MECCANICA HAMILTONIANA

EQUAZIONI DI HAMILTON

Eq. di Lagrange son $\underline{n}$ eq. diff.
del 2° ordine

$$\ddot{\bar{q}} = \bar{f}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Uno può passare a $\underline{2n}$ eq. diff. del 1° ordine

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\eta} \\ \dot{\bar{\eta}} = \bar{f}(\bar{q}, \bar{\eta}, t) \end{cases}$$

$\eta_h = \dot{q}_h$

Questo non è sempre il metodo più conveniente per portare a eq. diff. del 1° ordine.

Eq. di Lagr.

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)} - \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = 0$$

l'idea è di definire nuove VARIABILI

$$(*) \quad p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \qquad h = 1, \dots, n$$

MOMENTI CONIUGATI

In queste nuove coord. le eq. di Lag. diventano

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Vogliamo invertire le relazioni (*) per trovare

$$\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p}, \bar{q}, t)$$

Per poter invertire dobbiamo richiedere che

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}} \neq 0$$

(cambiam. di coord. invertibile)

Per sistemi MECCANICI $(L = T - V)$

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$\rightsquigarrow \quad p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \sum_{l=1}^{n} a_{hl} \dot{q}_l + b_h$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = a_{jk}$$ che è invertibile $(\det a \neq 0)$

$$\dot{\bar{q}} = a^{-1} (\bar{p} - \bar{b})$$

Eq. di Lagrange

$$\dot{p}_h = \frac{\partial L}{\partial q_h} (\bar{q}, a^{-1}(\bar{p} - \bar{b}), t)$$

$$\dot{q}_h = a^{-1} (\bar{p} - \bar{b})$$

prendono la forma

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{f}_q (\bar{p}, \bar{q}, t) \\ \dot{\bar{p}} = \bar{f}_p (\bar{p}, \bar{q}, t) \end{cases}$$

Se facciamo questo procedimento le $\bar{f}_q$ e $\bar{f}_p$ prendono una forma molto particolare

Prop. Si consideri una Lagrangiana $L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)$ con det. Hessiano non nullo, cioè $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$.

Allora il sistema

$$\begin{cases} p_h = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} & \leftarrow \text{def. delle nuove coord.} \\ & \hookrightarrow \text{per inversione da } \dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p},\bar{q},t) \\ \dot{p}_h = \dfrac{\partial L}{\partial q_h} & \leftarrow \text{eq. di Lagrange} \end{cases}$$

è equivalente al sistema

$$(*) \quad \boxed{\begin{cases} \dot{p}_h = -\dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q},t)}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \dfrac{\partial H(\bar{p},\bar{q},t)}{\partial p_h} \end{cases} \quad \text{con} \quad H(\bar{p},\bar{q},t) \equiv \left[\bar{p}\cdot\dot{\bar{q}} - L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)\right]\Bigg|_{\dot{\bar{q}}=\dot{\bar{q}}(\bar{p},\bar{q},t)}}$$

Inoltre si ha $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$.

H è detta HAMILTONIANA (o funz. di Hamilton)
le eq. (*) sono dette EQ. DI HAMILTON (o eq. canoniche)

Dim. Siccome per ipotesi $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_h \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0$, allora

$p_h = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}$ si può invertire, ottenendo $\dot{\bar{q}} = \dot{\bar{q}}(\bar{p},\bar{q},t)$

$\Rightarrow H(\bar{p},\bar{q},t)$ è ben definita.

Dalla def. di differenziale:

$$dH = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_m}dp_m + \frac{\partial H}{\partial q_m}dq_m\right) + \frac{\partial H}{\partial t}dt$$

$=$ Ora facciamo il diff. della funz. $H = (\bar{p}\cdot\dot{\bar{q}} - L)_{\dot{\bar{q}}=\dot{\bar{q}}(\bar{p},\bar{q},t)}$

$$dH = \sum_{m=1}^{n}\boxed{p_m}\underbrace{d\dot{q}_m} + \sum_{m=1}^{n}\dot{q}_m\,dp_m - \sum_{m=1}^{n}\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}}d\dot{q}_m - \sum_{m}\frac{\partial L}{\partial q_m}dq_m - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

è il differenziale della funzione $\dot{\bar{q}}(\bar{p},\bar{q},t)$

Nota che il differenziale della funz. $\dot{\bar{q}}(\bar{p},\bar{q},t)$ appare in due punti; siccome $p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m}$ questi contributi si cancellano.

$$= \sum_{m=1}^{n}\left(\dot{q}_m\,dp_m - \frac{\partial L}{\partial q_m}dq_m\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{q}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m} \qquad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_h}} = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Eq di Lagrange $\rightarrow$ $= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = \dot{p}_h$

//

Prop. In un sist. meccanico, H assume l'espressione

$$H = T_2 - T_0 + V$$

$\uparrow$ omog. di grado 2 in $\dot{q}$

$\rightarrow$ Nel caso indip. dal tempo $\quad H = T + V$ (l'en. tot. del sist.)

