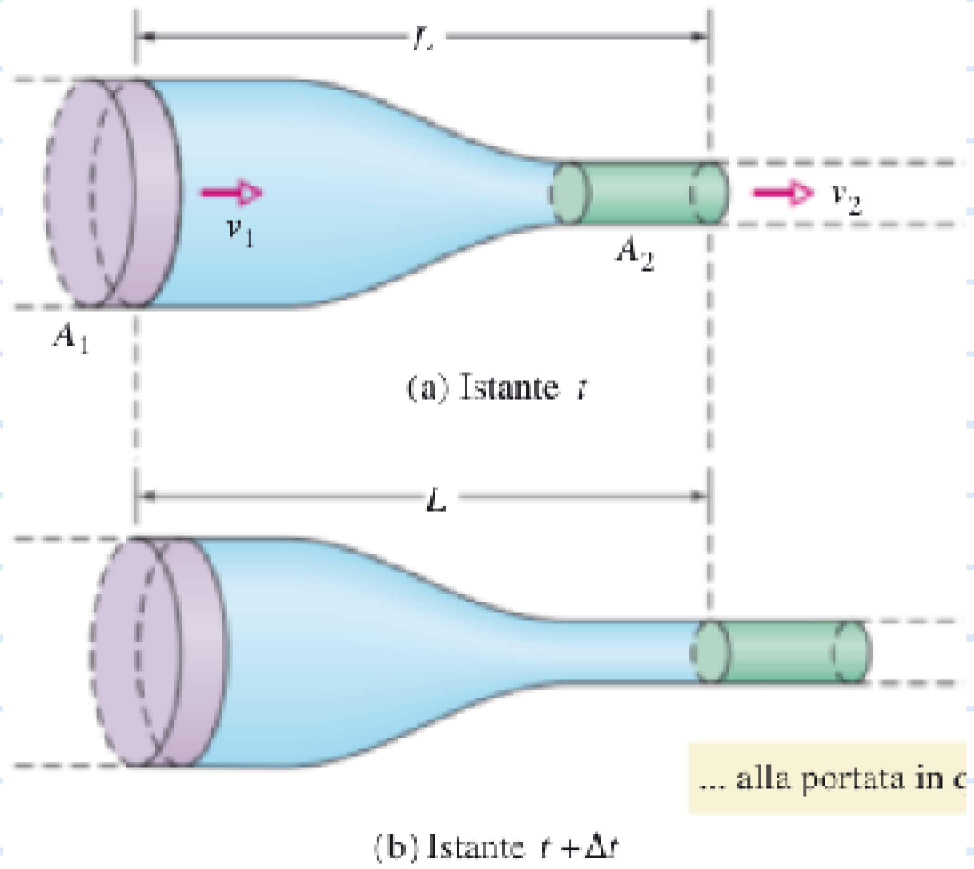
$$V = S_1 v_1 \cancel{\Delta t} = S_2 v_2 \cancel{\Delta t}$$

