

# 1. Integrazione Per Le Funzioni Di Due Variabili.

## 1.1 Definizione di integrale doppio.

Se  $f$  è una funzione di 2 variabili positiva e se  $R = [a, b] \times [c, d]$  è un rettangolo contenuto nel suo dominio, possiamo considerare il problema di calcolare il volume  $V$  delimitato dal piano  $(x, y)$  dal grafico di  $f$  e dal cilindro generato da  $R$  con generatrici parallele all'asse  $z$  (si veda la figura ??).

Il volume può essere definito

- considerando una partizione di  $R$ ,
- definendo in corrispondenza le somme superiori e le somme inferiori di  $f$  relative alla partizione scelta,
- dichiarando una funzione integrabile se, al variare delle partizioni, l'estremo inferiore delle somme superiori e l'estremo superiore delle somme inferiori coincidono,
- in tal caso chiamiamo il loro valore comune

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$

L'esistenza dell'integrale è assicurata, similmente a quanto accade per le funzioni di una variabile, dalla continuità della funzione integranda, e si può anche dimostrare che è sufficiente che  $f$  sia continua su  $R$  a meno di un insieme di area 0. Possiamo in altre parole dimostrare il seguente risultato.

Se  $f$  è una funzione di due variabili limitata su un insieme chiuso e limitato  $D$  ed è continua a meno di un sottoinsieme di misura 0, allora  $f$  è integrabile su  $D$

(Pur non entrando nei particolari della definizione di area, possiamo ricordare che è possibile calcolare l'area di insiemi piani significativi usando la teoria dell'integrazione per le funzioni di una variabile)

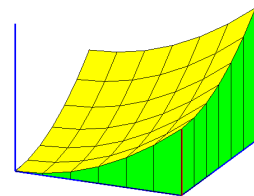


Figure 1.1: .

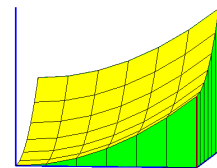


Figure 1.2: .

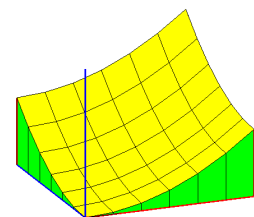


Figure 1.3: .

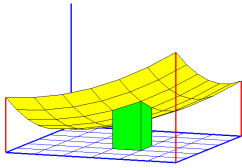


Figure 1.4: .

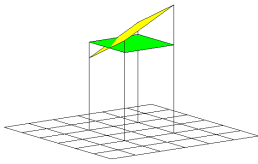


Figure 1.5:

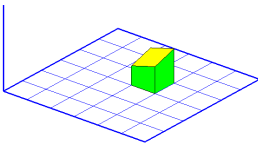
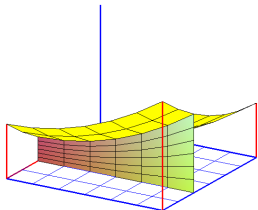


Figure 1.6: Singolo elemento di volume

Figure 1.7:  $S(x)$ 

Quando una funzione è integrabile possiamo approssimare il suo integrale su  $R$  anche usando le somme di Riemann; tali somme possono anche essere usate per dare la definizione di integrabilità e si calcolano come segue:

- Si suddivide il rettangolo  $R$  in rettangoli più piccoli  $R_j$ , ad esempio ottenuti suddividendo i lati di  $R$  in parti uguali di ampiezza  $\delta_x$  e  $\delta_y$ , rispettivamente (figura 1.6);
- si sceglie in maniera arbitraria un punto  $(\xi_j, \eta_j)$  in ognuno dei rettangoli  $R_j$  e si calcola la quota  $f(\xi_j, \eta_j)$  (figura ??)
- si sostituisce al volume delimitato su  $R_j$  dalla funzione  $f$  il volume del parallelepipedo di base  $R_j$  ed altezza  $f(\xi_j, \eta_j)$  (figura ??)
- si calcola la somma di tutti i contributi così ottenuti da ciascuno dei rettangoli della partizione.

