

# LOOPS E POTENZE DI $\hbar$

[17.6.2.1]

L'espansione in numero di loops equivale all'espansione in potenze di  $\hbar$ .

$\overset{1}{\Rightarrow}$  Il "livello albero" (zero loop) equivale al limite classico,

$\overset{2}{\Rightarrow}$  Studiare effetti a 1 o più loop equivale a studiare effetti quantistici della teoria.

## DIMOSTRAZIONE

def. Il "numero di loop" è definito come il numero di momenti indeterminati in un diagramma.

Dato un diagramma:

- ogni propagatore interno contribuisce con  $\int d^4 k_i$
- ogni vertice con una  $\delta^4(\sum_j k_j)$
- una  $\delta^4(k_i - k_f)$  corrisponde alla conservazione del momento globale

$$\Rightarrow L = P - V + 1$$

$L$ : # loop  
 $P$ : # propagatori interni  
 $V$ : # vertici

- Reintroducendo  $\hbar$  nell'integrale sui cammini:

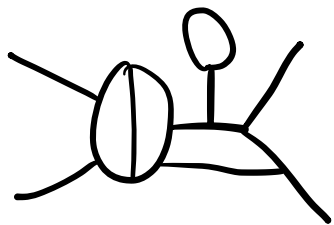
$$Z[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\varphi e^{\frac{i}{\hbar}(S[\varphi] + \langle \mathcal{J}\varphi \rangle)}$$

- Ogni propagatore (interno o esterno) ha una potenza  $D(x-y) \sim \hbar^1$  dato che è l'inverso del termine cinetico o dato che  $[\varphi(x), \pi(y)] = i\hbar \delta^3(x-y)$

- Ogni vertice è pesato da  $\hbar^{-1}$ :

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_{int}\left(-i\frac{\delta}{\delta \mathcal{J}}\right)\right)$$

- Dato un diagramma, la potenza in  $\hbar$



$$\sim \hbar^D$$

$$D = E + P - V \quad \downarrow L = P - V + 1$$

$$D = E + L - 1$$

$\Rightarrow$  Fissata una funzione di Green ( $E$  fissato) la potenza di  $\hbar$ ,  $D$ , cresce col nr. di loop  $L$ .

# DIVERGENZE IN TEORIA DEI CAMPI [S. 15.4]

In genere, calcolando ampiezze ad ordini superiori in teoria delle perturbazioni, si incontrano DIVERGENZE.

Esempio

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Calcoliamo l'ampiezza di scattering  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ .

**LIVELLO ALBERO:** Tutti i momenti nei propagatori interi, se presenti, sono fissati in termini dei momenti degli stati iniziali e finali.

$$iM_1 = \begin{array}{c} \downarrow p_1 \quad \downarrow p_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \\ \uparrow p_2 \quad \uparrow p_1 \end{array} = -i\lambda$$

**A UN LOOP:** Adesso c'è un momento libero:  $k$

$$iM_2 = \begin{array}{c} \downarrow p_1 \quad \downarrow p_2 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{loop} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \uparrow p_2 \quad \uparrow p_1 \end{array} + \dots = (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots$$

fattore di simmetria
integrale del loop

per  $p \ll k$  ( $|k_f| \gg |p_f|$ )

$$iM_2 \sim \lambda^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^4} \sim \lambda^2 \int_0^{\Lambda} \frac{dk}{k} \sim \lambda^2 \ln \Lambda$$

$\Lambda \leftarrow \text{cutoff}$

È divergente per  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

• Come possiamo dar senso a questi calcoli?

⇒ la soluzione sta nel fatto che i singoli diagrammi divergenti **NON SONO OSSERVABILI**.

Introduciamo quindi:

- un **REGOLATORE** (tipo  $\Lambda$ ) che rende il conto finito
- una procedura per esprimere **PREVISIONI** in termini di altre osservabili (**RINORMALIZZAZIONE**)

Alla fine del conto si rimuove il regolatore ( $\Lambda \rightarrow \infty$ ) ed il risultato deve essere **INDIPENDENTE** dal regolatore.

