(7/05/2021)

I PROVA PARZIALE

PROBLEMA 1

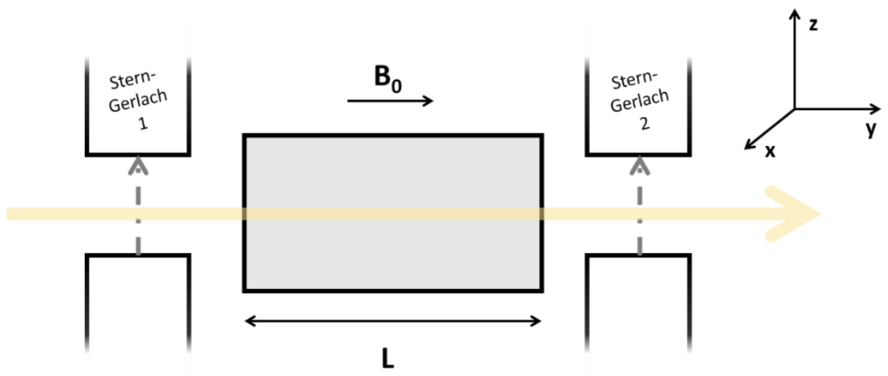
Il momento magnetico dell'atomo di argento ([Kr] $4d^{10}\,5s^{1}$) è essenzialmente analogo al momento magnetico del suo elettrone 5s, cioè $\boldsymbol{\mu} = -\gamma\mathbf{s}$ dove $\mathbf{s}$ è lo spin dell'elettrone.

Supponiamo che un fascio di atomi di argento si muova con velocità costante V e passi attraverso un apparato di Stern-Gerlach in grado di selezionare gli atomi con $m_s = +1/2$, dove $\hbar m_s$ è l'autovalore dell'operatore s_z . Il fascio ha un'intensità I_0 , definita come numero di atomi che attraversa la sezione (del fascio stesso) nell'unità di tempo.

All'istante $t = 0$ gli atomi entrano in una regione di lunghezza L in cui agisce un campo magnetico costante B_0 parallelo alla direzione del fascio (asse y). Al termine del percorso gli atomi passano attraverso un ulteriore apparato di Stern-Gerlach che permette di selezionare la componente z dello spin degli atomi.

a) Si scriva esplicitamente (in forma matriciale) l'Hamiltoniana del sistema nella regione in cui agisce il campo magnetico B_0 ($H' = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$).
b) Si verifichi che la funzione di spin $\chi(t)$ per $t \geq 0$ è data dalla relazione $\chi(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma B_0}{2}t\right) \\ \sin\left(\frac{\gamma B_0}{2}t\right) \end{pmatrix}$
c) Considerando la soluzione del punto b) si indichino i possibili valori di spin misurati dal secondo apparato di Stern-Gerlach e le probabilità associate, in funzione di V, B_0 ed L
d) Si esprimano le intensità dei fasci in uscita in funzione dell'intensità iniziale I_0

Si assuma che la velocità degli atomi resti costante con valore V durante tutto il percorso.



Rappresentazione schematica del set-up descritto nel problema

Matrici di Pauli:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

Si consideri un atomo composto da un pione π^+ ($m_{\pi^+} = 237.2\, m_e$) ed un muone μ^- ($m_{\mu^-} = 206.77\, m_e$)

a) Si scriva l'Hamiltoniana del sistema (si consideri $4\pi\epsilon_0 = 1$)
b) Si determini l'espressione dei livelli energetici E_n e delle funzioni d'onda dell'atomo così definito.

Si assuma ora che la carica del pione sia distribuita uniformemente in una sfera di raggio $R = 10^{-13}\ cm$ e che il muone sia invece una carica puntiforme. Il potenziale Coulombiano diventa

$$V'(r) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{r}\ per\ r > R \\ -\dfrac{e^2}{R}\ per\ r \leq R \end{cases}$$

Considerando la variazione dovuta alla distribuzione di carica del pione come una piccola perturbazione rispetto al caso in cui π^+ è una corica puntiforme

c) Si scriva l'Hamiltoniana di perturbazione H'.
d) Si calcoli la correzione al primo ordine dello stato fondamentale E_1.[nel calcolo si approssimi $e^x \sim 1$]
e) Nei calcoli svolti nel punto precedente, l'approssimazione suggerita ($e^x \sim 1$) è ragionevole? Si motivi la risposta.

Quantità utili:

raggio di Bohr: $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.53\ \text{Å}$

Energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno: $E_1 = \dfrac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13.6\ eV$

Funzione d'onda dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno: $\psi_{100}(r,\theta,\phi) = \left(\dfrac{1}{\pi a_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-r/a_0}$

- SOLUZIONI -

PROBLEMA 1

a) $H = \gamma B_0 \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

c) $P\left(s_z = \frac{\hbar}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\gamma B_0 L}{2V}\right)$

$P\left(s_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\gamma B_0 L}{2V}\right)$

d) $I\left(s_z = \frac{\hbar}{2}\right) = I_0 \cos^2\left(\frac{\gamma B_0 L}{2V}\right)$ e $I\left(s_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = I_0 \sin^2\left(\frac{\gamma B_0 L}{2V}\right)$