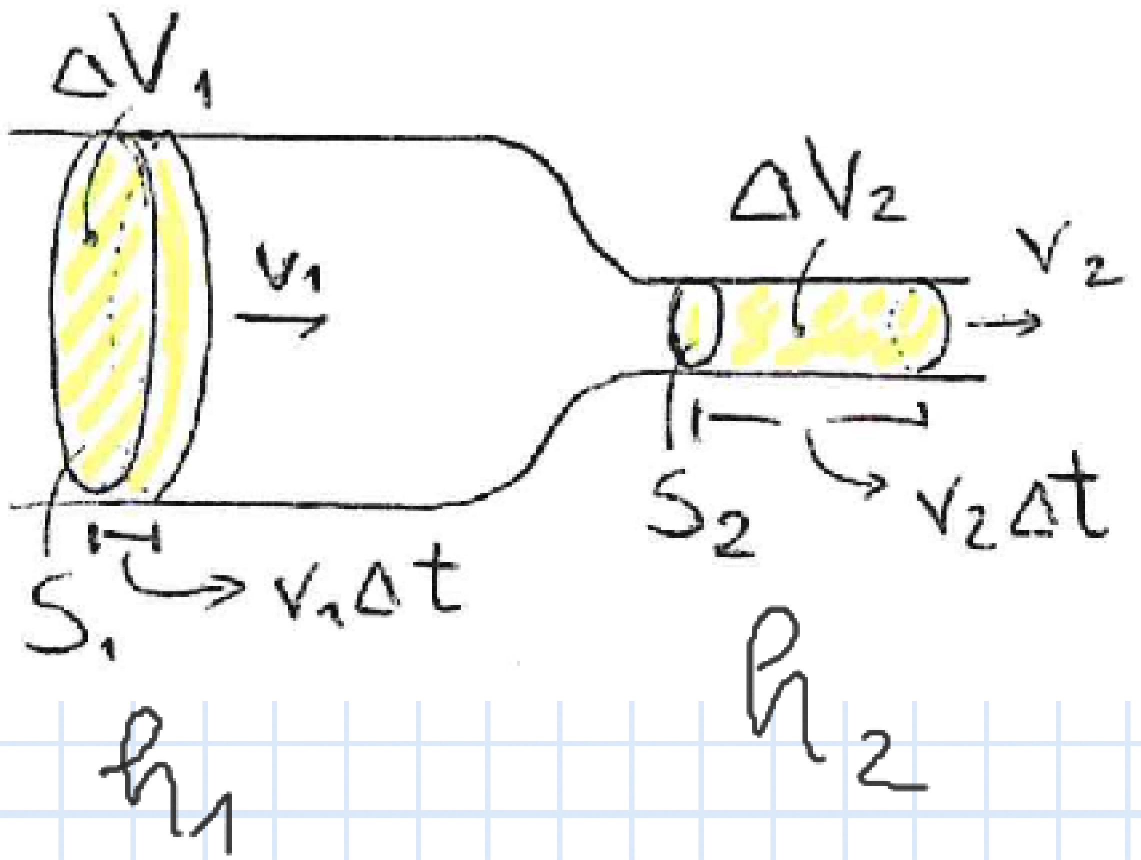
$$\underbrace{S_1 v_1 = S_2 v_2}$$

$$R = S v \Rightarrow \text{Costante}$$

||

PORTATA $\quad [m^2]\left[\frac{m}{s}\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$





Esercizio: Innaffiatore

S_1

$D = 2\,cm$

$d = 0{,}1\,cm$ (24 for.)

