SIMMETRIE E L'INTEGRALE SUI CAMMINI

Il formalismo dell'integrale funzionale rende manifeste le simmetrie e invarianze del sistema quantistico:

> Se l'azione $S[\varphi]$ e la misura $D\varphi$ sono invarianti sotto una trasformazione, allora questa è una simmetria.

Equazioni di Schwinger-Dyson [PS. 9.6, S. 14.7]

Cominciamo studiando le equazioni del moto quantistiche.

Facciamo uno shift $\boxed{\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)}$

è un cambio di variabile che non modifica l'integrale funzionale o la misura: $D\varphi \to D\varphi$

Prendiamo la funzione a due punti

$$\langle 0| T\{\varphi(x_1)\varphi(x_2)\}|0\rangle = Z[0]^{-1} \int D\varphi \, e^{i\int \mathcal{L}(\varphi)} \varphi(x_1)\varphi(x_2) = Z[0]^{-1} \int D\varphi' \, e^{i\int \mathcal{L}(\varphi')} \varphi'(x_1)\varphi'(x_2) \qquad (*)$$

Espandendo al primo ordine in $\varepsilon(x)$:

$$\int d^4x \, \mathcal{L}(\varphi') = \int \left[\mathcal{L}(\varphi) + \delta\mathcal{L} \right] = \int \mathcal{L}(\varphi) + \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \partial_\mu \varepsilon \right] =$$

$$= \int \mathcal{L}(\varphi) + \int d^4x \, \varepsilon(x) \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right]}$$

$\leftarrow$ Equazioni di Eulero-Lagrange prendendo la differenza in (*) abbiamo:

$$i\int d^4x\, \varepsilon(x)\left[\int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\langle \mathcal{L}(\varphi)\rangle}\frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta\varphi}\varphi(x_1)\varphi(x_2) - \partial_\mu\int\mathcal{D}\varphi\, e^{i\langle\mathcal{L}(\varphi)\rangle}\frac{\delta\mathcal{L}(x)}{\delta(\partial_\mu\varphi)}\varphi(x_1)\varphi(x_2)\right]=$$

$$= -\int\mathcal{D}\varphi\, e^{i\langle\mathcal{L}(\varphi)\rangle}\left[\varepsilon(x_1)\varphi(x_2)+\varepsilon(x_2)\varphi(x_1)\right]$$

Derivando in $\frac{\delta}{\delta\varepsilon(x)}$:

Derivate fuori dall'elemento di matrice

termini di contatto

$$\Rightarrow \langle 0|T\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\varphi(x_1)\varphi(x_2)\right\}|0\rangle = \langle i\delta(x-x_1)\varphi(x_2)\rangle + \langle\varphi(x_1)i\delta(x-x_2)\rangle$$

In generale:

Equazioni di Schwinger-Dyson

$$\left\langle\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\varphi(x_1)\dots i\delta(x-x_i)\dots\varphi(x_n)\rangle$$

$\Rightarrow$ Le equazioni del moto sono soddisfatte per tutte le funzioni di Green, a meno di termini di contatto.

Esempio:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2-\frac{m^2}{2}\varphi^2 \quad\Rightarrow\quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}=(\Box_x+m^2)\varphi(x)$$

$$(\Box_x+m^2)\langle\varphi(x)\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle 0|T\{\varphi(x_1)\dots(-i\delta(x-x_i))\dots\varphi(x_n)\}|0\rangle$$

$n=1$:

$$(\Box_x+m^2)\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle = -i\delta(x-y)$$

|| Propagatore

SIMMETRIE GLOBALI

Nella teoria dei campi classica, ad ogni simmetria continua corrisponde una corrente conservata:

$$(1) \qquad \varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) + \varepsilon\, \Delta\varphi(x)$$

tale che $\forall \varphi(x)$: $\quad \mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \varepsilon\, \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x)$ ← possibile termine di superficie.

$\Rightarrow \quad S = \int d^4x\, \mathcal{L}(x)$ è invariata.

