ANGOLI DI EULERO - corpo rigido con pto fisso (possono essere usati anche rispetto c.m.)

Consideriamo una terna fissa $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$

La config. del corpo rigido è data da come si dispone una terna solidale $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ rispetto alla terna fissa $\Rightarrow$ qta è data da una ROTAZIONE $\in SO(3)$

$\Longrightarrow$ sp. delle config. di un corpo rigido con pto fisso è

$$Q = SO(3)$$

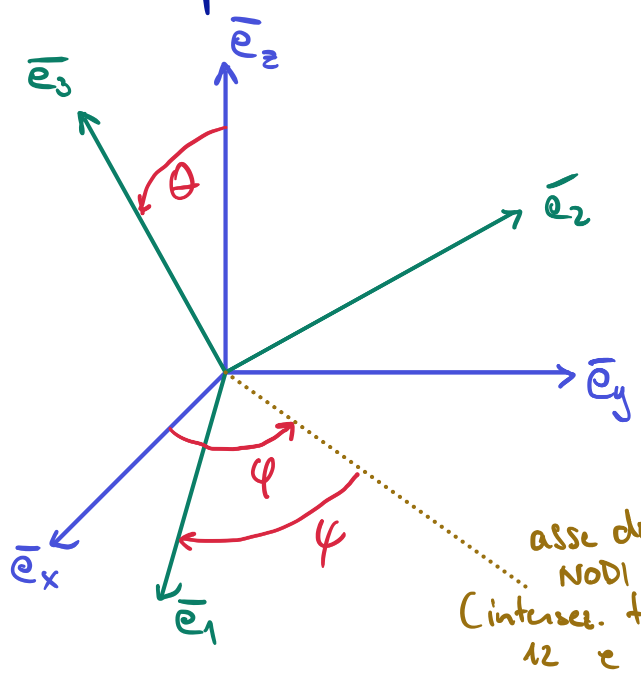
(se non c'è pto fisso $Q = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{posizione del c.m.}} \times SO(3)$)

Vediamo come parametrizzare Q. Si usano gli ANGOLI d'EULERO

θ: angolo tra $\bar{e}_3$ e $\bar{e}_z$ (nutazione)

φ: angolo tra $\bar{n}$ e $\bar{e}_x$ (precessione)

ψ: angolo tra $\bar{n}$ e $\bar{e}_1$ (rotazione propria)



asse dei NODI (intersez. tra piani 12 e xy) $= \langle \bar{e}_3, \bar{e}_z \rangle^\perp$ $\rightarrow$ $\bar{n} = \cos\varphi\, \bar{e}_x + \sin\varphi\, \bar{e}_y$

$e_x\, e_y, e_z$: terna FISSA
$e_1\, e_2\, e_3$: terna SOLIDALE al corpo rigido

θ, φ, ψ determinano una rotaz. in $SO(3)$ (che manda $e_{xyz} \to e_{123}$)

Ogni angolo determina una rotazione indip.

$\downarrow$

Si parta con terne sovrapposte

1) si tenga $\bar{e}_3 = \bar{e}_z$ e si ruoti di angolo φ portando $\bar{e}_1$ a coincidere con l'asse dei nodi $\bar{n}$. (R_φ)

2) Si tenga fisso $\bar{e}_1$ e si ruoti di angolo θ. (R_θ)

3) Si tenga fisso $\bar{e}_3$ e si ruoti di angolo ψ. (R_ψ)

Individuiamo s.d.r. intermedi

$$\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z \xrightarrow{\varphi} \bar{e}_x', \bar{e}_y', \bar{e}_z' \xrightarrow{\theta} \bar{e}_x'', \bar{e}_y'', \bar{e}_z'' \xrightarrow{\psi} \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$$

Prendiamo vettore colonna $\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (x, y, z componenti in base $\bar{e}_x \bar{e}_y \bar{e}_z$)

Componenti in base $\bar{e}_x' \bar{e}_y' \bar{e}_z'$ sono date da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora passiamo a s.d.r. $\bar{e}_x'', \bar{e}_y'', \bar{e}_z''$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Infine andiamo a $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R_\psi \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad R_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\psi R_\theta R_\varphi = R_\psi \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\equiv R_{\psi\theta\varphi}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La trasf. inversa è data dalla trasposta, essendo qta matrice una matrice di $SO(3)$.

Siamo ora in grado di calcolare le componenti di $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ nella base $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z$:

prendiamo come es. $\bar{e}_1$; le sue componenti nella base $e_1 e_2 e_3$ sono $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; per ottenere le componenti nella base $e_x e_y e_z$, dobbiamo applicare $R_{\psi\theta\varphi}^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = R_{\psi\theta\varphi}^{T}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ottenendo la prima riga della matrice $R_{\psi\theta\varphi}$. Lo stesso si può fare per $\bar{e}_i$ $i=1,2,3$.

A qto pto possiamo calcolare $\dot{\bar{e}}_i$ facendo derivate temporali di tali componenti.

Poi $\bar{\omega} = \frac{1}{2}\sum_i \bar{e}_i \times \dot{\bar{e}}_i \rightsquigarrow \bar{\omega}$ in s.d.r. $e_x e_y e_z$.

Per avere $\bar{\omega}$ in s.d.r. $e_1 e_2 e_3$ basta che applichi $R_{\psi\theta\varphi}$

(Conto lungo; vediamo sotto uno short-cut)

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi}\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\bar{e}_1 + (\dot{\varphi}\,\text{sen}\theta\cos\psi - \dot{\theta}\,\text{sen}\psi)\bar{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\bar{e}_3$$

Osservazione.