$v_1 = 0{,}9\,m/s \qquad v_2 = ?$

$\Rightarrow$ Applichiamo l'equazione di continuità:

$$v_1 S_1 = 24\, v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{24}\frac{S_1}{S_2}$$

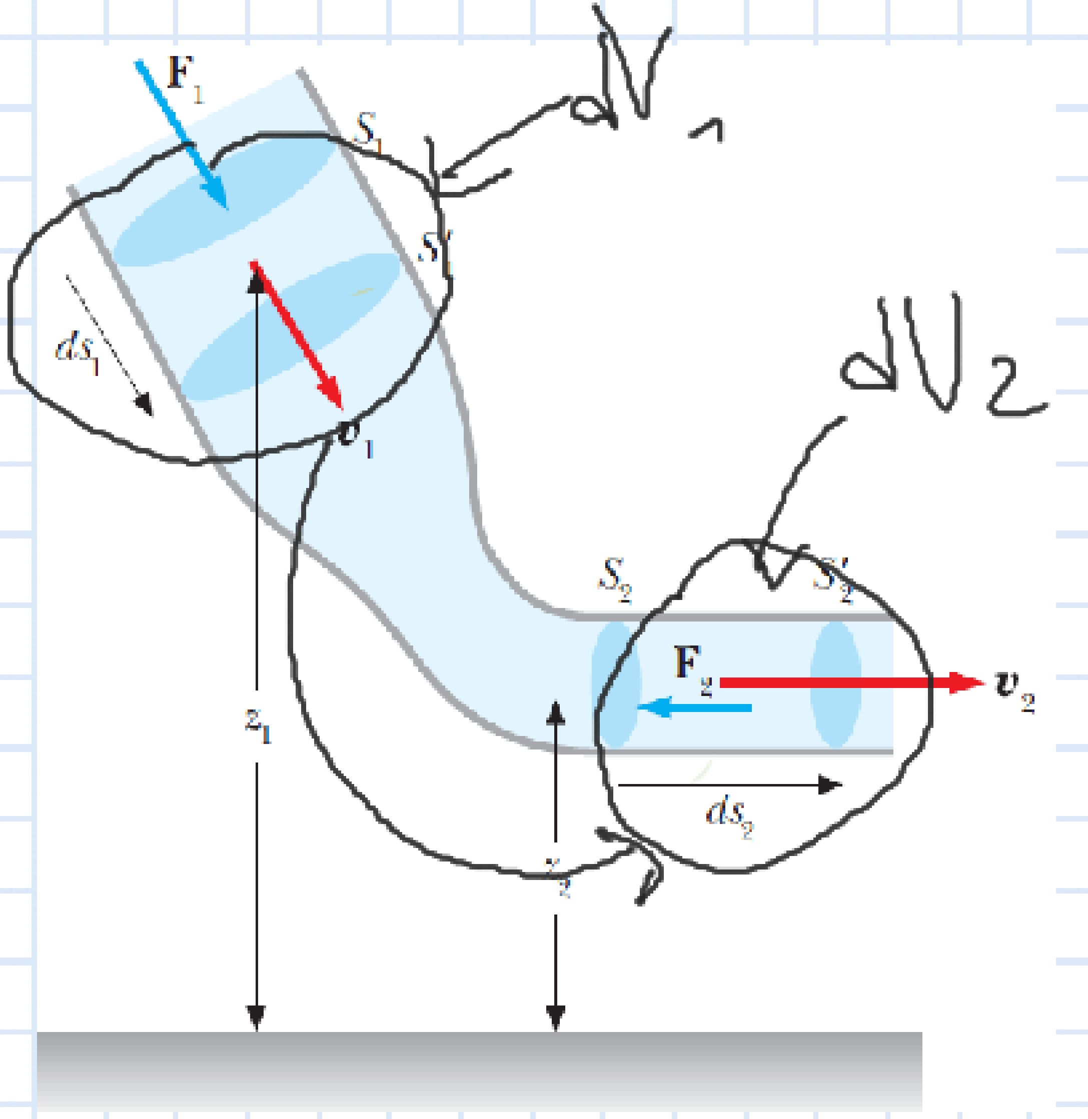
$$S_1 = R_1^2 \pi = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi$$

