SISTEMI DINAMICI

Abbiamo messo : $\dot{x} = f(x)$

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$\rightarrow$ punti critici $\quad f(x^*) = 0$

$\longrightarrow$ isocline $\quad f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1 \dots x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \qquad\qquad \dot{x}_i = 0 \\ &\;\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1 \dots x_n) \end{aligned}$$

$\dot{x} = f(x) \rightsquigarrow$ localmente vicino a x^*

$$\dot{z} = A z \qquad A_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{(x^*)}$$

Vicino ad un punto critico : A

→ autovalori $E = E^s \oplus E^c \oplus E^u$

$E^c = \phi$ ⇝ punto critico iperbolico

I punti critici:

- pozzi: Tutti gli autovalori hanno parte reale negativa: $E = E^s$
- sorgenti: Tutti gli autovalori hanno parte reale positiva: $E = E^u$
- sella: altrimenti: $E = E^u \oplus E^s$

fuoco: sottospazio con autovalori complessi con parte reale non-zero

centro: sottospazio con autovalori puramente immaginari

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{3x - x^2}_{} - 2xy \\ \dot{y} = \underbrace{2y - y^2}_{} - xy \end{cases} \qquad x, y > 0$$

→ due specie in competizione

$$\dot{u} = u\left(1 - \frac{u}{k}\right)$$

Prima cosa: punti critici

$$x(3 - x - 2y) = 0$$
$$y(2 - y - x) = 0$$

$(0,0)$
$(0,2)$
$(3,0)$
$(1,1)$

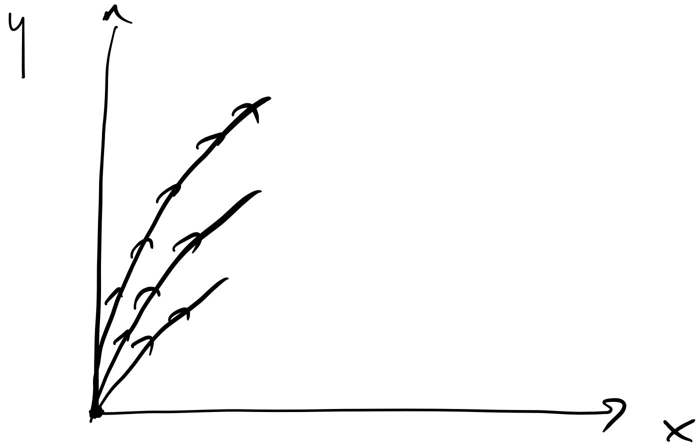
Adesso linearizziamo

$$\begin{aligned} &3x - x^2 - 2xy \\ &2y - y^2 - xy \end{aligned}$$

$$Df = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - 2y - x \end{pmatrix}$$

$(0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$(0,2)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

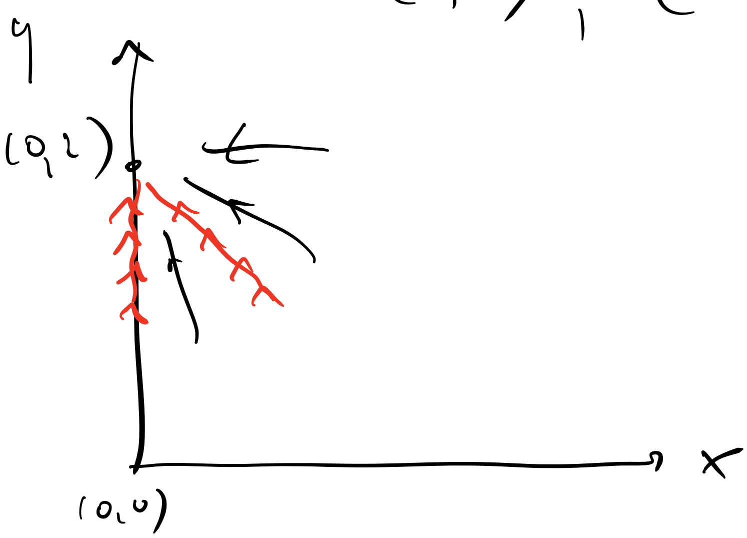
$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)(2+\lambda)$$

