

# Sistemi Dinamici - Introduzione

**Michele Cirafici**

*DMG & INFN & IGAP, Trieste, Italy*

Email: `mcirafici@units.it`

*Dispense per uso interno - da ricontrollare*

7 marzo 2022

## Indice

1	Alcune considerazioni introduttive	1
2	Sistemi dinamici	2
3	Richiami sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie	7
4	Generalità sulle varietà differenziabili	9
5	Campi vettoriali	10
A	Esempi di equazioni differenziali	12

### 1 Alcune considerazioni introduttive

La storia della dinamica inizia con Newton (1642-1726ca). Newton stabilì gli aspetti fondanti della teoria delle equazioni differenziali per poter studiare l'evoluzione dei sistemi fisici, in particolare il moto dei corpi celesti. Oggi le equazioni della dinamica ritornano in tantissimi problemi, non necessariamente legati ai quesiti che Newton si poneva: lo studio di fenomeni atmosferici, le equazioni della dinamica delle popolazioni in ecologia, fenomeni di replicazione ed espressione del DNA, fino a problemi concettualmente più profondi come l'evoluzione del nostro Universo, presentano caratteristiche simili.

Il problema ha le seguenti caratteristiche. Un sistema si trova in uno stato iniziale. Agenti esterni, reali o astratti, fanno passare il sistema dallo stato iniziale ad un nuovo stato. Come possiamo formalizzare questo fenomeno? Che tipo di tecniche matematiche abbiamo a disposizione? Che tipo di informazioni possiamo aspettarci di ottenere?

Gli strumenti che abbiamo a nostra disposizione sono le equazioni differenziali, e le equazioni alle differenze per sistemi discreti. In questo corso impareremo ad usare questi strumenti per studiare il problema della dinamica.

Tuttavia in generale non saremo in grado di trovare una soluzione esatta che descriva l'evoluzione del nostro sistema. Fu Poincaré verso la fine del '800 a introdurre un cambio di prospettiva, ponendo l'accento sulle proprietà qualitative, rispetto a quelle quantitative. Invece di cercare una soluzione esplicita (notiamo che avere una soluzione esplicita non è sempre utile, ad esempio se la nostra soluzione ha la forma di pagine e pagine di funzioni speciali), possiamo chiederci quale sarà l'andamento della soluzione nel lontano futuro. Possiamo chiederci se il nostro sistema è *stabile*. Ad esempio se prendiamo il sistema solare, invece di descrivere esplicitamente le orbite di tutti i pianeti, possiamo chiederci se questi rimarranno vicino al Sole, o se ad un certo momento si allontaneranno indefinitamente. Per rendere più preciso il concetto di stabilità, e altre idee correlate, avremo bisogno di adottare una prospettiva geometrica.

Da un punto di vista più concreto, la dinamica di un sistema viene descritta o attraverso equazioni differenziali, o attraverso l'iterazione di mappa (o equazioni alle differenze). Una caratteristica molto importante comune alla maggior parte dei sistemi dinamici è la *non-linearità*, dell'equazione

differenziale o della funzione iterata. In questo corso impareremo a trattare alcuni sistemi non-lineari e vedremo che questi necessitano di una propria impostazione concettuale.

Per finire il fenomeno del *caos*. Parlare di evoluzione caotica per un sistema significa descrivere una situazione in cui il sistema dipende in modo molto sensibile dalle condizioni iniziali (una minima alterazione del problema iniziale può portare a soluzioni che hanno un andamento completamente diverso) e le cui traiettorie “vagono un pò ovunque”. Spesso fenomeni caotici hanno *struttura*. Ad esempio sistemi diversi possono diventare caotici nello stesso modo, o le soluzioni sono associate a figure estremamente ricche dal punto di vista geometrico. Durante il corso cercheremo di avvicinarci a questi fenomeni.

## 2 Sistemi dinamici

Cominciamo a discutere alcuni aspetti della teoria dei sistemi dinamici, che vedremo più in dettaglio nel seguito.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali autonome

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) \quad (2.1)$$

dove  $x \in M$ , varietà  $n$ -dimensionale; in molte applicazioni chiameremo  $M$  lo *spazio delle fasi*. Una varietà è uno spazio che localmente è uguale ad  $\mathbb{R}^n$ . In particolare nelle vicinanze in ogni punto  $x \in M$  possiamo assumere tutte le proprietà di  $\mathbb{R}^n$ , e assegnare a  $M$  coordinate locali. Se abbiamo due punti vicini,  $x$  e  $y$ , possiamo chiederci come sono legati i due sistemi di coordinate. Le varietà si dice differenziabile se questi sistemi di coordinate sono legati da trasformazioni differenziabili. In pratica questo significa saper prendere derivate su tutto lo spazio  $M$ . In modo simile possiamo avere varietà analitiche, complesse, lisce... Quando lavoreremo con sistemi dinamici continui assumeremo sempre che  $M$  sia differenziabile.