$$S_2 = r_2^2 \pi = \left(d/2\right)^2 \pi$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{24}\frac{D^2}{d^2} \simeq 15\,m/s$$

Equazione di Bernulli

→ Trovare una relazione tra le velocità e pressioni del fluido nella conduttura



$$dV_1 = S_1 ds_1 = dV_2 = S_2 ds_2$$

→ dalla conservazione dell'energia

i) $dW = dE_K$ → Variazione di energia cinetica

Lavoro compiuto dalle forze

Equazione di Bernulli

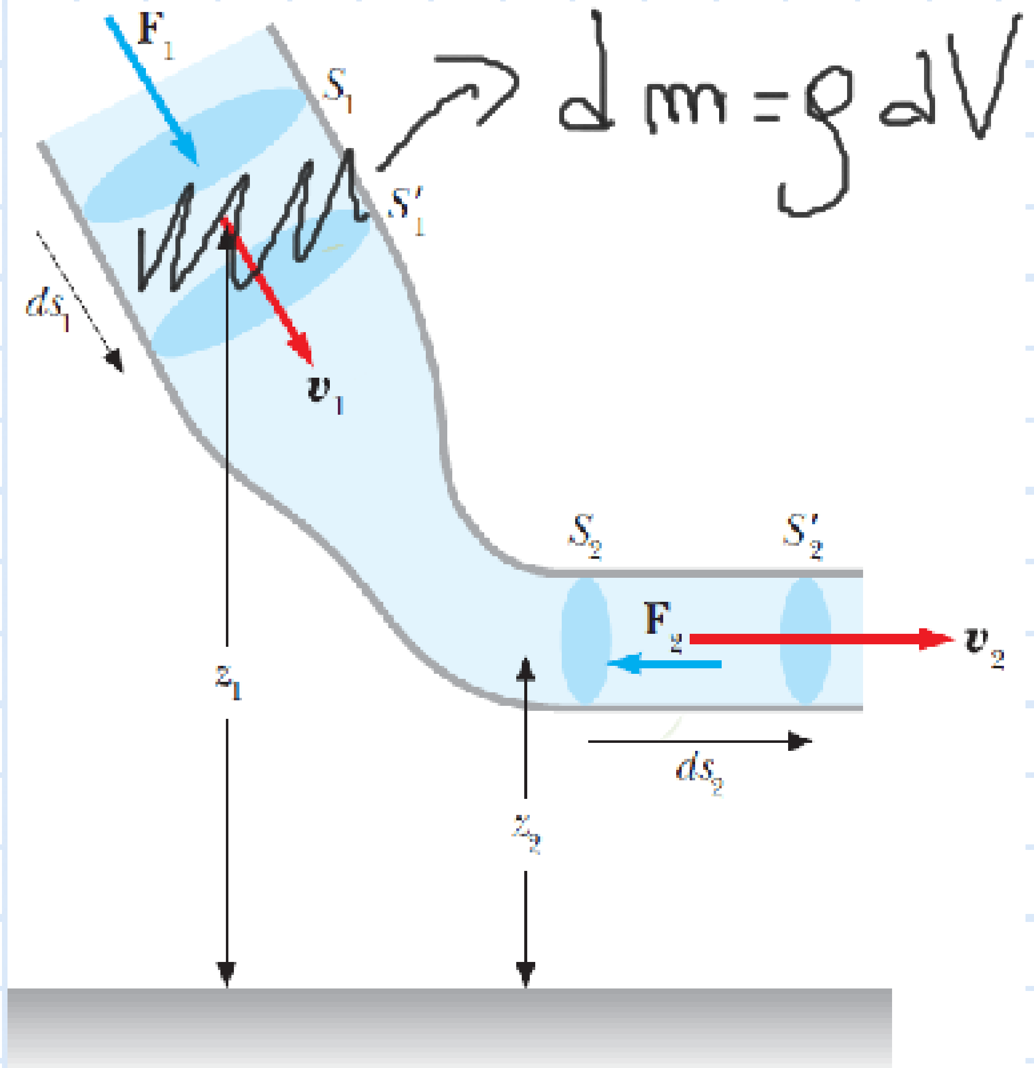
- $dW = dW_{peso} + dW_{press}$

$dW_{peso} = -dE_p = -dm\,g(z_1 - z_2)$, $dm \rightarrow \rho\, dV$

$dW_{press} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2 =$

$= p_1 \underbrace{S_1 ds_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2 ds_2}_{dV_2} = (p_1 - p_2)\, dV$