Riprendiamo eq. $\dot{\bar{u}} = \bar{\omega}\times\bar{u}$:

$$\dot{u}_i = \sum_{jk=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,\omega_j u_k = \sum_k\Big(\sum_j \epsilon_{ijk}\omega_j\Big)u_k \equiv \Omega_{ik}u_k$$

con $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$ ← determinata da 3 parametri

→ possiamo quindi scrivere $\dot{\bar{u}} = \Omega \bar{u}$ (*)
dove Ω è una matrice 3×3 ANTISIMMETRICA

La (*) ci dice che in un tempo infinitesimo δt, $\bar{u}(t)$ varia come
$\bar{u} \mapsto \bar{u} + \delta\bar{u}$ con $\delta\bar{u} = \Omega \bar{u}\, \delta t$.

Questa variazione è la stessa che si ottiene ruotando il vettore $\bar{u}$ di un angolo infinitesimo $|\bar{\omega}|\delta t$, attorno all'asse $\bar{\omega}$.
Vediamo perché con un esempio: $\bar{\omega} \parallel \bar{e}_3 \to \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Una rotaz. infinitesima di angolo $|\bar{\omega}|\delta t$ attorno a $\bar{\omega}$:

$$\begin{pmatrix} \cos|\bar{\omega}|\delta t & -\operatorname{sen}|\bar{\omega}|\delta t & \\ \operatorname{sen}|\bar{\omega}|\delta t & \cos|\bar{\omega}|\delta t & \\ & & 1 \end{pmatrix} \underset{|\bar{\omega}|\delta t \ll 1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\omega\delta t & \\ \omega\delta t & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$ cioè proprio $\mathbb{1} + \Omega\delta t$

Se componiamo due rotazioni $R_1 = 1 + \Omega_1$ $R_2 = 1 + \Omega_2$

$$R_1 R_2 = 1 + (\underbrace{\Omega_1 + \Omega_2}_{\text{matrice relativa a } \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2})$$

⇒ scomponiamo $\bar{\omega} = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_B$; allora $\Omega = \Omega_A + \Omega_B$
ciò vuol dire scomporre rotaz. infinitesima attorno a $\bar{\omega}$ di angolo $|\bar{\omega}|\delta t$ in una rotaz. infinitesima attorno a $\bar{\omega}_A$ di angolo $|\bar{\omega}_A|\delta t$ e una attorno $\bar{\omega}_B$ di angolo $|\bar{\omega}_B|\delta t$

Tornando alla trottola.
Un' $\bar{\omega}$ generica può essere scomposta come

$$\bar{\omega} = \omega_\varphi \bar{e}_z + \omega_\theta \bar{n} + \omega_\psi \bar{e}_3$$

Cioè variazione di terna solidale alla trottola si scompone in una rotaz. infinitesima $\omega_\varphi \delta t$ attorno a $\bar{e}_z$, di $\omega_\theta \delta t$ attorno a $\bar n$ e di $\omega_\psi \delta t$ attorno a $\bar e_3$.

(Qte rotaz. non commutano fra loro, ma a livello infinitesimo è irrilevante).

Viste le coordinate scelte, gli angoli sarebbero rispettivamente $\dot\varphi\,\delta t$, $\dot\theta\,\delta t$ e $\dot\psi\,\delta t$ $\Rightarrow$

$$\bar\omega = \dot\varphi\, \bar e_z + \dot\theta\, \bar n + \dot\psi\, \bar e_3$$

Per scrivere le componenti del vett. $\bar\omega$ nel s.d.r. $e_1e_2e_3$, ci serve sapere le comp. di $\bar e_z, \bar n$ e $\bar e_3$ in tale base.

$\longrightarrow$ dobbiamo applicare $R_{\psi\theta\varphi}$ alle loro comp. nel s.d.r. $e_xe_ye_z$

dove
$$R_{\psi\theta\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + \cos\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi \\ -\cos\varphi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \operatorname{sen}\theta\cos\psi \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nella base $e_1e_2e_3$

$$\bar e_z = R_{\psi\theta\varphi}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\\ \operatorname{sen}\theta\cos\psi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \bar e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\bar n = R_{\psi\theta\varphi}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \operatorname{sen}\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi\cos\psi - \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi} + \operatorname{sen}^2\varphi\cos\psi + \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\operatorname{sen}\psi} \\ -\cos^2\varphi\operatorname{sen}\psi - \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi} - \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\psi + \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cos\psi} \\ \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta} - \cancel{\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\psi\\ -\operatorname{sen}\psi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\bar\omega = \dot\varphi\bar e_z + \dot\theta\bar n + \dot\psi\bar e_3 = (\dot\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)\,\bar e_1 + (\dot\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)\,\bar e_2 + (\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)$$

Ora possiamo calcolare l' **ENERGIA CINETICA** rotazionale del corpo rigido (attorno pto fisso, o c.m.)

$$T = \frac{1}{2}\,\bar{\omega}\cdot\mathcal{I}\,\bar{\omega}$$

Siccome T è uno scalare, posso calcolarlo in un qualsiasi sist. di rif. ortonormale come

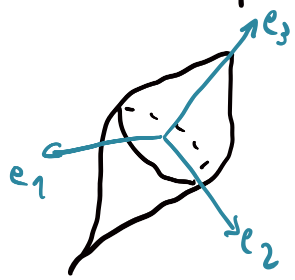
$$T = \frac{1}{2}\sum_{ij}\mathcal{I}_{ij}\,\omega_i\omega_j$$

Di solito conviene scegliere s.d.r. solidale $e_1 e_2 e_3$ lungo gli assi principali d'inerzia. In qto caso, in pto s.d.r.

$$T = \frac{1}{2}\sum_i I_i\,\omega_i^2 \qquad \text{dove} \qquad \bar{\omega} = \omega_1\bar{e}_1 + \omega_2\bar{e}_2 + \omega_3\bar{e}_3$$

TROTTOLA

La trottola è un corpo rigido con una simmetria di rotaz. attorno a un asse



Con qta scelta di assi solidali ho $I_1 = I_2$ e I_3

Ricordiamo: $\mathcal{I}_{\substack{ij\\ i\neq j}} = -\sum_{I=1}^{N} m_I\, x_{iI}\, x_{jI} = \rho\underbrace{\int_V x_i x_j\, dx_i\, dx_j\, dx_k}_{\text{almeno uno di qti è } \int_{-r}^{r} x\,dx = 0}$ i,j,k distinti