I punti di  $M$  descrivono lo stato di un sistema, indicizzato da  $n$  variabili. Assumiamo quindi che un punto  $x \in M$  determini tutte le variabili che ci occorrono per caratterizzare il nostro sistema. La funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  può essere continua, differenziabile, o altro a seconda del contesto. Questa equazione differenziale definisce una legge di evoluzione dipendente da un parametro  $t$ , il tempo. Questo parametro può prendere valori in  $\mathbb{R}$  o in un intervallo. La legge di evoluzione è

$$\varphi_t : M \rightarrow M \quad (2.2)$$

definita da  $x(t) = \varphi_t(x_0)$ , che descrive lo stato di sistema al tempo  $t$  a partire dalle condizioni iniziali  $x_0$ . Il cambio di notazione è per sottolineare che la funzione  $x(t)$  dipende dalla scelta delle condizioni iniziali. La mappa  $\varphi_t$  è una legge astratta che prende il sistema nello stato iniziale  $x_0$  e lo lascia evolvere fino allo stato corrente.

**Esempio: il raffreddamento dei corpi.** Vediamo un esempio semplice. Consideriamo un corpo, ad una certa temperatura  $T$ . Osserviamo empiricamente che se questo corpo si trova in un ambiente a temperatura  $T^{\text{ext}}$  minore di  $T$ , si raffredda cedendo calore all'ambiente circostante. Questo processo

avviene tanto più rapidamente quanto è grande la differenza  $T - T^{\text{ext}}$ . Questo ci porta alla legge (di Newton (1642-1726ca))

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa (T - T^{\text{ext}}). \quad (2.3)$$

Se  $T > T^{\text{ext}}$  la temperatura  $T$  deve diminuire e pertanto la sua derivata deve essere negativa. Ne concludiamo quindi che  $\kappa > 0$ . Data una condizione iniziale  $T(t = 0) = T_0$ , ci aspettiamo che la funzione  $T = T(t)$  sia tale da garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione (concetti che richiameremo tra breve). L'equazione si integra immediatamente

$$T(t) = T^{\text{ext}} + (T_0 - T^{\text{ext}}) e^{-\kappa t}. \quad (2.4)$$

Perché questa equazione differenziale sia utile a descrivere un sistema, dobbiamo sapere cosa è  $\kappa$ . Questo significa andare a misurare  $\kappa$  per il sistema che ci interessa. Tuttavia, in questo corso adotteremo un'impostazione più astratta: considereremo  $\kappa$  come un *parametro*. Questo significa che non vogliamo considerare un oggetto esplicito, ma vorremmo considerare una classe più vasta di problemi, che differiscono per il valore di  $\kappa$ . In particolare, vogliamo poter variare il valore di  $\kappa$  a piacimento, e chiederci come l'evoluzione del nostro sistema dipenda da  $\kappa$ .

In questo esempio abbiamo fatto delle scelte implicite, che sono alla base della modellizzazione. In primo luogo abbiamo dichiarato  $T = T(t)$  la nostra *variabile di stato*. Questa è la variabile che caratterizza lo stato del sistema, cioè stiamo assumendo che conoscerla equivale a determinare completamente il sistema almeno per quanto riguarda le domande a cui siamo interessati a rispondere. Abbiamo inoltre assunto che  $T$  sia differenziabile, cioè abbiamo dichiarato che appartiene ad un appropriato spazio di funzioni, e funzione solamente del tempo  $t$ . In un secondo momento abbiamo introdotto un operatore differenziale  $\frac{d}{dt}$  che agisce su questo spazio di funzioni. Il nostro modello consiste quindi in un'equazione differenziale per la variabile di stato che, partendo da dati iniziali, determini l'evoluzione del sistema ad un qualsiasi istante.  $\square$

**Esempio: dinamica delle popolazioni** Consideriamo il modello di Malthus, proposto nel 1798 per descrivere la crescita di una popolazione. Facciamo le seguenti assunzioni

1. La popolazione è omogenea e tutti gli individui sono uguali. L'unica variabile che descrive lo stato della popolazione è il numero di individui in funzione del tempo:  $N = N(t)$ . In particolare  $N(t)$  non è funzione della distribuzione spaziale della popolazione (questa ipotesi porta a modelli governati da equazioni differenziali ordinarie e non alle derivate parziali).
2. La popolazione è formata da un numero molto grande di individui: possiamo approssimare  $N(t)$  con una funzione continua.
3. La popolazione è isolata: non ci sono migrazioni e l'unico modo in cui la popolazione può cambiare è attraverso la nascita e la morte di individui.
4. Le risorse a disposizione della popolazione non vengono influenzate da condizioni esterne né dalla popolazione stessa. In particolare la fertilità  $\beta \geq 0$  e la mortalità  $\mu \geq 0$  sono indipendenti dal tempo. Durante un lasso di tempo  $\Delta t$  ogni individuo dà nascita in media a  $\beta \Delta t$  individui, e ogni individuo ha una probabilità  $\mu \Delta t$  di morire.