$dV_1 \longleftrightarrow dV_2 = dV$



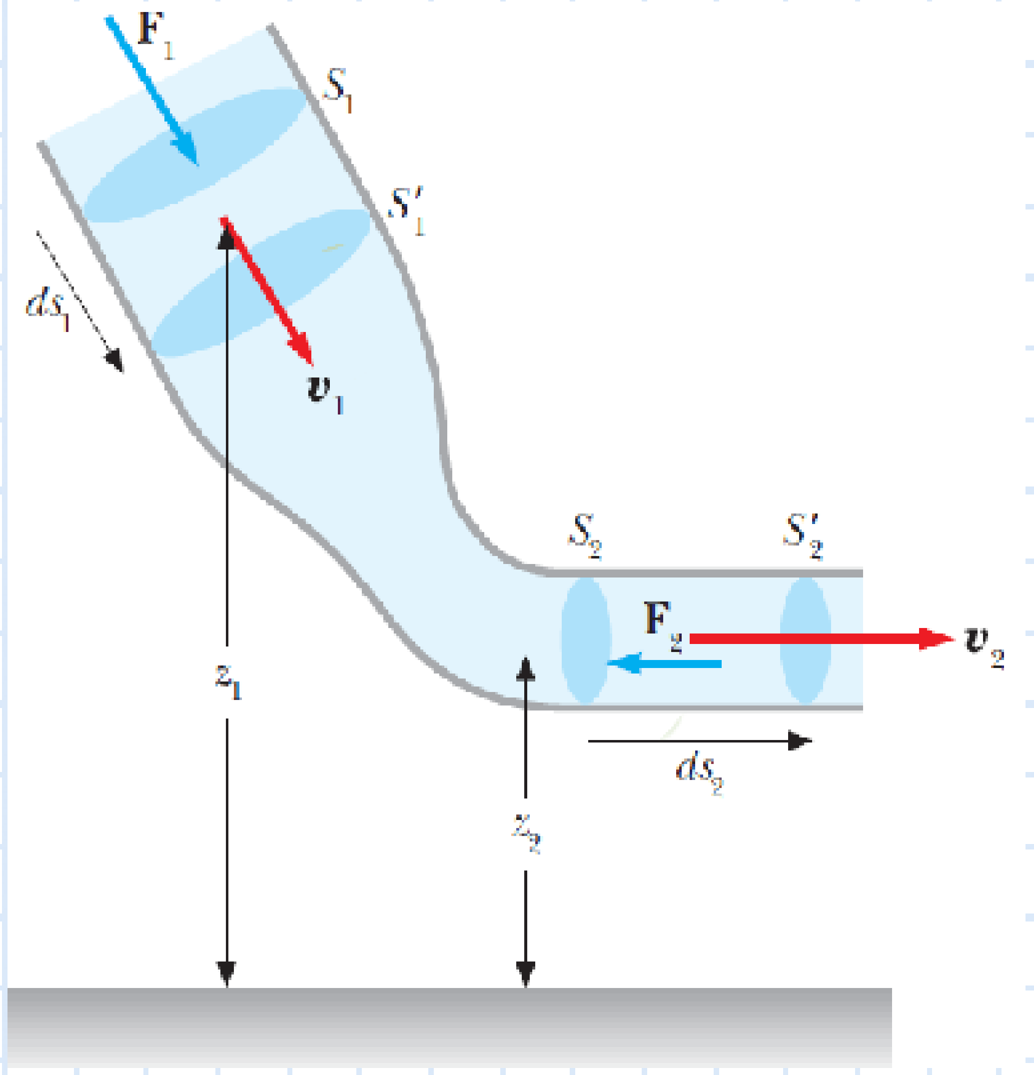
$\rightarrow dm = \rho\, dV$

- $dE_K = \frac{1}{2} dm\, v_2^2 - \frac{1}{2} dm\, v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\, dV (v_2^2 - v_1^2)$

(:)

$-\rho \cancel{dV} g(z_1 - z_2) + (p_1 - p_2)\cancel{dV} = \frac{1}{2}\rho \cancel{dV} (v_2^2 - v_1^2)$

Equazione di Bernulli



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

- $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z =$ costante

→ Se $v = \emptyset \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1)$

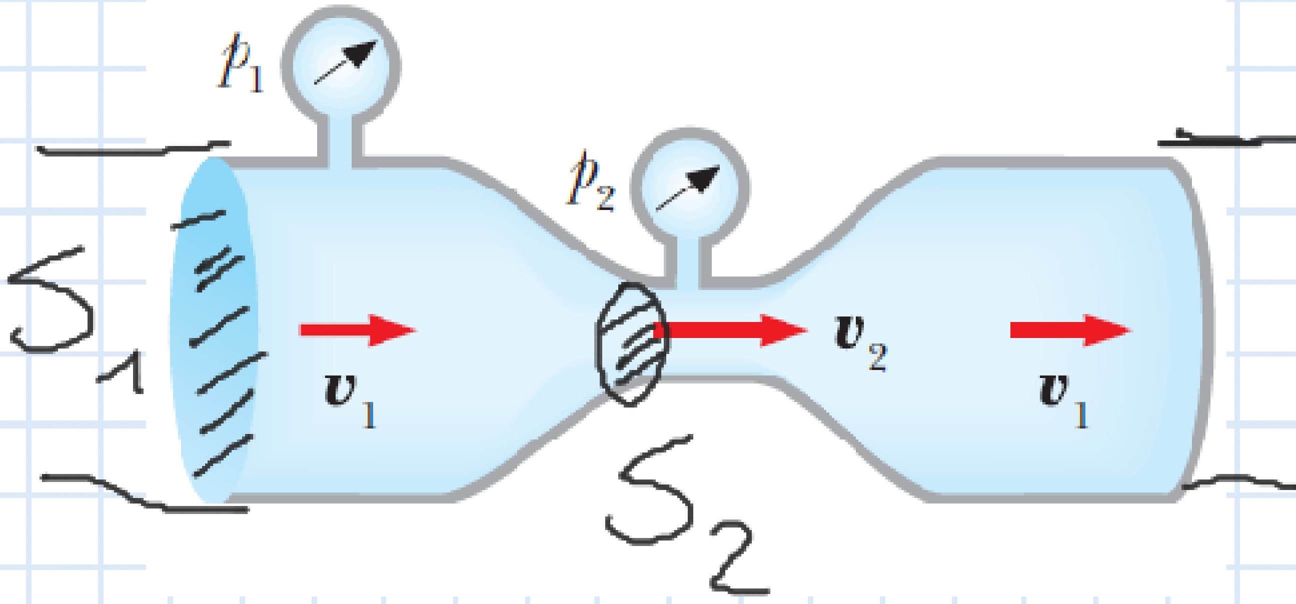
→ Se condotto orizzontale: $\Delta h = 0$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

Es: Tubo di Venturi

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

$$i)\ p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$



$$ii)\ R_1 = v_1 S_1 = R_2 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = v_1 S_1 / S_2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2\,\frac{(p_1 - p_2)}{\rho}\,\frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}$$