Le somme di Riemann sono così definite da

$$\mathcal{R}(f) = \sum_j f(\xi_j, \eta_j) \delta_x \delta_y \quad (1.1)$$

e, quando la partizione è abbastanza fine, cioè suddivide  $R$  in rettangoli  $R_j$  abbastanza piccoli,  $\mathcal{R}(f)$  approssima il valore di  $\iint_R f(x, y) dx dy$

## 1.2 Formule di riduzione per gli integrali doppi.

Purtroppo non disponiamo, per il calcolo di un integrale doppio, di uno strumento tanto potente quanto il teorema fondamentale del calcolo integrale; questo risultato si può infatti estendere anche al calcolo delle funzioni di più variabili, ma si colloca in un contesto più generale: quello delle forme differenziali e del teorema di Stokes.

Occorre quindi cercare altre vie per il calcolo degli integrali doppi. Se definiamo

$$S(x) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$S(x)$  rappresenta una sezione del volume  $V$ , si veda figura 1.7.

ed il calcolo integrale per le funzioni di una variabile consente di calcolare la sua area  $A(x)$  mediante la

$$A(x) = \int_a^b f(x, y) dy$$

Possiamo considerare il volume  $V$  come la somma (infinita) dei volumi elementari  $A(x)$  (che sono nulli) per  $x \in [a, b]$ ; naturalmente la somma infinita si calcola integrando  $A(x)$  su  $[a, b]$  e quindi

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

In maniera del tutto simile possiamo calcolare

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

Il calcolo di un integrale doppio può quindi essere ridotto al calcolo di due integrali semplici (formule di riduzione).

Il vincolo fin qui posto sul dominio di integrazione, ( $R$  è un rettangolo) non può tuttavia essere mantenuto e quindi è necessario definire

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

per una classe di sottoinsiemi del piano un po' più generale.

È naturale considerare per questo scopo la classe dei **domini normali**

Diciamo che un insieme  $D$  è un dominio normale rispetto all'asse  $x$  se

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

dove  $[a,b]$  è un intervallo reale e  $\alpha$  e  $\beta$  sono funzioni continue su  $[a,b]$ . (Si veda la figura 1.8).

Diciamo che un insieme  $E$  è un dominio normale rispetto all'asse  $y$  se

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(x) \leq x \leq \delta(x)\}$$

dove  $[c,d]$  è un intervallo reale e  $\gamma$  e  $\delta$  sono funzioni continue su  $[c,d]$ . (Si veda la figura 1.9).

Per definire, ad esempio,

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

possiamo

- definire una funzione

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in D \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

- considerare un rettangolo  $R \supset D$
- definire

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_R \tilde{f}(x,y) dx dy$$

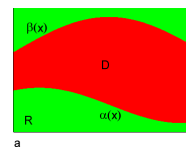


Figure 1.8: Dominio normale rispetto all'asse  $x$

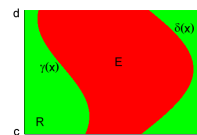


Figure 1.9: Dominio normale rispetto all'asse  $y$

Nel compiere questa procedura, possiamo osservare che, poichè si può dimostrare che il grafico di una funzione continua ha area nulla e poichè la definizione di  $\tilde{f}$  può generare discontinuità solo nei punti dei grafici di  $\alpha$  e di  $\beta$ , se  $f$  è continua a meno di insiemi di area nulla tale risulta anche  $\tilde{f}$  e pertanto

Una funzione  $f$  continua a meno di un insieme di area nulla è integrabile su un dominio normale  $D$ .

A completamento occorre poi osservare che

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \iint_R \tilde{f}(x,y) dx dy \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d \tilde{f}(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx \end{aligned}$$

ed in maniera del tutto simile

$$\begin{aligned} \iint_E f(x,y) dx dy &= \iint_R \tilde{f}(x,y) dx dy \\ &= \int_c^d \left( \int_a^b \tilde{f}(x,y) dx \right) dy = \int_c^d \left( \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x,y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Infine osserviamo che quanto abbiamo visto è applicabile ad insiemi che siano unione finita di domini normali. Questo ci permette di considerare la maggior parte degli insiemi che si incontrano nella pratica del calcolo.