Quindi, se al tempo  $t$  la popolazione consta di  $N(t)$  individui, passato un tempo  $\Delta t$  avremo un numero di individui

$$N(t + \Delta t) = N(t) + \beta \Delta t N(t) - \mu \Delta t N(t). \quad (2.5)$$

Equivalentemente

$$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \beta N(t) - \mu N(t), \quad (2.6)$$

che nel limite  $\Delta t \rightarrow 0$  determina l'equazione differenziale ordinaria

$$N'(t) = (\beta - \mu) N(t) = r N(t). \quad (2.7)$$

Questa equazione è il *modello di Malthus* e il parametro  $r = \beta - \mu$  misura il tasso di crescita della popolazione. Con condizione iniziale  $N(0) = N_0$ , il modello si integra facilmente a dare

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (2.8)$$

A seconda del segno di  $r = \beta - \mu$ , la popolazione cresce o si estingue con ritmo esponenziale, o rimane costante se  $r = 0$ .

Proviamo a rilassare alcune delle ipotesi. Immaginiamo di voler considerare gli effetti che la popolazione ha sul suo stesso habitat. Possiamo considerare il parametro di Malthus  $r$  come una funzione del numero di individui nella popolazione  $r = r(N)$ , ottenendo quindi l'equazione

$$N'(t) = r(N(t)) N(t) \equiv F(N(t)). \quad (2.9)$$

Un esempio tipico di funzione  $r$  è quello utilizzato per descrivere l'*effetto logistico*. A parole questo si può descrivere dicendo che siccome le risorse sono limitate, all'aumentare della popolazione l'habitat ha difficoltà a supportare la popolazione e quindi vediamo una diminuzione nella fertilità e un'aumento nella mortalità. Questi effetti sono la conseguenza della competizione *intra-specifica*. Matematicamente:

$$r'(N) < 0, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} r(N) < 0. \quad (2.10)$$

Il modo più semplice per trattare questo fenomeno è assumere che la fertilità diminuisca e la mortalità aumenti in modo lineare con il numero di individui:

$$\left. \begin{array}{l} \beta(N) = \beta - \tilde{\beta} N \\ \mu(N) = \mu + \tilde{\mu} N \end{array} \right\} \implies r(N) = \beta(N) - \mu(N) = r - \alpha N, \quad (2.11)$$

with  $\tilde{\beta}, \tilde{\mu}$  e quindi  $\alpha$  costanti non negative. Allora abbiamo l'equazione di Verhulst (1838) (e equazione logistica)

$$N'(t) = r \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t), \quad (2.12)$$

con condizione iniziale  $N(0) = N_0$ . Il parametro  $K = r/\alpha$  è detto capacità portante.

Imponiamo la condizione iniziale  $N(0) = N_0 \neq K$  (vediamo che per  $N(t) = K$  abbiamo una soluzione costante, che possiamo chiamare la soluzione di equilibrio). In questo caso il problema di Cauchy ha

la soluzione esplicita

$$N(t) = K \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}, \quad (2.13)$$

da cui vediamo che nel limite  $t \rightarrow +\infty$ ,  $N(t) \rightarrow K$ . Questo modello ha un andamento interessante al variare di  $N_0$  e  $K$ .  $\square$

Consideriamo uno stato iniziale del sistema e pensiamo di osservarne la sua evoluzione nel tempo: questa operazione definisce una *traiettoria* o *orbita* del sistema dinamico

$$\Gamma_x = \{\varphi_t(x), \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (2.14)$$

Similmente parliamo di orbita nel futuro o nel passato se  $t \geq 0$  o  $t \leq 0$ .

L'esempio più semplice di un'orbita è un *punto di equilibrio* o *punto critico*, per il quale l'orbita consiste di un punto solo  $\Gamma = \{x\}$ . Un'orbita periodica invece è una curva chiusa, che possiamo pensare come un'immersione del cerchio,  $\gamma : S^1 \rightarrow M$ . In particolare un'orbita periodica ha un periodo  $T$ , vale cioè  $\varphi_T(x) = x$ . Orbite possono anche essere aperiodiche, quasi-periodiche o caotiche, come vedremo in seguito.

La generalizzazione del concetto di orbita è quella di un *insieme invariante*, un insieme  $\Lambda$  tale che  $\varphi_t(\Lambda) = \Lambda$  per ogni  $t$ . In particolare diciamo che un insieme  $\Lambda$  è *invariante in avanti* se  $\varphi_t(\Lambda) \subset \Lambda$  per ogni  $t > 0$ . Questo significa che per tutti i dati iniziali contenuti in  $\Lambda \subset M$ , l'evoluzione del sistema si manterrà dentro  $\Lambda$ .

La legge di evoluzione  $\varphi_t$  è determinata risolvendo l'equazione differenziale (2.1). Tuttavia è utile utilizzare un approccio più geometrico e definire la legge di evoluzione in astratto, senza far riferimento all'equazione differenziale.