Es: Teorema di Torricelli

S_f = Sezione del foro

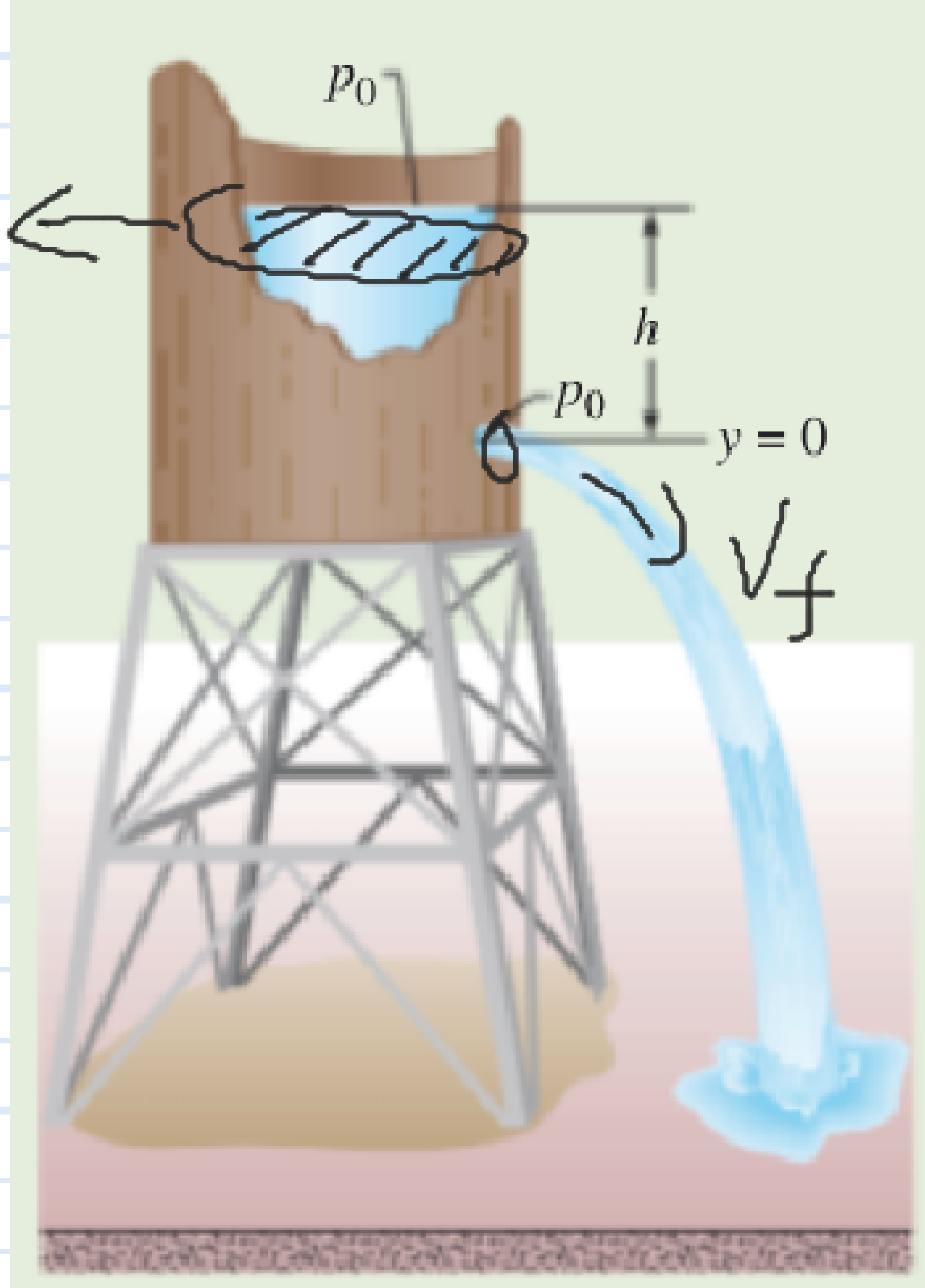
S_r = Sezione del recipiente

$$S_r v_0 = S_f V_f \Rightarrow V_0 = \frac{S_f}{S_r} V_f \simeq 0 \qquad \frac{S_f}{S_r} \ll 1$$