Confrontiamo con quello che si ottiene da una trasf. dei campi (1):

$$\varepsilon\, \Delta\mathcal{L} = \varepsilon\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\mu(\Delta\varphi)\right] = \varepsilon\left[\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)}\right)\Delta\varphi + \partial_\mu\left(\Delta\varphi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right)\right]$$

$\equiv \varepsilon\, \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$ ← assumendo che la trasformazione sia una simmetria.

Definendo $\quad \boxed{j^\mu \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi - \mathcal{J}^\mu} \quad$ si ha

$$\partial_\mu j^\mu = -\Delta\varphi\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\delta\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\varphi)}\right) \longrightarrow 0$$

per configurazioni che soddisfano Eulero-Lagrange

corrente conservata di Noether

$\Rightarrow \quad Q = \int d^3x\, j^0$ è una carica conservata

Eg: $\quad \mathcal{L} = |\partial_\mu\varphi|^2 - m^2|\varphi|^2 \quad \to \quad \varphi \to \varphi'(x) = e^{i\alpha}\varphi(x) \simeq (1+i\alpha)\varphi(x)$

$$\Rightarrow \mathcal{J}^\mu = 0 \quad \& \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\Delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi^*)}\Delta\varphi^* = i\left(\partial^\mu\varphi^*\varphi - \varphi^*\partial^\mu\varphi\right)$$

Equazioni di Schwinger-Dyson per simmetrie globali (o identità di Ward-Takahashi)

[Se.4.4.2, PS.9.6, S.14.8.1]

A livello quantistico, vediamo le conseguenze di una simmetria continua a partire dal path integral

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \varphi|^2 - m^2 |\varphi|^2 \qquad \varphi \to \varphi'(x) = e^{i\alpha}\varphi(x) \simeq (1+i\alpha)\varphi(x)$$

Prendiamo $\alpha = \alpha(x)$: $\mathcal{D}\varphi' \mathcal{D}\varphi'^* = \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^*$ ← La misura è invariante

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\varphi^* e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\varphi)} \varphi(x_1)\varphi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\varphi' \mathcal{D}\varphi'^* e^{i\int d^4x \mathcal{L}(\varphi')} \varphi'(x_1)\varphi'^*(x_2) \Big|_{\varphi' = (1+i\alpha)\varphi}$$

$$\mathcal{L}(\varphi') = |\partial_\mu (1+i\alpha)\varphi(x)|^2 - m^2|\varphi|^2 = \mathcal{L}(\varphi) + (\partial_\mu \alpha)\, i \left(\partial^\mu \varphi^* \varphi - \varphi^* \partial^\mu \varphi \right)$$

→ $\mathcal{L}(\varphi') = \mathcal{L}(\varphi)$ per α costante.

Espandendo in α al primo ordine:

$$0 = \int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^4x \mathcal{L}} \Big\{ i\int d^4x \Big[(\partial_\mu \alpha) \overbrace{i\left(\varphi \partial^\mu \varphi^* - \varphi^* \partial^\mu \varphi\right)}^{J^\mu} \Big] \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)$$
$$+ \left[i\alpha(x_1)\varphi(x_1) \right] \varphi^*(x_2) + \varphi(x_1)\left[-i\alpha(x_2)\varphi^*(x_2) \right] \Big\}$$

Integrando per parti, derivando in $\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}$ e dividendo per $Z[0]$:

$$\boxed{i\,\partial_\mu \langle J^\mu(x)\, \varphi(x_1) \varphi^*(x_2) \rangle = i\delta(x-x_1)\langle \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\rangle - i\delta(x-x_2)\langle \varphi(x_1)\varphi^*(x_2)\rangle}$$

Come per le equazioni del moto, la corrente è conservata a meno di termini di contatto.