**Definizione 2.15.** *Sia  $M$  lo spazio delle fasi, dotato di struttura di varietà differenziabile. Un flusso (completo) è una famiglia a un parametro di diffeomorfismi  $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tale che*

1.  $\varphi_0(x) = x$
2.  $\forall t \in \mathbb{R}$  si ha  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$

La seconda proprietà in particolare dà la struttura di un gruppo additivo alla famiglia di diffeomorfismi. In particolare  $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \text{id}$  e  $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ . Notiamo in particolare che questa proprietà implica che le traiettorie non si possono intersecare: infatti supponiamo  $\varphi_s(x) = \varphi_t(z)$ ; allora abbiamo che  $\varphi_{s+r}(x) = \varphi_{t+r}(z)$  per ogni  $r \in \mathbb{R}$  e le due traiettorie coincidono. Similmente parliamo di *semi-flusso* se abbiamo  $t \geq 0$  per il parametro temporale. In questo caso non esiste l'inversa e abbiamo solo la struttura di semi-gruppo.

Da questo punto di vista ogni punto della traiettoria di un sistema dinamico può essere visto come una condizione iniziale.

Dalle proprietà del flusso possiamo ricavare l'equazione differenziale (2.1).

**Definizione 2.16.** *Un campo vettoriale su  $M$  è una funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  che ad ogni punto dello spazio delle fasi  $x \in M$  associa un vettore  $v = x(t)$ .*

Il campo vettoriale associato ad un flusso  $\varphi$  è definito da

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \right|_{t=0} \quad (2.17)$$

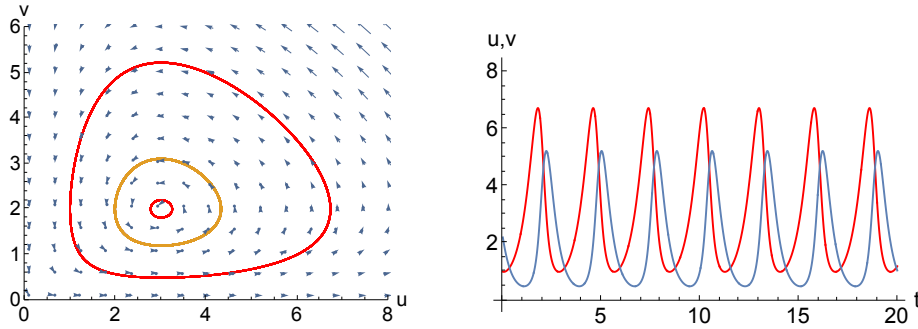


Figura 1: Sinistra: traiettorie e campo vettoriale nel modello di Lotka-Volterra. A destra: andamento periodico delle popolazioni di prede e predatori.

In particolare segue da  $\varphi_t(x_0) = x(t)$  che  $\varphi_t(x)$  è soluzione del problema ai dati iniziali

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0)) \quad \varphi_0(x_0) = x_0 \quad (2.18)$$

**Esempio: il modello di Lotka-Volterra** Adesso consideriamo modelli in cui due specie convivono nello stesso habitat e la prima specie  $u$  (preda) costituisce la principale risorsa di sostentamento della seconda specie  $v$  (predatore). Assumiamo che in assenza di predatori la specie  $u$  abbia una crescita Malthusiana, con tasso  $r > 0$ . D'altra parte senza prede, la specie  $v$  si estinguerebbe con un tasso  $-\mu < 0$ ; quindi la sopravvivenza dei predatori dipende dall'abbondanza di prede.

Scriviamo il modello di Lotka-Volterra come

$$\begin{cases} u'(t) = r u(t) - a u(t) v(t) = (r - a v(t)) u(t) \\ v'(t) = -\mu v(t) + \gamma a u(t) v(t) = (-\mu + \gamma a u(t)) v(t) \end{cases}, \quad (2.19)$$

dove il termine  $a u(t) v(t)$  conta il numero di prede uccise dai predatori nell'unità di tempo, mentre  $\gamma a u(t) v(t)$  è il numero di nuovi predatori nell'unità di tempo. Quest'ultimo termine merita un commento: il parametro  $\gamma$  ha il ruolo di misurare quanto è efficiente il meccanismo di convertire l'uccisione delle prede in nuovi predatori, e agisce come "premio" che incentiva la popolazione di predatori a uccidere più prede. Chiamiamo  $d = \gamma a$ . Il modello ha senso per  $u \geq 0$  e  $v \geq 0$ . Come esempio riportiamo in figura 2.19 il campo vettoriale ed alcune traiettorie (in questo caso periodiche) del modello, ottenute numericamente. Notiamo la differenza tra studiare l'andamento del sistema nello spazio delle fasi, e studiare l'andamento delle soluzioni  $u$  e  $v$  in funzione del tempo.  $\square$

**Sistemi dinamici a tempo discreto.** Possiamo anche assumere che il tempo sia una variabile discreta. In questo caso abbiamo la legge di evoluzione

$$x_{t+1} = \varphi(x_t) \quad (2.20)$$

Equivalentemente possiamo dire che lo stato al tempo  $t$  è determinato dallo stato al tempo  $t = 0$  dall'iterazione

$$x_t = \varphi^t(x_0) \quad (2.21)$$

Un caso particolare di sistema dinamico a tempo discreto si ottiene da un sistema dinamico a tempo continuo, osservandolo solo a determinati istanti, o quando una variabile assume un particolare valore. Vedremo esempi più avanti.