Calcoliamo  $iM_2$  nel caso  $m=0$  (ci sono anche diagrammi t, s)

$$iM_2 = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 (p-k)^2} \quad \leftarrow \begin{array}{l} e^- \text{ uno scalare quindi pu\`o} \\ \text{dipendere solo da } p^2 = s \end{array}$$

Ci aspettiamo  $iM_2 \sim \lambda^2 \log \frac{s}{\Lambda^2}$

Deriviamo in  $s$  per rimuovere la divergenza:

$$\frac{\partial}{\partial s} M_2(s) = \frac{p^\mu}{2s} \frac{\partial}{\partial p^\mu} M_2(s) = \frac{(-i)\lambda^2}{2s} p^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-(p-k)_\mu}{k^2 (p-k)^2} = \frac{i\lambda^2}{2s} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(p^2 - p \cdot k)}{k^2 (p-k)^2}$$

Vedremo in seguito

$$\dots = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{s}$$

$$\begin{array}{|l} \sim \int \frac{d^4k}{k^6} \sim \int \frac{dk}{k^2} \\ e^- \text{ finito} \end{array}$$

$$\Rightarrow M_2 = -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log s + C \equiv -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{s}{\Lambda^2}$$

$\swarrow$   
 $C = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log \Lambda^2$

$$\Rightarrow M(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{s}{\Lambda^2}$$

Abbiamo un risultato finito ma **dipendente da  $\Lambda$** .

$\Rightarrow$  La differenza fra due  $M(s)$  è FINITA

$$M(s_1) - M(s_2) = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{s_2}{s_1}$$

Ma  $\sigma \propto |M|^2$  è un'osservabile, quindi come dare un senso a  $M(s)$ ?

- La presenza del logaritmo è un tipico effetto delle correzioni radiative.

Diagrammi a livello albero sono sempre solo polinomi razionali dei momenti, masse ed accoppiamenti.

⇒ Cos'è "λ" ?

l'accoppiamento  $\mathcal{L} > \frac{\lambda}{4!} \phi^4$  parametrizzata per esempio la forza dello scattering  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ .

Possiamo quindi pensare di misurare  $\lambda$  a partire dal processo  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ . Però questo non è solo proporzionale a  $\lambda$  ma ha anche tutti i contributi radiativi (divergenti)

⇒ DEFINIAMO l'accoppiamento RINORMALIZZATO  $\lambda_R$

come l'ampiezza  $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$  a una certa energia  $S_0$ :

$$\lambda_R \equiv -\mathcal{M}(S_0) = \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{S_0}{\Lambda^2} + \dots$$

Risolviamo per  $\lambda$ :  
do  $\uparrow$   $\sigma(S) \Rightarrow \lambda_R$  è finito  $\Rightarrow \lambda$  è infinito per compensare  $\log \Lambda^2$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_R + a \lambda_R^2 + \dots$$

$$\lambda_R = \left( \lambda_R + a \lambda_R^2 + \dots \right) + \frac{\left( \lambda_R + a \lambda_R^2 + \dots \right)^2}{32\pi^2} \log \frac{S_0}{\Lambda^2}$$

$$= \lambda_R + a \lambda_R^2 + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \log \frac{S_0}{\Lambda^2} \Rightarrow a = -\frac{1}{32\pi^2} \log \frac{S_0}{\Lambda^2}$$

$$\lambda = \lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \log \frac{S_0}{\Lambda^2} + O(\lambda_R^3)$$

Esprimiamo ora l'ampiezza  $M(s)$  in termini di  $\lambda_R$  (ottenuto da  $M(s_0)$ )

$$M(s) = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \log \frac{s}{\Lambda^2} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \log \frac{s_0}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \log \frac{s}{\Lambda^2} + \dots =$$

$$M(s) = -\lambda_R - \frac{\lambda_R^2}{32\pi^2} \log \frac{s}{s_0}$$

⇒ Possiamo **PREDIRRE**  $M(s)$  a altre energie partendo da una misura fatta a  $s_0$ .