IDENTITÀ DI WARD-TAKAHASHI PER LA QCD

Studiamo le implicazioni della simmetria globale di QCD

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\begin{cases} \psi \to e^{ie\alpha}\psi \simeq (1+ie\alpha) \\ \bar{\psi} \to e^{-ie\alpha}\bar{\psi} \simeq \bar{\psi}(1-ie\alpha) \\ A_\mu \to A_\mu \\ D\bar{\psi}D\psi \to D\bar{\psi}D\psi \end{cases}$$

Prendiamo $\alpha \to \alpha(x)$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - e(\partial_\mu \alpha)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

(non trasformiamo A_μ quindi $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$)

Studiamo

$$\langle \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\rangle = \frac{1}{Z[0]}\int D\bar{\psi}D\psi DA\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}}\,\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)$$

trasformando come fatto prima per i campi scalari:

$$\Rightarrow 0 = \int D\bar{\psi}D\psi DA\, e^{i\int d^4x\,\mathcal{L}}\Big\{-i\int d^4x\,\partial_\mu\alpha(x)\left[j^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right] +$$

$$+ \left(ie\alpha(x_1)\psi(x_1)\right)\bar{\psi}(x_2) + \psi(x_1)\left(-ie\alpha(x_2)\bar{\psi}(x_2)\right)\Big\}$$

$$\boxed{j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\partial_\mu\langle j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\rangle &= -e\,\delta(x-x_1)\langle\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\rangle \\ &+ e\,\delta(x-x_2)\langle\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\rangle\end{aligned}}$$

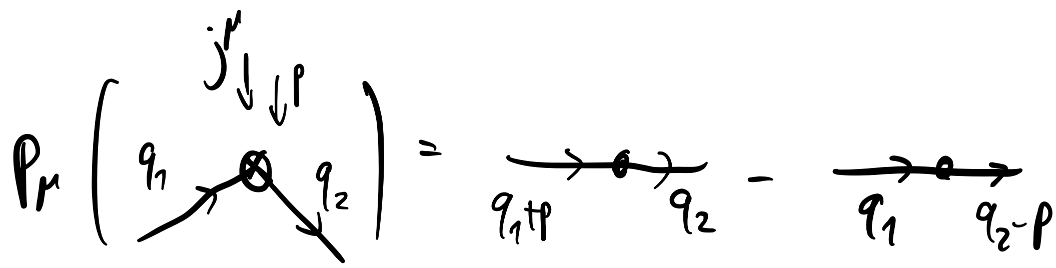
Prendiamone la trasformata di Fourier:

$$\int d^4x\, d^4x_1\, d^4x_2\; e^{ipx}\, e^{iq_1x_1}\, e^{-iq_2x_2} \left(\langle j^\mu(x)\, \psi(x_1)\, \bar\psi(x_2) \rangle \right) \equiv M^\mu(p,q_1,q_2)$$

$$\int d^4x_1\, d^4x_2\; e^{iq_1x_1}\, e^{-iq_2x_2} \left(\langle \psi(x_1)\, \bar\psi(x_2) \rangle \right) \equiv M_0(q_1,q_2)$$

Identità di Ward-Takahashi

$$\Rightarrow \boxed{-ip_\mu M^\mu(p,q_1,q_2) = -eM_0(q_1+p,q_2) + eM_0(q_1,q_2-p)}$$



Questi sono diagrammi off-shell: momento non è necessariamente conservato.

Vedremo come questa relazione implica che la carica sia conservata anche dopo la rinormalizzazione.

Identità di Ward [S. 14.8, Se. 4.4.3]

Vogliamo ora ottenere le identità di Ward, ovvero:

1) Disaccoppiamento della polarizzazione longitudinale

Sostituendo $\varepsilon_\mu(p) \to p_\mu$ per un fotone esterno in un elemento di matrice S, questo fa zero.

2) Invarianza di gauge

Elementi di matrice S sono indipendenti dal parametro ξ.