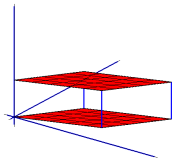


Figure 1.10: Volume ed Area

### 1.3 Cambiamento di variabili negli integrali doppi

#### 1.3.1 Cambiamento di variabili lineari.

Consideriamo ora il problema di calcolare l'area di un parallelogrammo  $A$  che abbia come lati i vettori  $(a, b)$  e  $(c, d)$ .

Semplici considerazioni di geometria permettono di stabilire che

$$\text{Area}(A) = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ed inoltre, se teniamo conto del fatto che il volume del cilindro di altezza 1 (figura ??) che ha per base il parallelogrammo è uguale ad  $\text{Area}(A)$ , possiamo anche affermare che

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 dx dy = \iint_B \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} du dv$$

dove

$$B = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\} = [0, 1] \times [0, 1]$$

ed osservare che il quadrato  $B = [0, 1] \times [0, 1]$  si trasforma nel parallelogramma  $A$  mediante le corrispondenze

$$\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Se supponiamo che

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

la corrispondenza è biunivoca e può essere invertita; sia

$$\begin{cases} u = \alpha x + \beta y \\ v = \gamma x + \delta y \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

la corrispondenza inversa.

Con riferimento alla definizione di integrale possiamo anche osservare che una partizione del quadrato  $B$  in quadrati più piccoli  $B_j$  corrisponde ad una suddivisione del parallelogramma  $A$  in parallelogrammi  $A_j$ , simili, più piccoli (si veda la figura 1.12).

Pertanto se  $f$  è una funzione definita su  $A$ , per calcolare

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

possiamo calcolare le somme di Riemann usando la partizione di  $A$  in parallelogrammi, che risulta più naturale di una partizione in rettangoli; Le somme di Riemann in questo caso risultano essere

$$\mathcal{R}(f) = \sum_j f(x_j, y_j) \text{Area}(A_j) = \sum_j f(x_j, y_j) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{Area}(B_j)$$

Ma esiste un unico punto  $(u_j, v_j) \in B$  tale che

$$(x_j, y_j) = (au_j + bv_j, cu_j + dv_j)$$

per cui

$$\mathcal{R}(f) = \sum_j f(au_j + bv_j, cu_j + dv_j) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{Area}(B_j)$$

Tali somme al raffinarsi della partizione si approssimano a

$$\iint_B f(au + bv, cu + dv) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} du dv$$

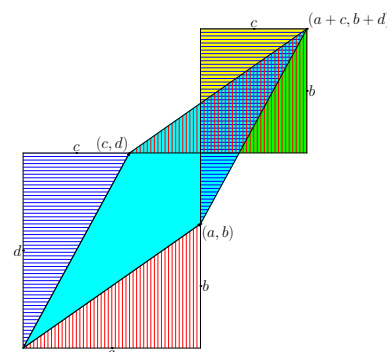


Figure 1.11: Area del Parallelogramma

L'area del parallelogramma generato dai vettori  $(a, b)$  e  $(c, d)$  può essere calcolata mediante

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Infatti come si vede dalla figura l'area del parallelogramma (in azzurro) risulta uguale alla differenza tra le aree dei rettangoli di lato  $a, c$  (in basso a sinistra) e di lato  $b, d$  in alto a destra; inoltre la parte di parallelogramma non contenuta nel rettangolo di lati  $a, c$  ha area uguale alla somma delle aree dei triangoli tratteggiati meno la somma delle aree dei triangoli giallo e verde e della zona quadrettata (che è contenuta in entrambi i triangoli tratteggiati)

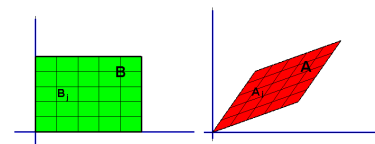


Figure 1.12: Cambiamento di variabili lineare

e quindi possiamo concludere che

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(au + bv, cu + dv) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} du dv$$

### 1.3.2 Coordinate Polari nel piano.

Possiamo usare in luogo di 1.2 anche altre trasformazioni; ad esempio possiamo usare la trasformazione in coordinate polari che è definita da:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (1.4)$$

La 1.4 trasforma

- le rette  $\rho = R$  in circonferenze centrate nell'origine di raggio  $R$
- le rette  $\theta = \alpha$  in semirette passanti per l'origine inclinate di un angolo  $\alpha$  rispetto al semiasse positivo dell'asse  $x$ .
- i settori di corona circolare nel piano  $(x, y)$

$$A = \{(x, y) : r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, \alpha \leq \tan y/x \leq \beta\} = \\ \{(x, y) : r \leq \rho \leq R, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

in rettangoli

$$B = \{(\rho, \theta) : \rho \leq R, \alpha \leq \theta \leq \beta\} = [r, R] \times [\alpha, \beta]$$

nel piano  $(\rho, \theta)$ . (Si veda la figura 1.13).

