DEFINIZIONE LAVORO

$$\mathcal{L} = \bar{F} \cdot \bar{\Delta s}$$

$$\mathcal{L} = \int \bar{F} \cdot d\bar{s}$$ ⇝ Per una traiettoria generica

$$F = (F_x, F_y, F_z)$$

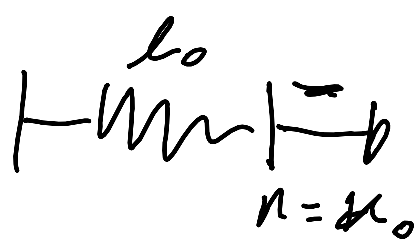
$$\Delta S = (\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z)$$

$$\mathcal{L} = \boxed{F_x \Delta S_x + F_z \Delta S_z + F_y \Delta S_y}$$ ⇝

Lavoro forza elastica:

$$\mathcal{L} = \int -kx\,dx = -k\int x\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$F_{el} = -kx$$



⇝ $F_{el} = -k(x - x_0)$

Conservazione dell'energia

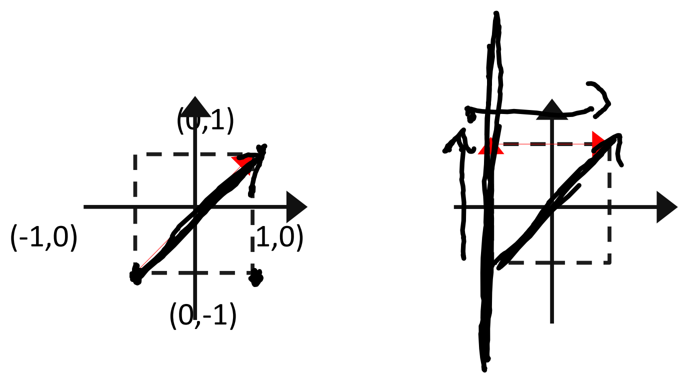
$$U + K = \text{cost}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

ESERCIZIO 1.

Un punto materiale, poggiato su una superficie piana priva di attrito, è soggetto ad un campo di forze: $F_x = 0$; $F_y = kx$ (con k costante). Calcolare il lavoro del campo di forze per gli spostamenti in figura.



$x = y$

$$\mathcal{L} = \cancel{\int_{-1}^{1} F_x\, dx} + \int_{-1}^{1} F_y\, dy = \int_{-1}^{1} k y\, dy =$$

$$= k \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{k}{2}\left(1-(-1)^2\right) = 0$$

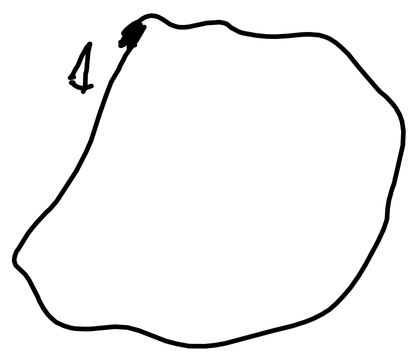
$x = -1$

$$\mathcal{L} = \int_{-1}^{1} F_y\, dy + \cancel{\int_{-1}^{1} F_x\, dx} = -\int_{-1}^{1} k\, dy = -k y\Big|_{-1}^{1}$$

$$-\int_{-1}^{1} k \, dy = -ky \Big|_{-1}^{1} = -k(1) - [+k(-1)] =$$

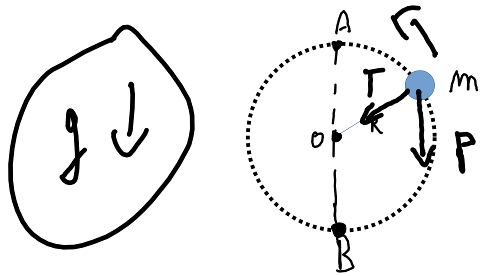
$$= \underline{-2k}$$

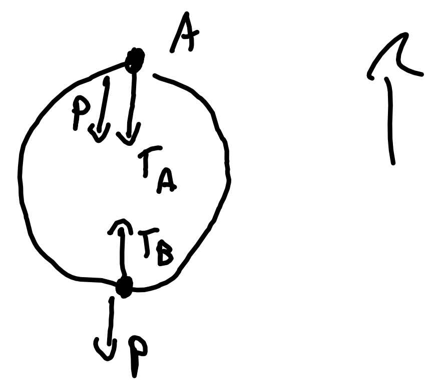
$$\oint \bar{F} \, d\bar{s} = 0$$



Esercizio 2.

Un punto materiale di massa m, collegato ad un punto fisso da una fune inestensibile (di massa trascurabile) di lunghezza R, ruota su una traiettoria circolare verticale. Determinare la differenza tra la tensione della fune nel punto più basso (B) e più alto (A) della traiettoria.