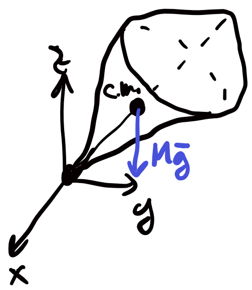
$\Rightarrow \mathcal{I}_{ij} = 0$

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)\,\bar{e}_1 + (\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)\,\bar{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})\,\bar{e}_3$$

$$T = \frac{1}{2} I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3\,\omega_3^2$$

$$= \frac{1}{2} I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

Mettiamo la trottola con pto fisso in campo gravitaz. cost.



$$V = -mg\,y_{c.m.} = mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{I_1}{2}\left(\dot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - mgl\cos\theta$$

- Ci sono due coordinate cicliche, φ e ψ → due cost. del moto

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) = I_3\,\omega_3 \qquad \leftarrow M_3$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_1\dot\varphi\operatorname{sen}^2\theta + I_3\dot\varphi\cos^2\theta + I_3\dot\psi\cos\theta \qquad \leftarrow M_z$$

$$= I_1\dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + p_\psi\cos\theta$$

Nel seguito prenderemo $p_\varphi, p_\psi > 0$

- C'è anche en. totale

$$E = T + V = \frac{I_1}{2}\left(\dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta$$

[3 cost. del moto in sist. a $n=3$.]

- Da coord. cicliche → Lagrangiana ridotta

ricaviamo $\dot\varphi$ e $\dot\psi$ da sist. lineare

$$\begin{cases} p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi = I_1\dot\varphi\operatorname{sen}^2\theta & \rightarrow \quad \dot\varphi = \dfrac{p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi}{I_1\operatorname{sen}^2\theta} \\[2ex] I_3\dot\psi = p_\psi - I_3\dot\varphi\cos\theta & \rightarrow \quad \dot\psi = \dfrac{p_\psi}{I_3} - \dfrac{\cos\theta\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right)}{I_1\operatorname{sen}^2\theta} \end{cases}$$

$$\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta = \frac{p_\psi}{I_3}$$

$$L^* = L\big|_{\dot\psi,\dot\varphi = \ldots} - \dot\varphi p_\varphi - \dot\psi p_\psi =$$

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 - mgl\cos\theta$$

$$= \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right)^2}{I_1 \sin^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{I_3}$$

$$- \frac{p_\varphi}{I_1\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right) - \frac{p_\psi^2}{I_3} + \frac{p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right)$$

$$= -\frac{\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right)^2}{I_1\sin^2\theta}$$

$$= \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 - mgl\cos\theta - \frac{\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right)^2}{2 I_1 \sin^2\theta} \cancel{- \frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{I_3}}$$

$x = \cos\theta$ $\quad$ $\cos\theta$ è funzione monotona per $\theta \in [0,\pi[$

$$V_{eff}(\theta) = mgl\, g(\cos\theta) \qquad \text{con} \quad g(x) = x + \frac{\left(p_\varphi - x\, p_\psi\right)^2}{2 I_1 mgl \left(1-x^2\right)}$$

$$-1 \leqslant x < 1$$

Vogliamo disegnare il grafico di $V_{eff}(\theta)$ per capire qualitativam. come si comporta il sistema.

- Per $x \to \pm 1$ $\quad g(x) \to +\infty$ $\quad$ (ed è continua per $-1<x<1$)

$\Rightarrow$ g ha un MIN assoluto in $[-1,1]$

$\Rightarrow$ la retta dell'Energia cost. interseca il grafico di V_{eff} un numero PARI di volte

Dimostriamo che tali pti sono in numero $\leqslant 2$:

$$(*) \quad E = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + mgl\cos\theta + \frac{\left(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi\right)^2}{2 I_1 \sin^2\theta}$$

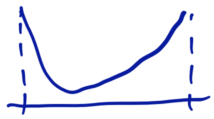
$$= \frac{I_1}{2}\frac{\dot x^2}{1-x^2} + mgl\, x + \frac{\left(p_\varphi - x\, p_\psi\right)^2}{2 I_1 \left(1-x^2\right)}$$

Ricordiamo che in E abbiamo trascurato il termine cost $\frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{2I_3}$; la vera En. sarebbe $E + p_\psi^2/2I_3$

$$\rightarrow I_1\frac{\dot x^2}{2} = (\overbrace{E - mg\ell x}^{>0 \text{ da } (*)})(1-x^2) - \frac{1}{2I_1}(P_\varphi - xP_\psi)^2$$

Eq. CUBICA in x $\Rightarrow$ ci sono al max 3 valori di x per cui $\dot x$ si annulla $\leftarrow$ pti in cui retta $y=E$ interseca curva di pot. eff.

$\Longrightarrow$ retta $y=E$ interseca pot. eff. in 2 pti.

$\hookrightarrow$ $U_{eff} \sim$ 

MIN θ^* giace prima o dopo di $\pi/2$?

$$g(x) = x + \frac{(P_\varphi - xP_\psi)^2}{2I_1 mg\ell(1-x^2)} \qquad g'(x) = 1 + \frac{(P_\varphi - xP_\psi)}{I_1 mg\ell(1-x^2)}\left[-P_\psi + x\frac{(P_\varphi - xP_\psi)}{(1-x^2)}\right]$$

$\theta^*=\pi/2$ è pto di equil quando $x^*=0$ è uno zero di $g'(x)$, cioè per

$$1 - \frac{P_\varphi P_\psi}{I_1 mg\ell} = 0 \Rightarrow P_\varphi P_\psi = I_1 mg\ell$$

se $\epsilon \gtrless 0$, $\theta \lessgtr \pi/2$

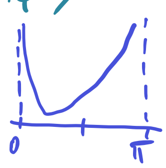
Invece pto di equil. $x=\epsilon \ll 1$ avviene per:

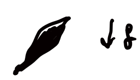
$$1 + \frac{(P_\varphi - \epsilon P_\psi)}{I_1 mg\ell}\left[-P_\psi + \epsilon P_\varphi\right] = 1 + \frac{1}{I_1 mg\ell}\left(-P_\varphi P_\psi + \epsilon(P_\psi^2 + P_\varphi^2)\right) = 0$$

$$\Rightarrow I_1 mg\ell = P_\varphi P_\psi - \epsilon(P_\psi^2 + P_\varphi^2)$$

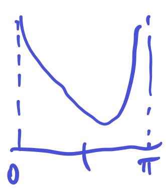
$\leftarrow$ da qui si capisce param. che danno $x^* \gtrless 0$.