$$\lambda = -1 \qquad \lambda = -2$$

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

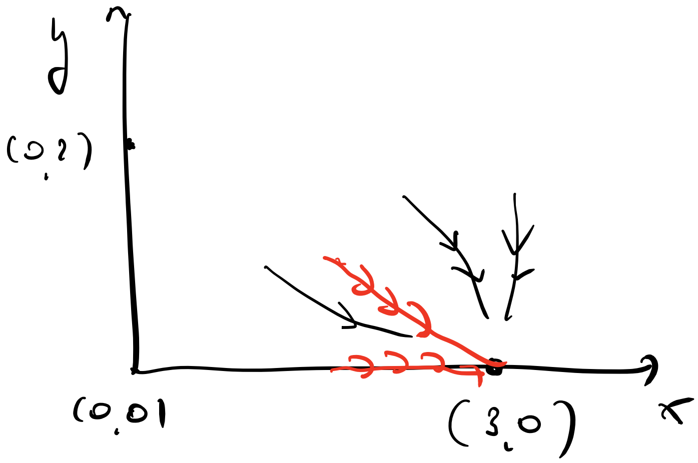


$(3,0)$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -3$, $\lambda = -1$

$(1,0)$ $(-3,1)$

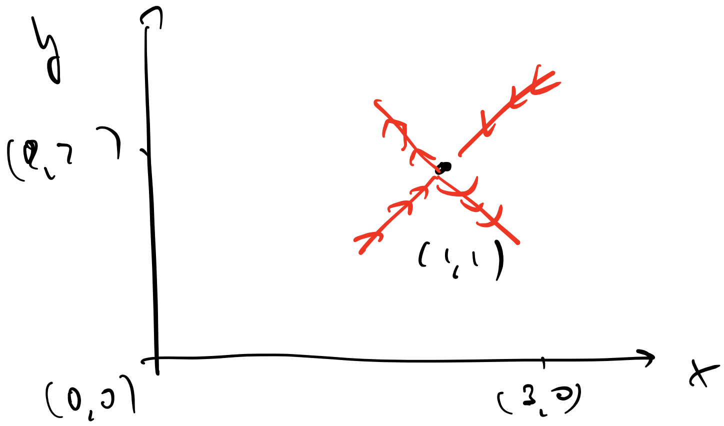


$(1,1)$

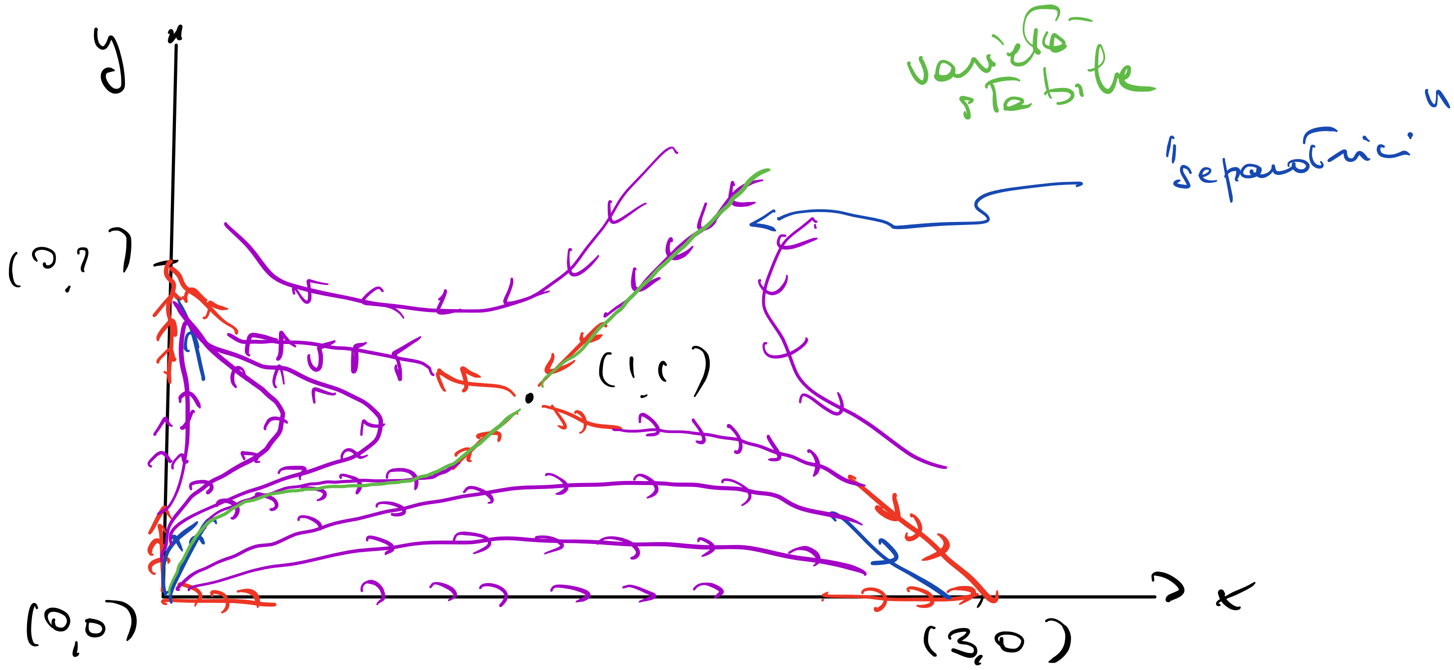
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{2} \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}$$