Dim. T_2, T_1, T_0 sono funz. omog. di grado 2, 1, 0

$$\sum_h \frac{\partial T}{\partial \dot q_h} \dot q_h = \sum_h \frac{\partial T_2}{\partial \dot q_h} \dot q_h + \sum_h \frac{\partial T_1}{\partial \dot q_h} \dot q_h + \sum_h \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_h} \dot q_h$$

$$= 2T_2 + T_1 + 0$$

$$H = \sum_k p_k \dot q_k - L = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot q_k} \dot q_k - L = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0 - V)$$

$$= T_2 - T_0 + V \quad //$$

SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI. Q con coord $(q_1, \dots, q_n)$

Formalismo Lagrangiano : Q è completato a uno spazio $2n$ - dim. detto

SPAZIO DEGLI STATI $\underbrace{TQ}$ con coord. $(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n)$

"FIBRATO TANGENTE"

Formalismo Hamiltoniano : Q è completato a uno spazio $2n$ - dim. detto

SPAZIO DELLE FASI $\underbrace{T^*Q}$ con coord. $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$

"FIBRATO COTANGENTE"

Esempi

1) PTO MATERIALE in coord. cartesiane

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \qquad V = V(x,y,z)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad p_y = m\dot{y} \qquad p_z = m\dot{z}$$

invertiamo

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \qquad \dots$$

$$H(p_x, \dots, p_z, x, \dots, t) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + V(x,y,z) = \underbrace{\frac{\bar{p}^2}{2m}}_{\text{en. cinetica}} + V$$

2) Oscillatore ARMONICO

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \rightarrow \underline{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}$$

3) FORZE ELETTROMAGNETICHE

$$\bar{E} = -\left(\bar{\nabla}\phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$$

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

$$\bar{F} = e\,(\bar{E} + \dot{\bar{q}} \times \bar{B})$$

$$= -e\left(\bar{\nabla}\phi + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) + e\,\dot{\bar{q}} \times (\bar{\nabla} \times \bar{A})$$

$\bar{F}$ si ricava da $V(\bar{q},\dot{\bar{q}}) = \underbrace{e\,\phi(\bar{q})}_{V_0} - \underbrace{e\,\dot{\bar{q}}\cdot\bar{A}(\bar{q})}_{V_1}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} = \frac{d}{dt}\left(-e\,A_h(q)\right) = -e\left(\frac{\partial A_h}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\dot{q}_k\frac{\partial A_h}{\partial q_k}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_h} = e\frac{\partial \phi}{\partial q_h} - e\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_k\frac{\partial A_k}{\partial q_h}$$

$$= -e\left(\frac{\partial \phi}{\partial q_h} + \frac{\partial A_h}{\partial t}\right) + e\sum_{k=1}^{3}\dot{q}_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial q_h} - \frac{\partial A_h}{\partial q_k}\right)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + e\,\dot{q}\cdot\bar{A} - e\phi$$

$$p_h = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} = m\dot{q}_h + e\,A_h \Rightarrow \dot{q}_h = \frac{p_h - e\,A_h}{m} \quad (*)$$

$$H = \bar{p}\cdot\dot{q} - L\,\Big|_{(*)} = \bar{p}\cdot\left(\frac{\bar{p}-e\bar{A}}{m}\right) - \frac{m}{2}\frac{(\bar{p}-e\bar{A})^2}{m^2} - e\left(\frac{\bar{p}-e\bar{A}}{m}\right)\cdot\bar{A} + e\phi$$

$$= \frac{(\bar{p}-e\bar{A})^2}{2m} + e\phi \qquad = T + V_0$$

FORMULAZIONE VARIAZIONALE

Siamo interessati alle traiettorie nello sp. delle fasi

$$\underbrace{p_i(t) \qquad q_i(t)}_{\text{sono funzioni}} \qquad i=1,\dots,n \qquad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2n}$$

Funzionale AZIONE HAMILTONIANA

$$S[\bar{p},\bar{q}] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\left[\sum_{h=1}^{n} p_h(t)\,\dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t),\bar{q}(t),t) \right]}_{L(\bar{q}(t),\, \dot{\bar{q}}(t),\, t)} dt$$

Se il sistema Hamiltoniano è equiv. a un sist. Lagrangiano, S coincide con l'azione Hamiltoniana vista in precedenza.

[Se ho $\mathcal{S}[\bar{p},\bar{q}] = \int dt \; F(\bar{p}(t),\bar{q}(t),t)$

$$\delta\mathcal{S} = \frac{d}{d\alpha}\int dt \left[F(\bar{p}+\alpha\delta\bar{p},\, \bar{q}+\alpha\delta\bar{q},\, t)\right]\Big|_{\alpha=0} =$$

$$= \int dt \sum_h \left(\frac{\partial F}{\partial p_h}\delta p_h + \frac{\partial F}{\partial q_h}\delta q_h \right)$$

]

$$S[\bar{p},\bar{q}] \equiv \int_{t}^{t_1} \left[\sum_{h=1}^{n} p_h(t)\,\dot{q}_h(t) - H(\bar{p}(t),\bar{q}(t),t) \right] dt$$

$$\delta S[\bar p,\bar q,\delta\bar p,\delta\bar q] = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{m}\Big[\underbrace{\delta p_s(t)\,\dot q_s(t)}_{\frac{\partial}{\partial p_s}\left(\sum_h p_h \dot q_h\right)\delta p_s} + \underline{p_s(t)\,\delta\dot q_s(t)} - \frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s(t) - \frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s(t)\Big]dt$$

integriamo per parti

$$\delta \dot q_s = \frac{d}{dt}\delta q_s$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{m}\Big[\Big(\dot q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\Big)\delta p_s - \Big(\dot p_s + \frac{\partial H}{\partial q_s}\Big)\delta q_s\Big]dt + \sum_{s=1}^{m} p_s\,\delta q_s\Big|_{t_0}^{t_1}$$

Prop. Il moto $\bar p(t),\bar q(t)$ $(t_0\le t\le t_1)$ rende stazionario il funzionale azione $S[\bar p,\bar q]$ corrispondente a una data Hamiltoniana H, per variazioni arbitrarie e per $\delta\bar q$ nulle agli estremi, SE E SOLO SE esso soddisfa le eq. di Hamilton relative a H.