Purtroppo, la trasformazione definita dalle 1.4 non è biunivoca nè invertibile ed inoltre se

$$B_1 = [R - \delta_r, R] \times [\alpha, \beta]$$

e

$$B_2 = [R, R + \delta_r] \times [\alpha, \beta]$$

l'immagine  $A_1$  di  $B_1$  ed  $A_2$  di  $B_2$  hanno aree diverse anche se  $B_1$  e  $B_2$  hanno aree uguali.

Più precisamente si vede che se l'area di  $A_1$  è più piccola di quella di  $A_2$  poichè  $A_1$  è più vicino all'origine di  $A_2$ .

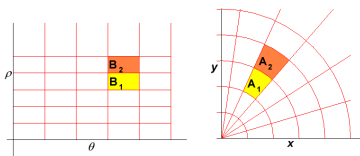


Figure 1.13: Cambiamento di variabili in coordinate polari

Possiamo calcolare che:

$$\begin{aligned} \text{Area}(B) &= (R - r)(\beta - \alpha) \\ \text{Area}(A) &= \frac{1}{2}(R^2 - r^2)(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}(R + r)\text{Area}(B) \end{aligned}$$

Pertanto non possiamo procedere, come nel caso di 1.2 in quanto il fattore di conversione per ottenere Area (A) da Area (B) non è costante.

Possiamo tuttavia affermare che

$$\text{Area}(A) = \iint_A 1 dx dy \quad (1.5)$$

e la 1.5 si può ottenere come somma di settori circolari più piccoli  $A_j$  delimitati da circonferenze di raggio  $\rho$  e  $\rho + \delta\rho$  e aventi ampiezza  $\delta\theta$ .

Se

$$B_j = [\rho, \rho + \delta\rho] \times [\theta, \theta + \delta\theta]$$

l'area di ciascuno dei settori  $A_j$  è data da

$$\text{Area}(A_j) = \frac{1}{2}(2\rho + \delta\rho)\delta\rho\delta\theta = \frac{1}{2}(2\rho + \delta\rho)\text{Area}(B_j)$$

ed inoltre se  $\delta\rho$  è piccolo e trascurabile avremo che

$$\text{Area}(A_j) \approx \frac{1}{2}2\rho\text{Area}(B_j)$$

Poichè

$$\text{Area}(A) = \sum_j \text{Area}(A_j) \approx \sum_j \rho \text{Area}(B_j)$$

Possiamo affermare che

$$\text{Area}(A) = \iint_B \rho d\rho d\theta$$

Se poi  $f$  è una funzione definita su  $A$ , possiamo affermare che

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_A f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$





## 2. Integrazione Di Funzioni Di Tre Variabili.

### 2.1 Definizione di integrale triplo.

Le formule di riduzione che abbiamo usato per il calcolo di un integrale doppio consentono di ricondurre il problema al calcolo di due integrali semplici.

In modo del tutto simile possiamo trovare il modo di calcolare un integrale triplo, cioè l'integrale di una funzione  $f$  di tre variabili  $(x, y, z)$  su un dominio  $V$  contenuto in  $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Il concetto di area che è naturalmente collegato al concetto di integrale semplice e quello di volume che è caratteristico dell'integrale doppio si estende al concetto di ipervolume a quattro dimensioni per gli integrali tripli.

Inoltre, come nel caso di due variabili in cui abbiamo osservato che

$$\text{Area} (A) = \iint_A 1 dx dy = \text{Volume} (C_A)$$

se  $C_A$  è il cilindro di base  $A$  e di altezza 1, possiamo dire che

$$\text{Volume} (V) = \iiint_V 1 dx dy dz = \text{IperVolume} (C_V)$$

dove  $C_V$  è il cilindro di base  $V$  e di altezza 1.