PROBLEMA 2

a) $H = \frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}$ con $m^* = \frac{m_{\pi^+} \cdot m_{\mu^-}}{m_{\pi^+} + m_{\mu^-}} = 110.5\, m_e$

b) $E_n^{\pi^+\mu^-} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{m^*}{m_e} \cdot E_1 = -\frac{1}{n^2} \cdot 110.5 \cdot 13.6\ eV = -\frac{1502.8}{n^2}\ eV$ e

$$\psi_{100}^{\pi^+\mu^-}(r,\theta,\phi) = \left(\frac{1}{\pi\left(a_0^{\pi^+\mu^-}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-r/a_0^{\pi^+\mu^-}} = \left(\frac{m^{*3}}{\pi m_e^3 a_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-m^* r/m_e a_0}$$

c) $H' = \begin{cases} 0\ per\ r > R \\ e^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\ per\ r \leq R \end{cases}$

d) $\Delta E_1^{\pi^+\mu^-} \sim \frac{2}{3}\frac{e^2}{a_0}\frac{m^*}{m_e}\left(\frac{m^*}{m_e}\frac{R}{a_0}\right)^2$

e) Sì, $e^{-\frac{2r}{a_0^{\pi^+\mu^-}}} = 0.996 \sim 1$

ESAME – SECONDO APPELLO (Sessione Autunnale)

PROBLEMA 1

Si stimi l'errore che si commette nel calcolare l'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno usando la funzione gaussiana

$$\Psi(r) = e^{-cr^2} \; con \; c > 0$$

in luogo dell'autofunzione corretta $\Psi(r) \propto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r}$.

Quantità utili

Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno in coordinate polari:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Integrali notevoli:

$$\int_0^{+\infty} dx\, x^{2n} e^{-px^2} = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{p^{2n+1}}}$$

$$\int_0^{+\infty} dx\, x^{2n+1} e^{-px^2} = \frac{n!}{2p^{n+1}}$$

- SOLUZIONE -

$$E^{VAR} = -\frac{4}{3\pi}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2$$

$$E^{ESATTA} = -\frac{1}{2}\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2$$

$$\Delta E = E^{VAR} - E^{ESATTA} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi}\right)\frac{m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2$$

ESAME – PRIMO APPELLO (Sessione Invernale)

Si consideri la variazione al primo ordine dei livelli energetici dell'atomo di idrogeno dovuti ad un campo elettrico esterno di modulo E e direzione parallela all'asse z.

a) Si dimostri che lo stato fondamentale (n=1) non è influenzato dal campo elettrico (al primo ordine perturbativo)
b) Si considerino gli stati degeneri con n=2. In analogia con quanto visto nel punto a, si determinino gli stati di tale livello che non vengono perturbati dalla presenza del campo elettrico, sempre al primo ordine.
c) si calcoli lo shift in energia per i rimanenti stati del livello n=2
d) Si rappresenti graficamente lo shift e l'eventuale splitting del livello energetico n=2 dovuto al campo elettrico.

N.B. Perturbazione dovuta alla presenza di campo elettrico:

$$H' = e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$$

<u>Quantità e relazioni utili :</u>

Funzioni radiali dell'atomo idrogenoide:

$$R_{10} = 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{20} = 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}$$

Armoniche sferiche:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta$$

$$Y_{1\pm1} = \mp\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}$$

Integrale notevole:

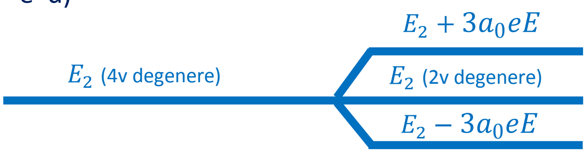
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-px}dx = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

- SOLUZIONE -

a) H' *è un operatore dispari* → $\langle\psi_{100}|H'|\psi_{100}\rangle = 0$

b) solo i termini $\langle\psi_{2lm}|H'|\psi_{2l'm'}\rangle$ con $m = m'$ sono diversi da zero

c) e d)



ESAME – PRIMO APPELLO (Sessione Invernale)

Un muone di carica negativa (spin s=1/2, massa m=207 m_e, con m_e massa dell'elettrone e carica -e) viene catturato da un nucleo di alluminio (13 protoni e 14 neutroni) e forma stati di tipo idrogenoide.

a) Si calcoli il raggio di Bohr per tale sistema

b) Si scriva la funzione d'onda per il suo stato fondamentale

c) Si calcoli l'energia del fotone emesso in un processo di decadimento dagli stati 2p allo stato fondamentale

d) Si calcoli l'energia dei fotoni emessi per decadimento più probabile dallo stato 3d

<u>Quantità utili</u>

massa dell'elettrone $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$

raggio di Bohr: $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.53$ Å

Rydberg: $Ry = \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = 13.6\ eV$

Funzione d'onda dello stato fondamentale dell'atomo idrogenoide: $\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$

- SOLUZIONE -

a) $a_\mu \sim \frac{m_e}{207 m_e} a_0 = 2.6 \cdot 10^{-3}$Å

b) $\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{13}{a_0/207}\right)^{3/2} e^{-2691 \cdot r/a_0}$

c) $h\nu = |E_{2p} - E_{1s}| = 3.57 \cdot 10^5 eV$

d) $h\nu = |E_{3d} - E_{2p}| = 6.61 \cdot 10^4 eV$