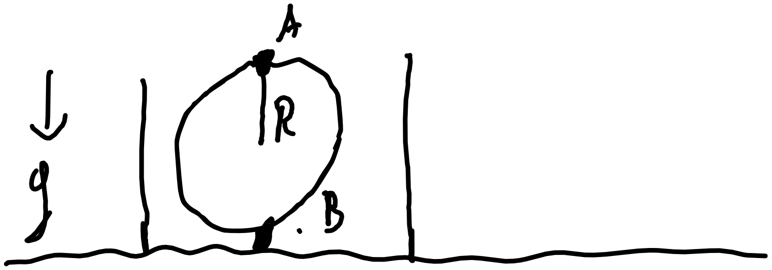
$$\begin{cases} -mg - T_A = -m\dfrac{v_A^2}{R} \\[2ex] -mg + T_B = m\dfrac{v_B^2}{R} \end{cases}$$

$T_B - T_A$

$$T_B - T_A - 2mg = \frac{m}{R}\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$T_B - T_A - 2mg = \frac{m}{R}\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$

$$T_B - T_A = 2mg + \frac{m}{R}\left(v_B^2 - v_A^2\right)$$



$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 + 2\cancel{m} g R = \frac{1}{2}\cancel{m} v_B^2$$

$$v_A^2 + 4gR = v_B^2 \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = 4gR$$

$$T_B - T_A = 2mg + \frac{m}{\cancel{R}} 4g\cancel{R} = 6mg$$

Esercizio 3

Un corpo di massa m è messo in moto da una molla di costante elastica K. Il corpo scorre lungo la guida in figura costituita da un tratto orizzontale AB e da un semicerchio verticale BCD di raggio R. Nel punto C la guida ha uno sportello che si apre verso l'esterno se sollecitato da una forza F. Determinare:

a) La compressione minima della molla affinché il corpo arrivi al punto C

b) La compressione massima della molla per cui il corpo scivola sullo sportello senza aprirlo

c) la compressione minima della molla affinché il corpo arrivi in C, se su un tratto orizzontale di lunghezza d c'è attrito con coefficiente μ_k

(per la soluzione numerica considerare $g=10\ m/s^2$, $m=0.1$ kg, $R=1m$, $k=3x10^4\ Nm^{-1}$, $F=1N$, $d=3$ m, $\mu_k=1/6$)

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = m g R \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{2 m g R}{k}}$$

$$N = m a = m \frac{v_c^2}{R} = F \Rightarrow v_c^2 = \frac{R F}{m}$$

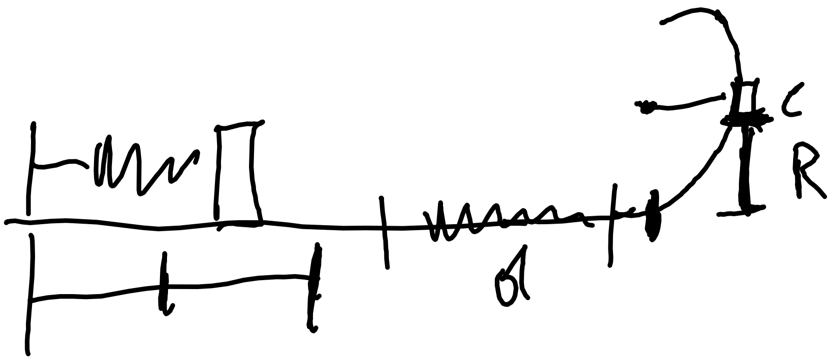
$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = mgR + \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{RF}{\cancel{m}}$$

$$k \Delta x^2 = 2mgR + RF$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2mgR + RF}{k}}$$

$$F_{att} = \mu_k m g$$

$$\mathcal{L}_{F_{att}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \underline{\mu_k m g d}$$



1) $$k\,\underline{\Delta x}^2 = m\,\underline{v_i}^2 \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m(2gR + 2\mu_k g d)}{k}}$$

2) $$-\mu_k m g d = \frac{1}{2} m \underline{v_f}^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

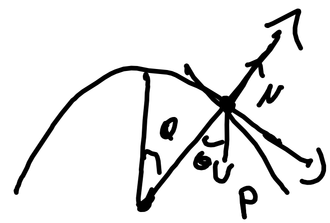
3) $$\frac{1}{2}\cancel{m} v_f^2 = \cancel{m} g R \Rightarrow v_f^2 = 2gR$$

$$-2\mu_k \cancel{m} g d = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}\cdot 2gR - \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m} v_i^2$$

$$v_i^2 = 2gR + 2\mu_k g d$$

Esercizio 4

Una pietra di massa m = 3kg è posta sulla sommità di una calotta sferica (perfettamente liscia) di raggio R=10 m. La pietra ha velocità iniziale v_0=5 m/s, determinare la coordinata angolare θ del punto in cui la pietra si stacca dalla superficie. Esiste un valore di v_0 per il quale la pietra non si distacca dalla superficie? Quale deve essere il valore minimo di v_0 affinché la pietra si distacchi dalla superficie fin dal punto iniziale?



$$\cancel{N} + \cancel{m} g \cos\theta = +\cancel{m}\frac{v_B^2}{R}$$

$$2mgR + \cancel{\tfrac{1}{2}} m v_0^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m v_B^2 + 2mgR\cos\alpha$$

$$2\cancel{m}gR(1-\cos\alpha) + \cancel{m}v_0^2 = \cancel{m}v_B^2$$

$$3g\cos\theta = \frac{v_0^2}{R} + 2g$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3g}\left(\frac{v_0^2}{R} + 2g\right) = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}$$

$$g\cos\theta = \frac{v_B^2}{R}$$

$$g\cos\theta = \frac{v_0^2}{R} + \frac{1}{\cancel{R}}\, 2g\cancel{R}(1-\cos\theta)$$

$$g\cos\theta = \frac{v_0^2}{R} + 2g - 2g\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3g}\left(\frac{v_0}{R} + 2g\right) = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\frac{v_0^2}{\cancel{3}gR} + \frac{2}{\cancel{3}} = 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{\cancel{0}} = -2gR$$

$$\boxed{\frac{v_0^2}{3gR} + \frac{2}{3} = 1}$$