$x^* > 0$ $(\theta^* < \pi/2)$ se $P_\varphi P_\psi > I_1 mg\ell$





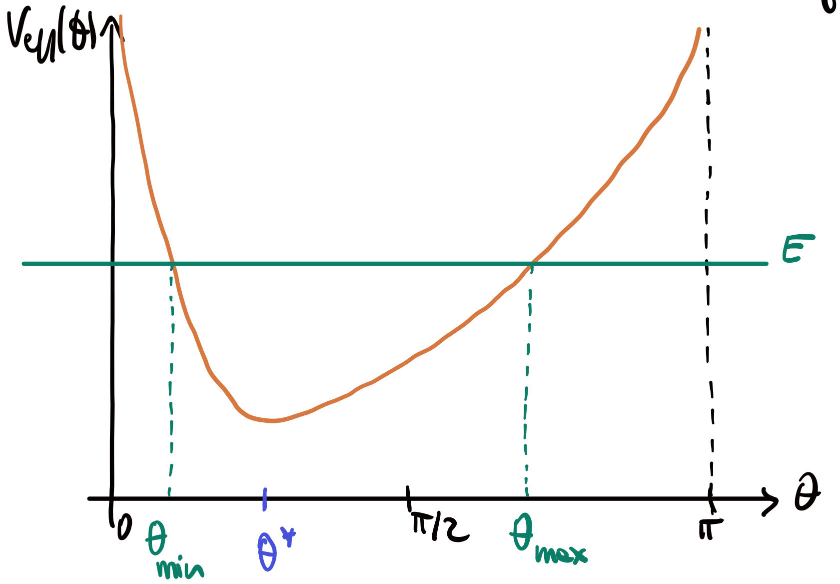
$x^* < 0$ $(\theta^* > \pi/2)$ se $P_\varphi P_\psi < I_1 mg\ell$

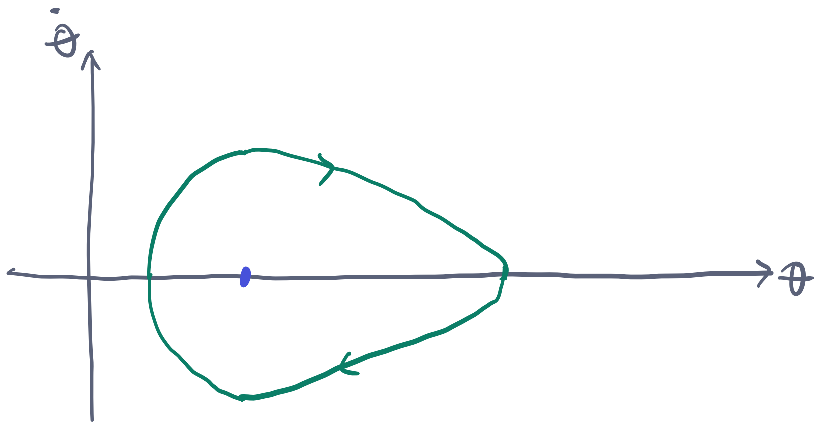


- Osservazione : $g(x) = x + \frac{(P_\varphi - xP_\psi)^2}{2I_1 mg\ell(1-x^2)}$ $\rightarrow$ se $x^* \geq 0$ $(\theta^* < \pi/2)$, allora $g(x)$ è def. positiva ; infatti:

$$g(x) \geq g(x^*) > 0$$

Diciamo che $P_\psi P_\phi > I_1 mgl$, allora il grafico del pot. eff. è





- C'è un solo pto di equil. per il problema ridotto corrispondente a En. minima ⇒ moto con inclinaz. asse cost.

- A en. superiore il moto avviene tra due valori $\theta_{min}, \theta_{max}$
  ⇒ l'inclinazione dell'asse fa moto periodico tra θ_{min} e θ_{max}. → MOTO DI NUTAZIONE

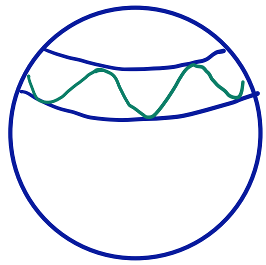
Vediamo ora il moto di PRECESSIONE (φ). Abbiamo che

$$\dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi \cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}$$

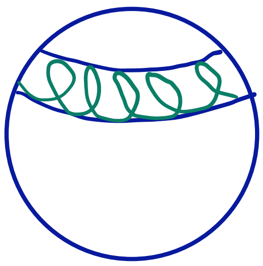
Se $\theta = \theta^*$ $\rightarrow$ $\dot\varphi = \underset{\text{cost.}}{\omega_\varphi} \Rightarrow \varphi(t) = \omega_\varphi t + \varphi_0$

- se $|p_\varphi| > |p_\psi| \cdot \max_\theta |\cos\theta|$, $\dot\varphi$ ha segno definito ($\forall t$)

$\rightarrow$ φ avanza sempre



- altrimenti $\dot\varphi$ ha valori di θ per cui si annulla, cioè

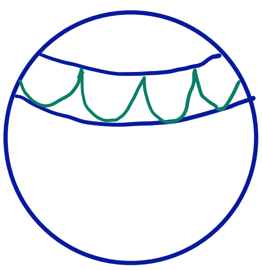


$$\cos\theta_0 = p_\varphi / p_\psi$$

$\hookrightarrow$ $\dot\varphi$ ha segno opposto per θ_{min} e θ_{max}

$\rightsquigarrow$ la media di $\dot\varphi$ non può annullarsi $\langle\dot\varphi\rangle \propto \int_{t_{\theta_{min}}}^{t_{\theta_{max}}} \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\theta)}{I_1 \sin^2\theta} dt$

- caso degenere è quando $\theta_0 = \theta_{max}$ ($p_\varphi = p_\psi \cos\theta_{max}$)



Caso degenere è il più comune in pratica, quando si cerca di avere alto valore di $\dot\psi_0$ e invece $\dot\varphi_0, \dot\theta_0 \ll 1$.