### 2.2 Formule di riduzione per gli integrali tripli.

Per gli integrali tripli sono possibili diverse scomposizioni che danno origine a diverse formule di riduzione che riteniamo utile illustrare mediante qualche esempio.

Ci occuperemo allo scopo di calcolare

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

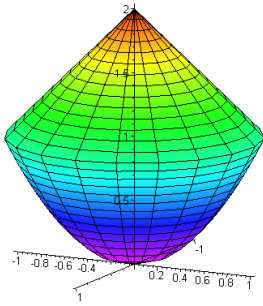


Figure 2.1: .

dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\} \quad (2.1)$$

La parte di  $\mathbb{R}^3$  definita dalla 2.1 è quella indicata nella figura ?? ??

Possiamo integrare su  $V$  "sommando", cioè integrando rispetto a  $z$ , i valori ottenuti mediante il calcolo dell'integrale doppio sulle sezioni di  $V$  definite da

$$S(z) = \{(x, y) : (x, y, z) \in V\}$$

Avremo pertanto che

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^2 \left( \iint_{S(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

e gli integrali indicati si calcolano come già sappiamo.

Possiamo anche calcolare l'integrale triplo considerando la proiezione  $D$  del solido  $V$  e calcolando

$$\iiint_D \left( \int_{F(x,y)} f(x, y, z) dx, dy \right) dz = \iint_D \left( \int_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dx, dy \right) dz$$

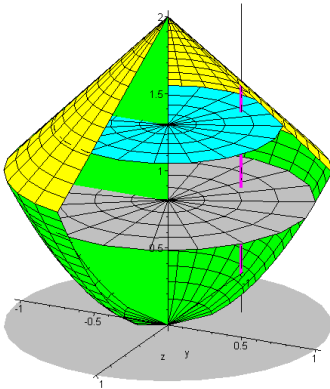


Figure 2.2: .

### 2.3 Cambiamento di variabili per gli integrali tripli.

Anche per gli integrali tripli è utile considerare qualche cambiamento di variabile allo scopo di semplificare i calcoli nel caso di solidi con particolari simmetrie.

I cambiamenti di variabile più comuni sono quello lineare, quello in coordinate cilindriche e quello in coordinate sferiche, che ora illustriamo brevemente.

#### 2.3.1 Cambio di variabili lineare.

Si tratta del cambiamento di variabili definito dalle

$$\begin{cases} x = a_1 r + b_1 s + c_1 t \\ y = a_2 r + b_2 s + c_2 t \\ z = a_3 r + b_3 s + c_3 t \end{cases}$$

Se  $A \subset \mathbb{R}^3$  e se  $B$  è il trasformato di  $A$  mediante il cambiamento di variabili lineari si ha

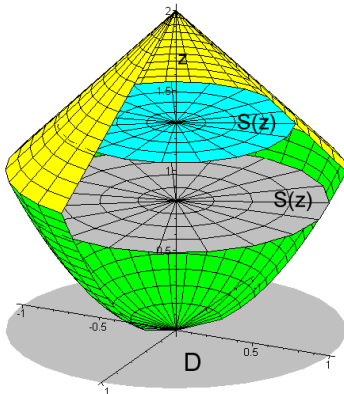


Figure 2.3: .

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(a_1 r + b_1 s + c_1 t, a_2 r + b_2 s + c_2 t, a_3 r + b_3 s + c_3 t) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)} \right| dr ds dt$$

dove

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)} \right| = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 s & c_3 \end{pmatrix}$$

### 2.3.2 Coordinate cilindriche.

Si tratta del cambiamento di variabili definito dalle

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad , z \in \mathbb{R}$$

Se  $A \subset \mathbb{R}^3$  e se  $B$  è il trasformato di  $A$  mediante il cambiamento di variabili in coordinate cilindriche si ha

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz$$

### 2.3.3 Coordinate sferiche.

Si tratta del cambiamento di variabili definito dalle

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \rho \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad -\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$$

Se  $A \subset \mathbb{R}^3$  e se  $B$  è il trasformato di  $A$  mediante il cambiamento di variabili in coordinate sferiche si ha

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B f(\rho \cos \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi$$



### 3. Integrali Multipli Impropri

Come nel caso degli integrali semplici, possiamo considerare il problema di calcolare l'integrale di una funzione di due o più variabili che non siano limitate o su domini di integrazione non limitati.