**Esempio: l'equazione logistica discreta.** Il modello logistico discreto è dato dalla mappa iterata

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (2.22)$$

con  $\lambda > 0$ .  $\square$

### 3 Richiami sulla teoria delle equazioni differenziali ordinarie

Consideriamo un'equazione differenziale ordinaria in  $\mathbb{R}^n$ , oppure in  $D \subset \mathbb{R}^n$ , dominio aperto. Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine (in forma normale) ha la struttura

$$\frac{d}{dt} x(t) \equiv x'(t) = f(t, x(t)) \quad (3.1)$$

dove  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f = (f_1, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La funzione  $f$  è un esempio di campo vettoriale su  $\mathbb{R}^n$ . Nel caso in cui  $f$  non dipenda esplicitamente dal tempo

$$\frac{d}{dt} x(t) \equiv \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (3.2)$$

abbiamo un sistema *autonomo*.

Per equazioni differenziali ordinarie valgono risultati di esistenza e unicità.

**Definizione 3.3.** Una funzione  $f$  si dice localmente lipschitziana se  $\exists \lambda > 0$  (la costante di Lipschitz) tale che  $\forall x, y \in D$  con  $\|x - y\|$  sufficientemente piccolo (i.e.  $x, y \in U$ , con  $U \subset D$  aperto), si ha

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \quad (3.4)$$

Ad esempio la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  non è lipschitziana su  $\mathbb{R}$ , perché in zero diventa infinitamente ripida (visto che la derivata va a infinito).

Per funzioni lipschitziane vale il teorema di Cauchy

**Teorema 3.5.** Se  $f$  è localmente lipschitziana sin  $D$ , allora  $\forall x_0 \in D$  esiste un intervallo  $(\tau_0, \tau_1)$  con  $\tau_0 < 0 < \tau_1$ , e un'unica soluzione  $x(t)$  dell'equazione

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (3.6)$$

definita per  $t \in (\tau_0, \tau_1)$  e tale che  $x(0) = x_0$ .



Vale la pena ricordare qual'è il senso dell'ipotesi: il problema di Cauchy è equivalente all'equazione integrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (3.7)$$

Il lato destro dell'equazione definisce un operatore  $T[y(t)]$ . Allora la condizione che  $f$  sia Lipschitziana implica che l'operatore  $T$  è una contrazione, che per il principio di Banach ha un solo punto fisso  $T[y] = y$ , soluzione (quindi unica) dell'equazione integrale.

Una conseguenza importante di questo teorema è che possiamo "etichettare" le soluzioni dell'equazione differenziale usando i dati iniziali, scrivendo quindi  $x(t; x_0)$ .

Una volta che abbiamo trovato una soluzione locale del problema di Cauchy, il passo successivo è naturalmente quello di cercare soluzioni definite in un intorno più ampio. Risultati di esistenza e unicità globali sono più complicati e interessanti. Ad esempio una condizione che determina esistenza e unicità globali è che la funzione  $f$  sia *globalmente* lipschitziana in un dominio  $\Omega$ , cioè localmente lipschitziana in ogni punto di  $\Omega$ .

In generale, il problema ai dati iniziali ha un intervallo massimo di esistenza, definito come l'intervallo massimo che include l'istante iniziale  $t_0$  e sul quale la soluzione  $x(t)$  esiste ed è unica. Questo intervallo è un aperto di forma  $J = (\alpha, \beta)$ . Questo intervallo può coincidere con  $\mathbb{R}$  e spesso assumeremo che questo sia il caso.

Possiamo usare la notazione  $x(t; x_0) = \varphi^t(x_0)$ , definendo una mappa  $\varphi^t : D \rightarrow D$  che ad ogni punto  $x$  di  $D$  associa il punto in cui si trova la soluzione al tempo  $t$ . Possiamo considerare interamente la dipendenza temporale e definire l'insieme  $\varphi = \{\varphi^t; t \in \mathbb{R}\}$  detto *flusso*: può essere pensato come dovuto ad un fluido che scorre nello spazio delle fasi. Il flusso non è limitato ad un solo punto, ma possiamo pensare di seguire l'evoluzione di interi insiemi:  $\varphi(A) = \bigcup_{x \in A} \varphi^t(x)$ .

Una conseguenza importante del teorema di Cauchy è

**Corollario 3.8.** *Traiettorie distinte di un sistema autonomo non possono mai intersecarsi.*

In particolare, se ricordiamo che  $\varphi^t(x_0) = x(t; x_0)$ , verifichiamo immediatamente che  $\varphi^t$  definisce un gruppo commutativo ad un parametro

- $\varphi^{-t}(\varphi^t(x)) = x$
- $\varphi^{t+s}(x) = \varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^s(\varphi^t(x))$

Se consideriamo solo valori  $t \geq 0$ , troviamo la struttura di semi-gruppo.