punto sella



Mettiamo tutto insieme



Interpretazione: in generale due specie non possono coesistere.

Per un punto critico attrattivo x^* parliamo di bacino di attrazione per indicare l'insieme delle condizioni iniziali x_0 t.c. $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$

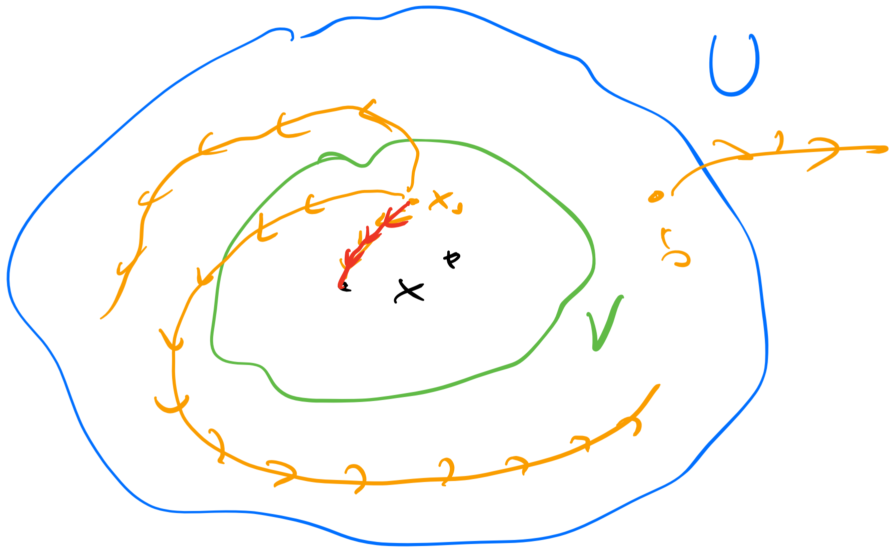
STABILITÀ

→ misura di quanto le orbite si allontanano

<u>Def</u> Il punto di equilibrio x^* di un flusso φ_t si dice stabile à la Lyapunov, se $\forall$ intorno $U \ni x^*$ possiamo trovare un intorno $V \subset U$ tale che $\forall$ soluzione $x(t)$ che inizia in V (= con dato iniziale $x_0 \in V$),

$x(t)$ rimane in U per ogni $t \geq 0$.

Se x^* non è stabile, lo chiamiamo instabile.



<u>Def</u> Il punto di eq. x^* si dice asintoticamente stabile se in aggiunta possiamo scegliere V tale che

$$x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x^*$$

Sistema non-lineare: se tutti gli autovalori di $Df|_{x^*}$ hanno parte reale negativa $\to$ x^* è asintoticamente stabile.

Def Sia x^* un punto di equilibrio di un flusso φ_t, $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\rightarrow$ L è detta di Lyapunov (forte) per x^* se $\exists$ U intorno aperto di x^* t.c. $L(x^*) = 0$ e $\forall x \in U \setminus x^*$ valga:

1) $L(x) > 0$

2) $L(\varphi_t(x)) < L(x)$ per $t > 0$

Nel caso in cui $L(\varphi_t(x)) \leq L(x)$ parliamo di funzione di Lyapunov debole.

Spesso: $L \in C^1 \rightarrow$ la seconda condizione si può riformulare dicendo $\frac{d}{dt} L < 0$ lungo il flusso

$$\frac{d}{d\tau} L = \nabla L(x) \cdot \frac{dx}{d\tau}$$

$$= \nabla L(x) \cdot f(x) < 0$$

$\dot{x} = f(x)$

Geometricamente: il gradiente di L punta in direzione opposta al campo vettoriale.

Teorema Sia x^* un punto di eq. di un flusso φ_τ. Se possiamo trovare una funzione di Lyapunov debole per x^*, allora x^* è stabile.

Se L è funzione di Lyapunov forte: x^* è asintoticamente stabile.

Esempi

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$