Velocità media $\langle\dot\varphi\rangle = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \dot\varphi \, dt = \frac{\varphi(t_{max}) - \varphi(t_{min})}{T}$

$\downarrow$

si annulla se $\varphi(t_{max}) = \varphi(t_{min})$, cioè orbita chiusa

$$\int_{t_{min}}^{t_{max}} \dot\varphi \, dt = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \dot\varphi(\theta) \frac{d\theta}{\dot\theta(\theta)} = \int \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1 \sin^2\theta} \frac{\sqrt{2/I_1}}{\sqrt{E - mgl\cos\theta - \frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{2 I_1 \sin^2\theta}}} d\theta$$

>0, <0 dip da p_φ, p_ψ

Ancora, consideriamo p_ψ e p_φ fissati e >0.

- $\dot\varphi(\theta) = \dfrac{p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi}{I_1 \operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{p_\varphi - x\, p_\psi}{I_1(1-x^2)}$ si annulla in θ_0 t.c. $x_0 = p_\varphi/p_\psi$

  per $x > x_0$ $(\theta < \theta_0)$ $\dot\varphi(\theta) < 0$

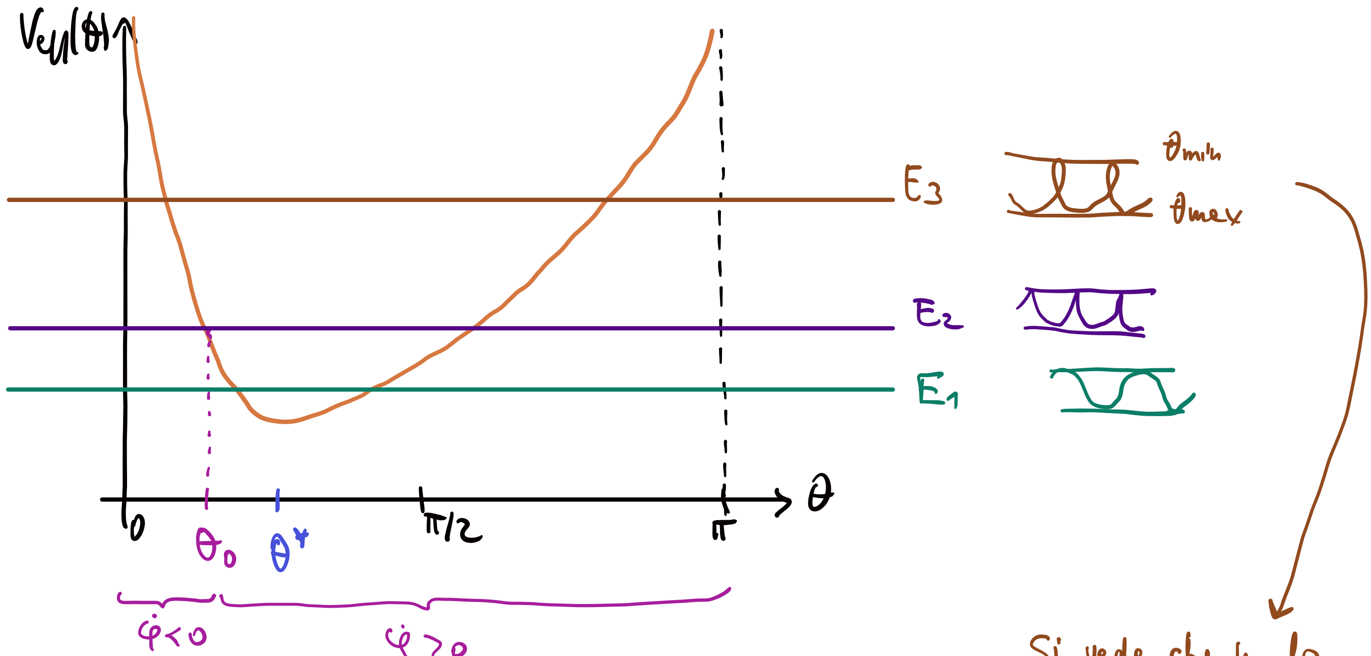
  per $x < x_0$ $(\theta > \theta_0)$ $\dot\varphi(\theta) > 0$

- cerchiamo di capire dove sta θ_0 rispetto a θ_*; se sta a sinistra, allora $V'_{eff}(\theta_0) < 0$ $(g'(x_0) > 0)$, se sta a destra, allora $V'_{eff}(\theta_0) > 0$ $(g'(x_0) < 0)$.

- Valutiamo $g'(x) = 1 + \dfrac{(p_\varphi - x p_\psi)}{I_1 mgl(1-x^2)}\left[-p_\psi + x\dfrac{(p_\varphi - x p_\psi)}{(1-x^2)}\right]$

  in $x_0 = p_\varphi/p_\psi$:

  $g'(x_0) = 1 + 0 > 0 \Rightarrow \theta_0$ sta a sinistra



Si vede che per la maggior parte dei valori di θ permessi, $\dot\varphi$ è positiva
$\Rightarrow$ indicaz. che la media temporale di $\dot\varphi$ è positiva

Posizione di θ^*.