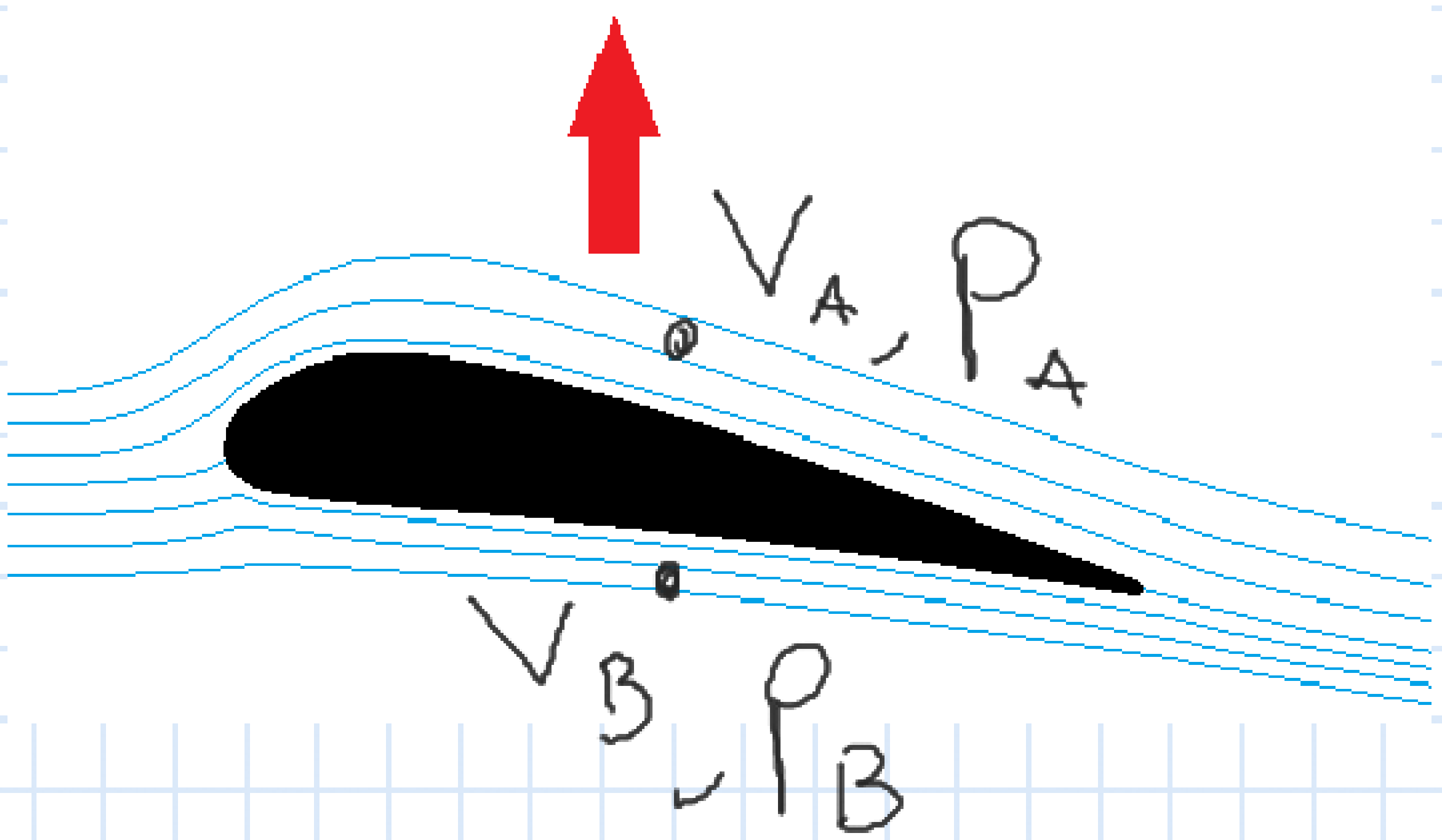
$$\cancel{P_0} + \frac{1}{2}\cancel{\rho v_0^2}^{\to 0} + \rho g h = \cancel{P_0} + \frac{1}{2}\rho V_f^2 + \underbrace{\rho g \cancel{0}}_{=0}$$

$$V_f = \sqrt{2gh}$$

$\Rightarrow$ La velocità di efflusso è pari a quella che avrebbe il fluido in caduta libera da h



Es: Portanza di un ala (fluido ideale)



$$P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2$$

$$V_A = V + \Delta V$$
$$V_B = V - \Delta V$$

$$\Delta p = 2\rho V \Delta V \Rightarrow F = \Delta p\, A = 2\rho V \Delta V A$$