Qui illustriamo l'argomento con qualche esempio che è significativo anche per il seguito e che fornisce un utile strumento per affrontare, se necessario anche gli altri casi.

Consideriamo pertanto una funzione  $f$  definita su  $\mathbb{R}^2$  limitata ed integrabile su ogni insieme limitato e chiuso di  $\mathbb{R}^2$  (ad esempio continua) e sia  $D \subset \mathbb{R}^2$  un sottoinsieme non limitato di  $\mathbb{R}^2$ .

In tali condizioni non è lecito definire

$$\iint_D f(x,y) dx dy$$

in senso proprio, tuttavia possiamo procedere come segue:

Innanzitutto assicuriamoci di poter lavorare con una funzione sempre positiva; se  $f \geq 0$  nulla è da fare ma se così non è basta definire

$$f_+(x,y) = \max\{f(x,y), 0\} \quad \text{e} \quad f_-(x,y) = \min\{f(x,y), 0\}$$

osservare che

$$f = f_+ + f_-$$

e calcolare

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D_+} f_+(x,y) dx dy + \iint_{D_-} f_-(x,y) dx dy$$

dove

$$D_+ = \{(x,y) \in D : f(x,y) \geq 0\}, \quad D_- = \{(x,y) \in D : f(x,y) \leq 0\}$$

e chiedere che entrambi gli integrali a secondo membro esistano e non diano luogo ad una forma indeterminata.

Supponiamo quindi che  $f \geq 0$  e consideriamo una successione di insiemi  $D_n$  soddisfacente le seguenti condizioni:

- $D_n$  è chiuso e limitato

- $D_{n+1} \supset D_n$
- per ogni insieme limitato e chiuso  $K$  contenuto in  $D$  si può trovare un  $D_{\bar{n}}$  tale che  $D_{\bar{n}} \supset K$

È evidente che le condizioni sopra elencate esprimono il concetto che la successione di domini  $D_n$  riempie, invade, l'insieme  $D$  ed infatti una successione che soddisfa tali condizioni si chiama successione di domini invadenti  $D$ .

**Definizione 3.1** Se  $f \geq 0$  e se  $D_n$  è una successione di domini invadenti  $D$  allora definiamo

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_n \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

Si può dimostrare che, qualora il limite esista, è indipendente dalla successione di domini invadenti usata.

### 3.1 Qualche esempio

Consideriamo il problema di calcolare

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$$

Definiamo

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}$$

allora  $D_n$  è una successione di domini invadenti  $\mathbb{R}^2$  e quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy &= \lim_n \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \\ &= \lim_n \int_0^{2\pi} \left( \int_0^n \rho e^{-(\rho^2)/2} d\rho \right) d\theta = \\ &= \lim_n 2\pi \int_0^n \rho e^{-(\rho^2)/2} d\rho = 2\pi \lim_n \left. -e^{-(\rho^2)/2} \right|_0^n = 2\pi \lim_n (1 - e^{-(n^2)/2}) = 2\pi \end{aligned}$$

Il risultato appena ricavato ha una conseguenza interessante, infatti, poichè il valore dell'integrale non dipende dalla successione di domini invadenti usata, possiamo rifare il calcolo anche usando la successione definita da

$$Q_n = [-n, n] \times [-n, n]$$

ed otterremo lo stesso risultato.

Avremo

$$\begin{aligned}
2\pi &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \lim_n \iint_{Q_n} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy = \\
&= \lim_n \int_{-n}^n \left( \int_{-n}^n e^{-(x^2)/2} e^{-(y^2)/2} dx \right) dy = \\
&= \lim_n \left( \int_{-n}^n e^{-(y^2)/2} dy \right) \left( \int_{-n}^n e^{-(x^2)/2} dx \right) = \lim_n \left( \int_{-n}^n e^{-(t^2)/2} dt \right)^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2)/2} dt \right)^2
\end{aligned}$$

e possiamo affermare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2)/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

e che

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2)/2} dt = 1$$