1) Disaccoppiamento della polarizzazione longitudinale

Prendiamo un elemento di matrice S, con due polarizzazioni ε e ε_k fra gli stati finali:

Da LSZ:

$$\langle \varepsilon \dots \varepsilon_k \dots | S | \dots \rangle =$$

Funzione di Green

$$\varepsilon_\mu \varepsilon_\alpha^k \left[i^n \int d^4x\, e^{ipx} \square_{\mu\nu} \int d^4x_k\, e^{ip_k x_k} \square^k_{\alpha\beta} \int \dots \right] \langle A_\nu(x) \dots A_\beta(x_k) \dots \rangle$$

Dove $\square_{\mu\nu} = \square g_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu \partial_\nu$ è il termine cinetico di $A_\mu(x)$

L'eq. del moto per il fotone è $\square_{\mu\nu} A_\nu = j_\mu(x)$.

Applichiamo Schwinger-Dyson per il fotone:

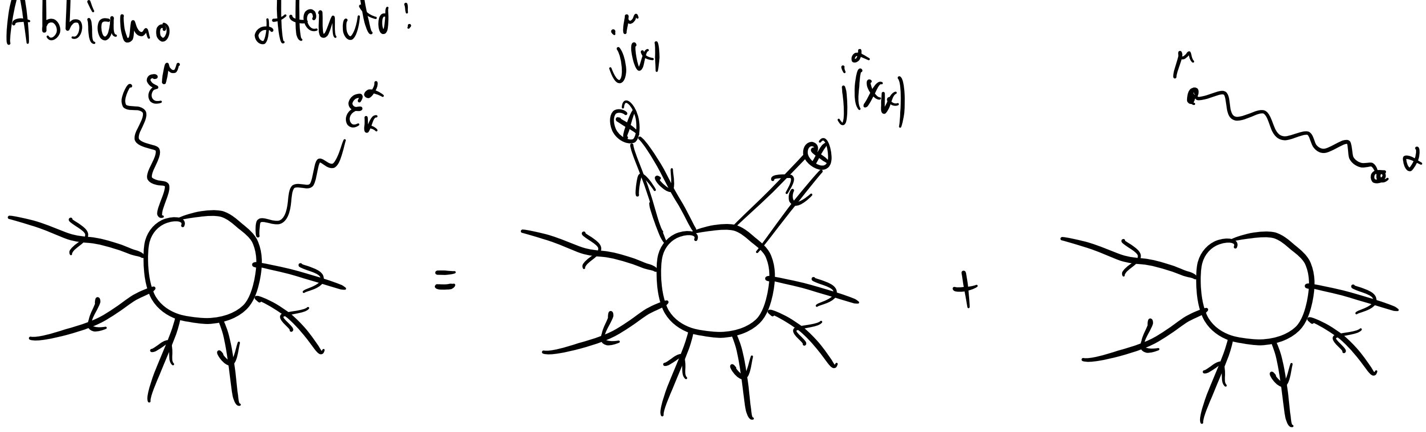
$$\Box_{\mu\nu}\, \Box^{k}_{\alpha\beta} \langle A_\nu(x) \dots A_\beta(x_k) \dots \rangle =$$

$$= \Box^{k}_{\alpha\beta}\left[\langle j_\mu(x) \dots A_\beta(x_k) \dots \rangle - i\delta^4(x-x_k)\, g_{\mu\beta} \langle \dots \rangle \right] =$$

$$= \langle j_\mu(x) \dots j_\beta(x_k) \dots \rangle + \Box^{k}_{\alpha\mu}\, \Box D_F(x-x_k) \langle \dots \rangle$$

dove $\Box D_F(x-x_k) = -i\delta^4(x-x_k)$, $D_F(x-x_k) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2} e^{-ipx}$

Abbiamo ottenuto:



Il secondo termine ha una contrazione fra i due fotoni e implica $p = p_k \Rightarrow$ è un termine sconnesso che non contribuisce a S per $p \neq p_k$

$$\Rightarrow \boxed{\Box_{\mu\nu}\, \Box^{k}_{\alpha\beta} \langle A_\nu(x) \dots A_\beta(x_k) \dots \rangle = \langle j_\mu(x) \dots j_\beta(x_k) \dots \rangle}$$

OVVERO:

Elementi di matrice S con fotoni esterni a cui viene rimossa la polarizzazione sono uguali a funzioni di Green di correnti.