Ricordiamo adesso che equazioni differenziali dipendono in maniera continua dai dati iniziali e dai parametri. Abbiamo il seguente

**Teorema 3.9.** *Consideriamo l'equazione differenziale  $\dot{x} = f(x)$ . Allora per ogni  $t$  fissato la soluzione  $\varphi^t(x)$  è una funzione regolare di  $x$  (nella stessa classe di regolarità di  $f$ ). Se  $f$  è almeno  $C^1$ , allora esistono delle costanti positive  $C$  e  $\lambda$  tali che*

$$\|\varphi^t(y) - \varphi^t(x)\| < C e^{\lambda|t|} \|y - x\| \quad (3.10)$$

Un risultato analogo vale per i parametri

**Proposizione 3.11.** Consideriamo  $\dot{x} = f(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  dipendente dai parametri  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ,  $k \geq 1$ . La soluzione  $\varphi^t(x; \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  per ogni  $t$  fissato, è una funzione regolare di  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  con la stessa classe di regolarità di  $f$

Questo risultato segue dal teorema precedente, se immaginiamo di estendere il sistema di equazioni differenziali ad  $\mathbb{R}^{n+k}$  considerando le  $\alpha_i$  come variabili soggette alle equazioni banali  $\dot{\alpha}_i = 0$ , cioè interpretandole come condizioni iniziali.

Notiamo che questi risultati valgono ad ogni istante  $t$  fissato. L'equazione

$$\|\varphi^t(y) - \varphi^t(x)\| < C e^{\lambda|t|} \|y - x\| \quad (3.12)$$

implica che la continuità vale a  $t$  fissato ma non c'è uniformità in  $t$ . Anzi la perdita di uniformità è esponenziale. In particolare l'andamento asintotico per  $t \rightarrow \infty$  non mantiene la continuità al variare del dato iniziale o dei parametri. Ad esempio l'oscillatore armonico smorzato

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.13)$$

ha soluzioni

- $x(t) = a e^{-\mu_1 t} + b e^{-\mu_2 t}$  con  $\mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} > 0$  per  $\mu > \omega$ ,
- $x(t) = e^{-\mu t} (a \cos \sigma t + b \sin \sigma t)$  con  $\sigma = \sqrt{\omega^2 - \mu^2} > 0$  per  $\mu < \omega$ ,
- $x(t) = (a + bt) e^{-\mu t}$  per  $\mu = \omega$ .

e al variare di  $\mu$  il comportamento asintotico cambia.

Concludiamo con alcuni commenti.

- Un'equazione differenziale ordinaria di ordine  $n$  può sempre essere ridotta a un sistema di  $n$  equazioni differenziali del primo ordine
- Un'equazione non autonoma  $\dot{x} = f(x, t)$  si può rendere autonoma passando al sistema allargato

$$\dot{x} = f(x, s) \quad (3.14)$$

$$\dot{s} = 1 \quad (3.15)$$

con condizione iniziale  $s_0 = 0$ , in modo che  $s(t) = t$ . Allora le stesse proprietà dei sistemi autonomi valgono in  $D_{\text{ext}} = D \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , ma attenzione: le traiettorie non si intersecano in  $D_{\text{ext}}$  ma si possono intersecare in  $D$  (anche se moti diversi non possono passare nello stesso punto di  $D$  allo stesso istante).

## 4 Generalità sulle varietà differenziabili

Lavoreremo quasi sempre su  $\mathbb{R}^n$  ma conviene avere una prospettiva più generale. Una varietà differenziabile è uno spazio che localmente assomiglia ad  $\mathbb{R}^n$ . Ad esempio la 2-sfera  $S^2$ , data da  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Prima di arrivare alla definizione di varietà differenziabile, partiamo da quella di *spazio topologico*: un insieme  $X$  e una famiglia di sottoinsiemi aperti  $U$  tale che

- $X$  e  $\emptyset$  sono aperti

- se  $U, V \subseteq X$  sono aperti, lo è anche la loro intersezione  $U \cap V$
- se  $U_\alpha \subseteq X$  sono aperti, lo è anche la loro unione  $\bigcup_\alpha U_\alpha$

Questo insieme di aperti costituiscono la topologia di  $X$ . Un aperto  $U \ni x$  si dice intorno di  $x$ . Adesso che abbiamo definito una topologia su  $X$  possiamo definire funzione continue (che intuitivamente mandano punti “vicini” in punti “vicini”). Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra due spazi topologici (eventualmente coincidenti) si dice continua se  $\forall U \subseteq Y$  aperto, anche  $f^{-1}U \subseteq X$  è un aperto. Una collezione di aperti  $U_\alpha$  tale che  $\bigcap U_\alpha = X$  è detta un ricoprimento di  $X$ . Una carta è una funzione continua  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con inversa continua. Nella carta  $U$  la nostra varietà assomiglia a  $\mathbb{R}^n$ , nel senso che data una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , questa definisce una funzione su  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale è uno spazio topologico  $M$  con delle carte  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che le funzioni di transizione  $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$  sono di classe  $C^\infty$  ove definite. Questa collezione di carte definisce un atlante.