Uno si può anche domandare quand'è che $\theta=\pi/2$ è min di pot. $(p_\varphi, p_\psi > 0)$

$$g'(x) = 1 + \frac{(p_\varphi - x p_\psi)}{I_1 mgl(1-x^2)}\left[-p_\psi + x\frac{(p_\varphi - x p_\psi)}{(1-x^2)}\right]$$

$$g'(0) = 1 - \frac{p_\varphi p_\psi}{I_1 mgl} = 0 \quad \text{qndo} \quad p_\varphi p_\psi = I_1 mgl$$

Ora possiamo determinare quando $\theta^* > \pi/2$ o $\theta^* < \pi/2$:

basta determinarlo per θ^* vicino a $\pi/2$ cioè $x^* = \epsilon$ con $|\epsilon| \ll 1$

$$g'(\epsilon) \simeq 1 + \frac{(p_\varphi - \epsilon p_\psi)}{I_1 mgl}(-p_\psi + \epsilon p_\varphi) \simeq 1 - \frac{p_\varphi p_\psi}{I_1 mgl} + \epsilon \frac{p_\varphi^2 + p_\psi^2}{I_1 mgl}$$

$$g'(\epsilon) = 0 \quad \text{per} \quad \epsilon = \frac{p_\varphi p_\psi - I_1 mgl}{p_\varphi^2 + p_\psi^2}$$

$\theta^* < \pi/2 \quad (\epsilon > 0) \quad$ per $\quad p_\varphi p_\psi > I_1 mgl$

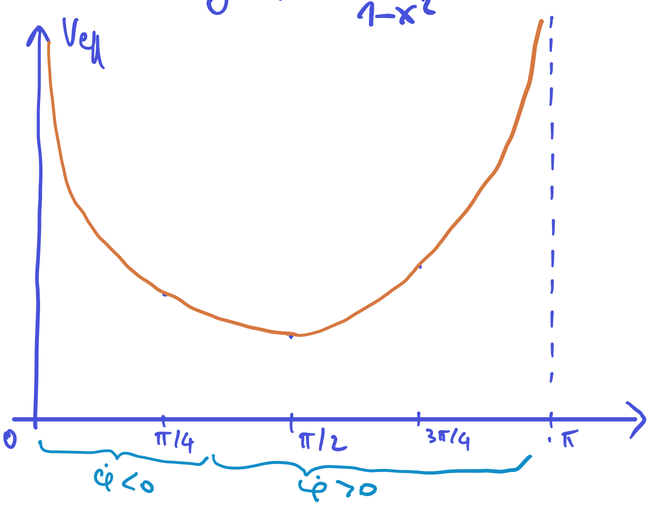
$\theta^* > \pi/2 \quad (\epsilon < 0) \quad$ per $\quad p_\varphi p_\psi < I_1 mgl$

Proviamo a metterci nella situaz. $p_\varphi p_\psi = I_1 mgl$

$$g(x) = x + \frac{(p_\varphi - x p_\psi)^2}{2p_\varphi p_\psi(1-x^2)} = \frac{p_\varphi^2 - \cancel{2x p_\varphi p_\psi} + x^2 p_\psi^2 + \cancel{2x p_\varphi p_\psi} - 2x^3 p_\varphi p_\psi}{2p_\varphi p_\psi(1-x^2)}$$

$$= \tilde{g}(x) - \frac{x^3}{1-x^2}$$

con $\tilde{g}(x) = \dfrac{p_\varphi^2 + x^2 p_\psi^2}{2p_\varphi p_\psi(1-x^2)}$ funz. pari in $x \to -x$



$$g(0) = \frac{p_\varphi}{2p_\psi}$$

$$g(1/2) = \tilde{g}(1/2) - 1/6 \qquad (\theta = \pi/4)$$

$$\updownarrow =$$

$$g(-1/2) = \tilde{g}(-1/2) + 1/6 \qquad (\theta = 3\pi/4)$$

Per avere $x_0 = 0$ e $x^* = 0$, devo prendere lim

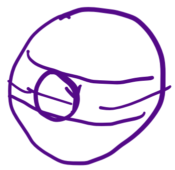
$$p_\varphi \to 0 \qquad p_\psi \to \infty \qquad \text{con} \quad p_\varphi p_\psi = \text{cost} \; (= I_1 mgl)$$

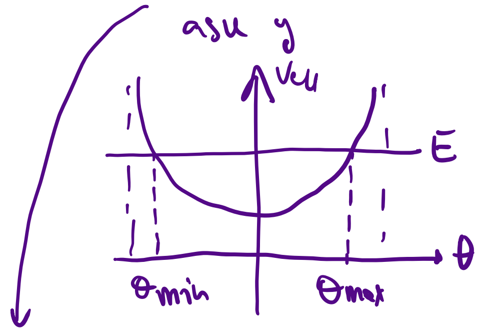
$V_{eff}(\theta) = mgl\, g(\cos\theta)$ con $g(\theta) \sim \dfrac{x^2 p_\psi^2}{2 I_1 mgl (1-x^2)}$ ← adesso $V_{eff}(\theta)$ è simm. rispetto asse y

$$\dot\varphi = \frac{p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi}{I_1 \sin^2\theta} \sim -\frac{\cos\theta\, p_\psi}{I_1 \sin^2\theta}$$

$$\dot\psi = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{\cos\theta\,(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)}{I_1 \sin^2\theta} \sim p_\psi \left(\frac{1}{I_3} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta\, I_1} \right)$$

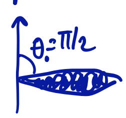
$$\hookrightarrow \dot\psi + \dot\varphi \cos\theta = \frac{p_\psi}{I_3}$$





Ora $\theta(t)$ ha moto sim. in $0 < \theta < \pi/2$ e $\pi/2 < \theta < \pi$ e analogam.
$\varphi(t) \to$ orbita chiusa

– Vediamo ora il caso $p_\varphi = 0$ (per esempio, trottola messa inizialm. in pos. orizzontale