• Adesso sostituiamo ad $\varepsilon_\mu \to p_\mu$

Esplicitiamo un fermione:

$$\langle p \ldots u_{s_1} \ldots \varepsilon_k \ldots | S | \ldots \rangle = \left[i^n \int d^4x\, e^{ipx} \int d^4x_k\, e^{ip_k x_k} \int d^4y_1\, e^{iq_1 y_1} \bar{u}_{s_1} (i\not{\partial}_{y_1} - m_1) \ldots \right]$$

$$\times\, \partial_\mu \underbrace{\langle j_\mu(x) \ldots j_\alpha(x_k) \ldots \psi(y_1) \rangle}$$

$$= \bar{u}_{s_1}(q_1) \left[(\not{q}_1 - m_1) \ldots \right] i p_\mu\, M^{\mu\alpha\ldots}(p, p_k, \ldots, q_1, \ldots)$$

trasformata di Fourier

Usiamo l'identità di Ward-Takahashi:

$$= \pm e \bar{u}_{s_1} \left[(\not{q}_1 - m_1) \ldots \right] \sum_j Q_j M^{\alpha\ldots}(p_k, \ldots, q_j \pm p, \ldots)$$

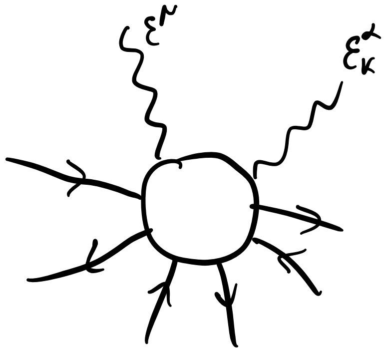
questi termini hanno poli in $(q_j \pm p)^2 = m_j^2$

Però li moltiplichiamo per $\lim_{q_j^2 \to m_j^2} (\not{q}_j - m_j) = \dfrac{q_j^2 - m_j^2}{\not{q}_j + m_j} \to 0$

quindi il polo nel propagatore della gamba esterna dei fermioni non compensa più questo zero e tutta la somma fa zero:

$$\langle p \ldots u_{s_1} \ldots \varepsilon_k \ldots | S | \ldots \rangle = 0$$

Non è necessario avere il fotone on-shell $p^2 = 0$.
Solo i fermioni.



$\xrightarrow{\varepsilon^\mu \to p^\mu} \emptyset$

2) Invarianza di gauge

Prendiamo un elemento di matrice S con

- b fotoni esterni
- f fermioni

all'ordine e^n in espansione perturbativa.

Il numero di fotoni interni è necessariamente

$$m = \frac{n-b}{2} \quad \begin{cases} \text{- Ad ogni vertice si attacca 1 fotone} \\ \text{- fotoni interni si attaccano a 2 vertici} \end{cases}$$

L'ampiezza sarà data dal prodotto di m propagatori:

$$\mathcal{M} = e^n \varepsilon_1^{\alpha_1} \ldots \varepsilon_b^{\alpha_b} \int d^4k_1 \ldots d^4k_m \, \Pi_{\mu_1\nu_1}(k_1) \ldots \Pi_{\mu_m\nu_m}(k_m) \times$$

$$\times \mathcal{M}^{\mu_1\nu_1\ldots\mu_m\nu_m\alpha_1\ldots\alpha_b}(\ldots k_i \ldots q_i)$$

Il termine $\propto \xi k_\mu k_\nu$ dentro $\Pi_{\mu\nu}(k)$ fa zero dato che

$$k_{\mu_i} \mathcal{M}^{\mu_1\nu_1\ldots\mu_i\nu_i\ldots\mu_m\nu_m\alpha_1\ldots\alpha_b} = 0$$

anche se $k_i^2 \neq 0 \leftrightarrow$ fotone off-shell.