Il significato di questa definizione è che due osservatori su due carte diverse,  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\psi_\beta : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$  possono comparare i loro risultati sull'intersezione  $V = U_\alpha \cap U_\beta$  come

$$f \circ \psi_\beta^{-1} = (f \circ \psi_\alpha^{-1}) \circ (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}) \quad (4.1)$$

## 5 Campi vettoriali

Anche in questo caso non avremo bisogno di tutta la teoria, ma conviene essere più generali. Se prendiamo il caso di  $\mathbb{R}^n$ , un campo vettoriale associa ad ogni punto un vettore. Un altro modo di pensare ad un campo vettoriale è attraverso la derivata direzionale di una funzione  $f$  in direzione di un campo  $v$

$$v(f) = v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} f = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} f + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} f \quad (5.1)$$

Possiamo pensare al campo vettoriale come ad un operatore differenziale  $v = v^\mu \partial_\mu$ . Questo punto di vista è più utile su varietà differenziabili.

Prendiamo una varietà  $M$  e consideriamo  $C^\infty(M)$ , l'algebra delle funzioni  $C^\infty$  su  $M$ . Si può dimostrare che si tratta di un'algebra commutativa sui reali (dove somma e moltiplicazione sono definite punto per punto). Allora definiamo un campo vettoriale come una funzione da  $C^\infty(M)$  a  $C^\infty(M)$  tale che

$$v(f + g) = v(f) + v(g) \quad (5.2)$$

$$v(\alpha f) = \alpha v(f) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

$$v(fg) = v(f)g + f v(g) \quad (5.4)$$

In particolare l'ultima proprietà (di Leibniz) richiama il comportamento delle derivate. Questa definizione è indipendente dalle coordinate; il prezzo che paghiamo è avere una definizione astratta.

I campi vettoriali su  $M$  appartengono all'insieme  $\text{Vect}(M)$ , dove definiamo

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f) \quad (5.5)$$

$$(g v)(f) = g v(f) \quad (5.6)$$

per  $f, g \in C^\infty(M)$ .

Si può verificare che valgono le seguenti proprietà

$$f(v + w) = f v + f w \quad (5.7)$$

$$(f + g)v = f v + g v \quad (5.8)$$

$$(f g)v = f(g v) \quad (5.9)$$

$$1 v = v \quad (5.10)$$

dove 1 è la funzione costante uguale a 1 su tutto  $M$ . In un linguaggio più formale, queste proprietà fanno di  $\text{Vect}(M)$  un modulo su  $C^\infty(M)$ .

Ad esempio, se prendiamo  $M = \mathbb{R}^n$  si può dimostrare che  $\text{Vect}(\mathbb{R}^n)$  è generato dai vettori  $\{\partial_\mu\}$ , nel senso che questi vettori sono linearmente indipendenti e ogni vettore  $v$  può essere espresso come combinazione lineare  $v^\mu \partial_\mu$ .

Utilizzeremo questo formalismo per definire vettori tangenti. Un vettore tangente a  $p \in M$  dovrebbe darci la derivata direzionale al punto  $p$ . Allora definiamo  $v_p : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dato da  $v_p(f) = v(f)(p)$ , cioè la funzione  $v(f)$  calcolata in  $p$ . Allora segue dalla definizione di campo vettoriale che

$$v_p(f + g) = v_p(f) + v_p(g) \quad (5.11)$$

$$v_p(\alpha f) = \alpha v_p(f) \quad (5.12)$$

$$v_p(f g) = v_p(f) g(p) + f(p) v_p(g) \quad (5.13)$$

Allora definiamo un vettore tangente a  $p \in M$  come una funzione  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le proprietà appena elencate.

L'insieme di tutti i vettori tangenti a  $p \in M$  è detto lo spazio tangente  $T_p M$ . Quindi per ogni  $p \in M$ , un campo vettoriale  $v \in \text{Vect}(M)$  determina un vettore tangente  $v_p \in T_p M$ . Si può dimostrare che lo spazio tangente ha struttura di spazio vettoriale, presi due vettori tangenti  $v, w \in T_p M$

$$(v + w)(f) = v(f) + w(f) \quad (5.14)$$

$$(\alpha v)(f) = \alpha v(f) \quad (5.15)$$

Notiamo che lo spazio tangente  $T_p M \simeq \mathbb{R}^n$  come spazio vettoriale, e quindi un campo vettoriale può essere visto come una funzione  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$

Per avere un'intuizione geometrica sullo spazio tangente, consideriamo una curva, cioè una funzione liscia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ . Un vettore tangente alla curva nel punto  $\gamma(t)$  è un elemento di  $T_{\gamma(t)} M$  che denotiamo con  $\dot{\gamma}(t)$ . Lo definiamo come quella funzione  $C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  che ad una funzione  $f$  associa

$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))$ . A parole il vettore tangente  $\dot{\gamma}(t)$  è quel vettore che deriva le funzioni nella direzione in cui  $\gamma(t)$  si muove al tempo  $t$ . Useremo le notazioni  $\dot{\gamma}(t)$  o  $\frac{d\gamma}{dt}$ .