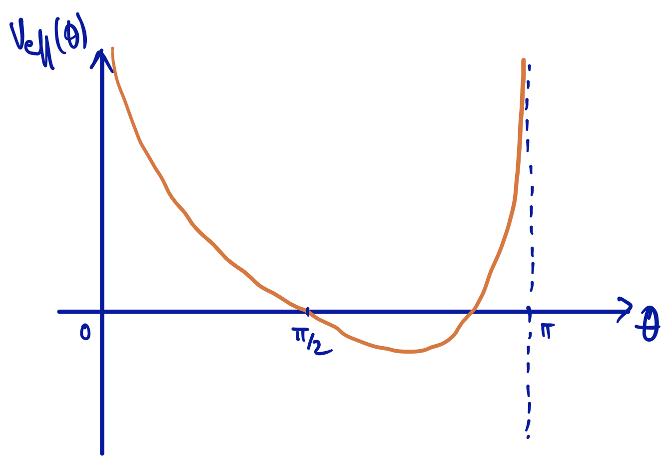
(e $\dot\psi > 0 \to p_\psi > 0$)

↓

Il potenziale diventa dato da:

$$g(x) = x + \frac{x^2 p_\psi^2}{2 I_1 mgl (1-x^2)} = x \left(1 + \frac{x\, p_\psi^2}{2 I_1 mgl (1-x^2)} \right)$$

zeri in
$x = 0 \quad (\theta = \pi/2)$
$x < 0 \quad (\theta > \pi/2)$



Se $p_\psi \gg I_1 mgl \Rightarrow$

$\Rightarrow$ zero doppio in $\theta = \pi/2$
cioè min pot.

Trottola precede stando nel piano xy.

TROTTOLA DORMIENTE e RISVEGLIO

Pratica: trottola, dopo essere stata lanciata, si stabilizza con asse di rotazione verticale e ruota mostrando piccolissime oscillazioni, la rotaz. è praticam. stazionaria (trottola dormiente). Ad un certo pto si risveglia incominciando moto di nutazione e precessione sempre più accentuato, finché la trottola cade.

Vediamo come potevamo predirlo.

- Con un lancio ben fatto, $\dot\psi_0 \gg \dot\varphi_0, \dot\theta_0$.

$\Rightarrow p_\varphi \simeq p_\psi$

Qndo $p_\varphi = p_\psi$, V_{eff} non esplode più a $\theta = 0$.

$$V_{eff} = mgl\cos\theta + \frac{p_\varphi^2 (1-\cos\theta)^{\cancel{2}}}{2I_1 \cancel{(1-\cos\theta)}(1+\cos\theta)}$$

$$= mgl\cos\theta + \frac{p_\varphi^2}{2I_1}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$V'_{eff}(\theta) = -mgl\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{p_\varphi^2}{2I_1}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} + \frac{(1-\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right) =$$

$$= \mathrm{sen}\,\theta\left[-mgl + \frac{p_\varphi^2}{I_1}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right] \qquad \cos\theta^* = \frac{p_\varphi}{\sqrt{mglI_1}} - 1$$

$\Rightarrow \theta = 0$ è pto di equil. $\qquad V_{eff}(0) = mgl$

$p_\varphi = I_3 \dot\psi_0 \cos\theta_0$

$$V''_{eff}(\theta) = \cos\theta\left(-mgl + \frac{p_\varphi^2}{I_1}\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}\right) + \mathrm{sen}\,\theta\,(\dots)$$

$V''_{eff}(0) = -mgl + \frac{p_\varphi^2}{4I_1} \longrightarrow$ se $\dot\psi_0$ è suff. grande, $V''_{eff}(0) > 0 \rightarrow$ PTO STAB.

· Se partiamo da θ vicino a $\theta=0$, θ oscilla attorno allo zero con frequenza $V''_{eff}(0)$ ⇝ trottola ha moto praticam. stazionario: le piccole oscillaz. vengono smorzate dall'attrito.

· Man mano che passa il tempo, l'attrito riduce $\dot\psi$ e quindi $p_\psi = p_\varphi$, finché $\theta=0$ non è più stabile: ogni perturbazione allontana trottola dalla rotaz. stazionaria (ora instabile)

→ compare un moto di nutazione che diventa sempre più ampio mentre p_ψ diminuisce (la trottola si è risvegliata)

Trottola con spin (p_ψ) molto grande.

Ora lanciamo la trottola con condiz. iniziali a $t=0$:

$$\theta(0)=\theta_0 \qquad \dot\theta_0=\dot\varphi_0=0 \qquad \text{e} \qquad \dot\psi_0 \text{ molto grande}$$

θ_0 qui sta per θ al tempo $t=0$, può coincidere anche con angolo per cui $\dot\varphi=0$.

Ricordiamo:

$$\frac{I_1\dot x^2}{2} = (E - mglx)(1-x^2) + \frac{1}{2I_1}(p_\varphi - x p_\psi)^2$$

e valutiamola a $t=0$

$$0 = (E - mgl\,x_0)(1-x_0^2) + \frac{1}{2I_1}(p_\psi - x_0 p_\psi)^2$$

⇝ x_0 è una soluz. di qta equazione cubica

Ricordiamo inoltre:

$$E = \frac{I_1}{2}\dot\theta^2 + mgl\cos\theta + \frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{2I_1\sin^2\theta} \qquad \text{e} \qquad \overset{=0}{\dot\varphi} = \frac{\overbrace{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}^{=0}}{I_1\sin^2\theta}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\frac{I_1}{2}\frac{\dot x^2}{1-x^2}}_{=0 \text{ a } t=0}}_{①} + \underbrace{mglx}_{=mgl\cos\theta_0 \text{ a } t=0} + \underbrace{\underbrace{\frac{(p_\varphi - x p_\psi)^2}{2I_1(1-x^2)}}_{=0 \text{ a } t=0}}_{②}$$

① ② → termini sempre positivi

$\rightsquigarrow \quad E = mgl\cos\theta_0$

l'en. si conserva, quindi all'aumentare del tempo, poiché si accendono i termini ① e ②, $mgl\cos\theta$ deve diminuire

$\Rightarrow$ θ aumenta (cioè trottola scende)

$\Rightarrow$ θ_0 corrisponde a circonferenza superiore.