Superficie Ala

Es: Sifone

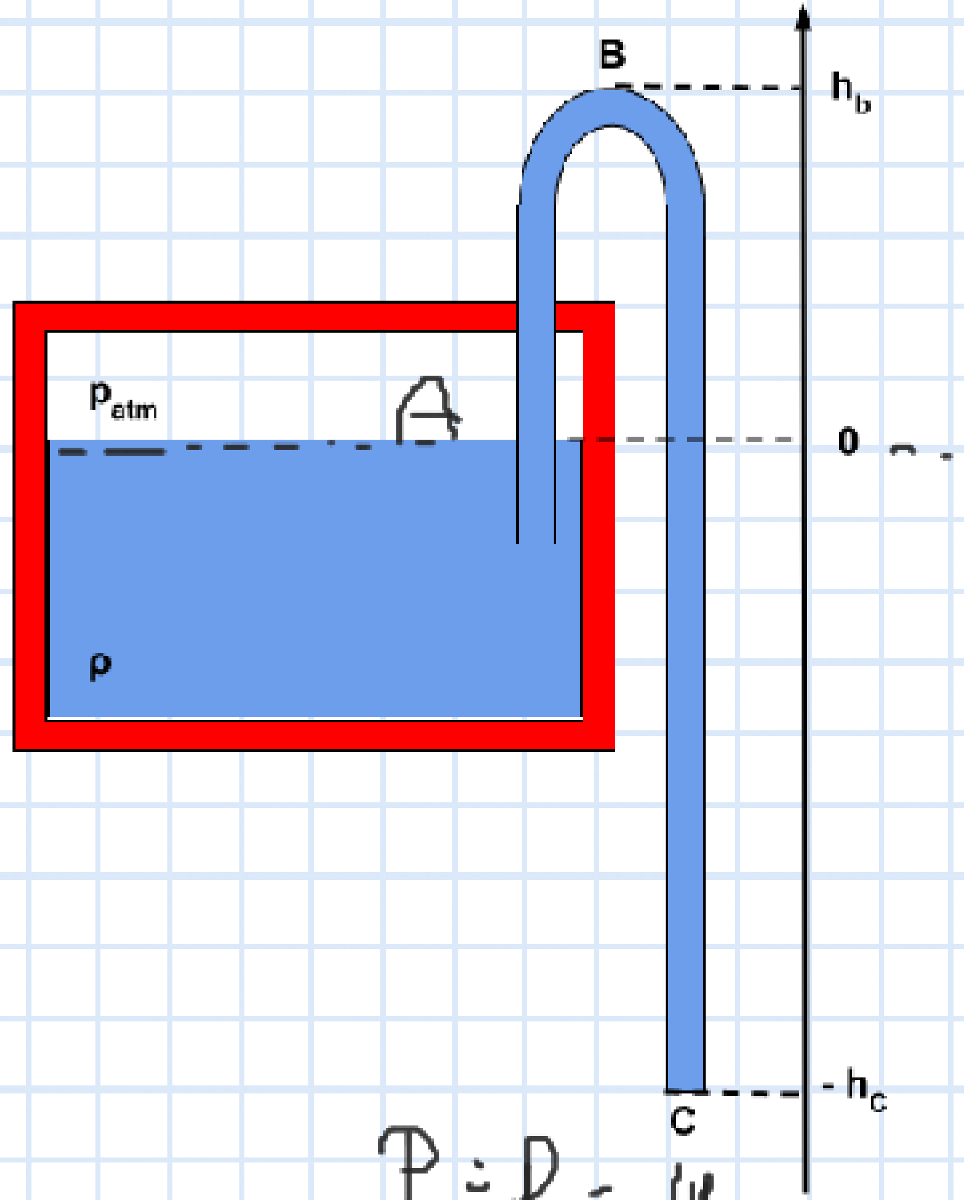
$$P + \frac{1}{2}\rho v + \rho g h = \text{cost}$$

a) v_c ?

$$\cancel{P_c} + \frac{1}{2}\rho v_c^2 - \rho g h_c = \cancel{P_A} + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_A^2} + \cancel{\rho g h_a} \qquad h = 0$$

$$P_c = P_A = P_{atm}$$

$$v_c = \sqrt{2 g h_c}$$



$P_c = P_{atm}$

b) $P_B = ?$

$$P_B + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_B^2} + \rho g h_B = \overset{P_{atm}}{\overset{\shortparallel}{P_c}} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_c^2} - \rho g h_c \Rightarrow P_B = P_{atm} + \rho g(-h_c - h_B)$$

$$R_B = \cancel{\rho} v_B = R_c = \cancel{\rho} v_c \Rightarrow v_B = v_c \qquad = P_{atm} - \rho g (h_c + h_B)$$

Es: Sifone

c) $h_{B\,max}$

$\rightarrow v_B = 0 \;\&\; p_B = 0$

$p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B = p_{atm}$

$\rho g h_{B,max} = p_{atm} \Rightarrow h_{B,max} = p_{atm}/\rho g$

$h_B < h_{B,max} = p_{atm}/\rho g$