Ad esempio se parametrizziamo la curva con funzioni  $x^i(t)$  possiamo scrivere esplicitamente il vettore tangente

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} f(x^1(t), \dots, x^n(t)) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (5.16)$$

Un esempio tipico di campo vettoriale è il campo delle velocità  $v$  di un fluido. Se immaginiamo che il campo delle velocità sia costante nel tempo, ogni molecola del fluido traccia una curva  $\gamma(t)$  il cui vettore tangente coincide con  $v$  al punto  $\gamma(t)$ . Se la curva  $\gamma(t)$  con

$$\frac{d\gamma}{dt} = v_{\gamma(t)} \quad (5.17)$$

esiste per ogni  $t$  la chiamiamo curva integrale di  $v$  e diciamo che  $v$  è integrabile.

## A Esempi di equazioni differenziali

Vediamo adesso qualche esempio di equazioni differenziali del primo ordine.

**Equazioni separabili.** Supponiamo di avere

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)g(y). \quad (A.1)$$

Questa equazione si dice *separabile* (e nel caso  $f(x) = 1$  parliamo di sistema autonomo). La soluzione si ricava da

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad (A.2)$$

dove  $C$  è una costante e abbiamo assunto che la funzione  $g$  non si annulli nel dominio di integrazione. Prendiamo ad esempio  $y' = 2xy$  con condizione iniziale  $y(0) = 2$ . Allora

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx 2x + C, \quad (A.3)$$

da cui  $\ln|y| = x^2 + C$  che possiamo riscrivere come  $y(x) = A e^{x^2}$ . Imponendo la condizione iniziale  $y(x) = 2 e^{x^2}$

**Equazioni lineari.** Consideriamo

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \quad (A.4)$$

Per risolvere questa equazione scriviamola come una derivata totale

$$\frac{d}{dx} (\mu(x) y(x)) = \mu(x)q(x). \quad (A.5)$$

Per che scelta di  $\mu$  questa equazione coincide con (A.4)? Esplicitamente

$$\mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) = \mu(x)q(x). \quad (\text{A.6})$$

Se moltiplichiamo (A.4) per  $\mu(x)$  troviamo la condizione su  $\mu$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x) \implies \mu(x) = \exp \int^x p(\zeta)d\zeta. \quad (\text{A.7})$$

Allora la soluzione di (A.4) è data da

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int^x \mu(\zeta)q(\zeta)d\zeta + C \right). \quad (\text{A.8})$$

Vediamo un esempio:  $xy' + y = x$  con  $x > 0$  e  $y(1) = 0$ . Se la riscriviamo come

$$y' + \frac{1}{x}y = 1, \quad (\text{A.9})$$

troviamo

$$\mu(x) = \exp \int^x \frac{1}{\zeta}d\zeta = x \quad (\text{A.10})$$

e quindi

$$y = \frac{1}{x} \left( \int^x d\zeta\zeta + C \right) = \frac{1}{x} \left( \frac{x^2}{2} + C \right) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}. \quad (\text{A.11})$$

### Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti costanti.

Supponiamo di avere un operatore lineare  $L$  corrispondente all'equazione differenziale

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = 0 = L[y]. \quad (\text{A.12})$$

Questa equazioni ha soluzioni esponenziali. Prendiamo l'ansatz  $y(t) = e^{rt}$ . Sostituendo vediamo che il nostro ansatz è effettivamente soluzione se  $r$  soddisfa  $ar^2 + br + c = 0$ . Vediamo ad esempio i seguenti casi

1. Radici reali e distinte:  $y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ .
2. Radici reali e uguali<sup>1</sup>:  $y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{rt}$ .
3. Radici complesse coniugate:  $r = \alpha \pm i\beta$ ,  $y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$ .

Se l'equazione differenziale contiene un termine non omogeneo  $g$ , per risolverla dobbiamo sommare una soluzione generale ad una soluzione particolare. Vediamo perché. Adesso la nostra equazione è  $L[y] = g$ . Supponiamo di avere due soluzioni particolari  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$ , cioè  $L[\bar{y}_1] = g$  e  $L[\bar{y}_2] = g$ . Allora per linearità  $L[\bar{y}_1 - \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] - L[\bar{y}_2] = 0$  risolve l'equazione omogenea. Allora deve essere  $\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ , e cioè  $\bar{y}_1 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \bar{y}_2$ . A parole ogni soluzione dell'equazione

<sup>1</sup>L'intuizione dietro al termine lineare in  $t$  viene dal fatto che le due soluzioni devono essere funzionalmente indipendenti, cioè  $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$  solo quando i coefficienti si annullano. Questo è equivalente a dire che il rapporto  $y_1/y_2$  non è una costante. Quindi l'ansatz più semplice per trovare la seconda soluzione è prendere  $y_2 = t y_1$ .

non omogenea ha la forma di una soluzione generale dell'equazione omogeneo più una soluzione particolare.

## **Approfondimenti**

- Benettin *Una passeggiata tra i sistemi dinamici* dispense
- J. Baez, J. Muniain *Gauge fields, knots and gravity* Scientific - ISBN 9810217293