Inoltre: $\begin{cases} \cos\theta_0 = p_\varphi / p_\psi & (\text{da } \dot\varphi_0 = 0 \text{ e } p_\psi, p_\varphi \text{ cost.}) \\ \cos\theta_0 = \dfrac{E}{mgl} & (\text{da } E = mgl\cos\theta_0) \end{cases}$

Riscriviamo $0 = (E - mgl\,x)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1}(p_\psi - x\,p_\psi)^2$ usando ↑

$$0 = mgl(x_0 - x)(1-x^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_1}(x_0 - x)^2$$

$$\overset{(\circ)}{=} (x_0 - x)\underbrace{\left(mgl(1-x^2) - \frac{p_\psi^2}{2I_1}(x_0 - x)\right)}_{\text{altre radici sono soluz. di questa eq. 2° grado}}$$

Qta eq. ci dà i pti di inversione

$$K \equiv \frac{p_\psi^2}{2I_1 mgl}$$

$$mgl(x - x_0)(x^2 - Kx - 1 + Kx_0) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left[K \pm \sqrt{K^2 + 4 - 4Kx_0}\right] =$$

$$x_1 = \frac{1}{K}(1 - x_0^2)$$

$$= \frac{K}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{K^2} - \frac{4x_0}{K}}\right] \simeq$$

espandiamo fino al secondo ordine

$$\simeq \frac{K}{2}\left[1 \pm \left(1 + \frac{2}{K^2} - \frac{2x_0}{K} - \frac{16x_0^2}{8K^2}\right)\right]$$

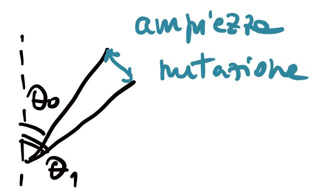
$$\sqrt{1+\epsilon} \sim 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \dots$$

$$= \frac{K}{2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{2x_0}{K} + \frac{2}{K^2}(1 - x_0^2)\right)\right] = \begin{cases} K - x_0 + \dots \gg 1 \quad (\text{esclusa}) \\ x_0 - \dfrac{1-x_0^2}{K} = x_0 - \underbrace{\dfrac{\sin^2\theta_0}{K}}_{\equiv x_1} \quad \text{ok!} \end{cases}$$

$(\circ) \rightarrow mgl(x - x_0)(x - x_1)(x - K + x_0)$

Le due soluzioni accettabili sono

$$x_0 = \cos\theta_0 \quad e \quad x_1 = \cos\theta_0 - \frac{\sin^2\theta_0}{K}$$



↳ ampiezza della nutazione è

$$x_0 - x_1 = \frac{\sin^2\theta_0}{K} \Rightarrow$$

Tanto più la trottola gira (K grande), tanto minore è l'ampiezza della nutazione

→ ampiezza è piccola p trottola veloce e si ha $\underline{x \sim x_0}$.

Nota: il pto di equil. del pot. eff. sarà tra θ_0 e θ_1

Ricaviamoci la freq. della nutazione.

Partiamo da $\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = (E - mgl\,x)(1-x^2) - \frac{1}{2I_1}(p_\varphi - x\,p_\psi)^2$, che approssimato da (o) :
$(x_1 \simeq x_0)$

$$\frac{I_1 \dot{x}^2}{2} = -\underbrace{Kmgl}_{p_\psi^2/2I_1}\,(x - x_0)^2$$

$$x(t) = \frac{x_0 + x_1}{2} + \frac{x_0 - x_1}{2}\cos\omega t$$

Deriviamo ambo i membri rispetto al tempo:

$$I_1 \dot{x}\ddot{x} = -\frac{p_\psi^2}{I_1}(x - x_0)\dot{x} \rightsquigarrow \ddot{x} = -\underbrace{\left(\frac{p_\psi}{I_1}\right)^2}_{=\omega^2 \gg 1}(x - x_0) \simeq -\left(\frac{p_\psi}{I_1}\right)^2\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right)$$

↑ centro di intervallo di oscillazione

Infine, consideriamo la precessione

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi}{I_1 \sin^2\theta} = \frac{p_\psi}{I_1}\frac{(x_0 - x)}{1 - x^2} \simeq \frac{p_\psi}{I_1}\frac{x_0 - x}{\sin^2\theta_0}$$

$$\frac{p_\varphi}{p_\psi} = \cos\theta_0$$

$$\overset{*}{\simeq} \frac{p_\psi}{I_1 \sin^2\theta_0} \cdot \left(\frac{x_0 - x_1}{2}\right)\left(1 - \cos(\omega t)\right)$$

↑ $\sim 1/p_\psi^2$ $\Rightarrow$ $\dot{\varphi}_{media}$ è piccola

$*$ $x - \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{x_0 - x_1}{2}\cos(\omega t)$ da $\frac{d^2}{dt^2}\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right) = -\omega^2\left(x - \frac{x_0+x_1}{2}\right)$

$\hookrightarrow$ $x_0 - x = \frac{x_0 - x_1}{2}\left(1 - \cos(\omega t)\right)$

Hamiltoniana della trottola ← Per fine corso

$$\frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\varphi - \cos\theta\, p_\psi)^2}{2I_1 \operatorname{sen}^2\theta} + mgl\cos\theta$$

Si vede immediatamente che il sistema è integrabile:

H, p_ψ, p_φ sono 3 cost. del moto in involuzione.

$\{M_3, M_z\} = 0$ M_z è comb. lin. di $M_{1,2,3}$ (quindi sembrerebbe impossibile che commutano, ma) con coeff. che dipendono dalle coordinate libere