Questa procedura per esprimere ampiezze in termini di parametri (accoppiamenti, campi, masse) definiti a partire da osservabili fisiche è chiamata **RINORMALIZZAZIONE** con uno schema **ON-SHELL**.

Una teoria che ha bisogno di un numero finito di osservabili per riassorbire tutte le divergenze in tutte le altre predizioni, è chiamata **RINORMALIZZABILE**.

Se, invece, occorre un numero infinito di osservabili, la teoria è non-rinormalizzabile.

# METODI PER REGOLARIZZARE DIVERGENZE UV

Ci sono diversi metodi per regolare divergenze UV.  
È importante considerare quali sono le simmetrie rotte dal regolatore.

• **CUTOFF**:  $|k_E| < \Lambda \iff \sqrt{(k^0)^2 + \sum_i (k^i)^2} < \Lambda$

$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$  L'integrale sul momento di loop viene limitato a valori più piccoli di una certa scala  $\Lambda$ . Poi si prende il limite  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

+ È molto intuitivo

- Rompe sia simm. di Lorentz (boost) che di gauge.

## • PAULI - VILLARS

Ad ogni particella di massa  $m$  se ne aggiunge una analoga "fantasma" di massa  $\Lambda$  e di statistica opposta  $\Rightarrow$  segno opposto nel contributo a un loop.

E.g.

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} \rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\epsilon)^2} - \frac{1}{(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2} \right) = \dots = -\frac{i}{16\pi^2} \log \frac{m^2}{\Lambda^2}$$



+ È una chiara deformazione della teoria nell'ultravioletto

- Richiede di aggiungere tante particelle in diagrammi a molti loop

- Un termine di massa per un vettore rompe la simmetria di gauge

## • REGOLARIZZAZIONE DIMENSIONALE (dim-reg) [S.B.3]

È il metodo di gran lunga più utilizzato, introdotto da 't Hooft e Veltman nel 1972.

Generalizziamo il numero di dimensioni dello spaziotempo da  $4 \Rightarrow d \in \mathbb{C}$  continuazione analitica

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^2} \Rightarrow \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^2} \stackrel{UV}{\sim} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{k^4}$$

diverge solo per  $d \geq 4$ .

Prendiamo quindi  $d = 4 - \epsilon$ , con  $\epsilon > 0$ .

Tutti gli integrali di loop diventano finiti, la divergenza corrisponde ad un polo  $\frac{1}{\epsilon}$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

+ Preserva tutte le simmetrie della teoria,

+ Applicabile a calcoli multi-loop,

- Meno intuitivo degli altri metodi.

# CONTABILITÀ DELLE DIVERGENZE ULTRAVIOLETTE

[PS. 10.1, S. 21]

Vogliamo capire quali diagrammi di Feynman sono divergenti e quali no.

Cominciamo considerando la QED.

Un diagramma qualsiasi sarà caratterizzato da

$N_e$  - elettroni esterni

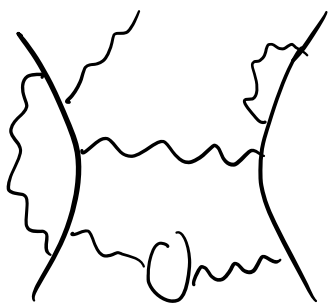
$N_\gamma$  - fotoni esterni

$P_{e,\gamma}$  - propagatori fermionici/fotonici

$V$  - numero di vertici

$L$  - numero di loop

Un diagramma qualsiasi avrà:



$$\sim \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_L}{(k_i - m) \dots k_j^2 \dots k_n^2}$$

Ogni loop porta un  $\int d^4 k \sim k^4$  come divergenza UV

Ogni propagatore fermionico  $\sim \frac{1}{k}$   
" fotonico  $\sim \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow$  Il diagramma diverge se, mettendo tutto insieme, il diagramma va con una potenza non-negativa di  $k$ .

Definiamo il **GRADO DI DIVERGENZA SUPERFICIALE**

$$D = (\text{potenze di } k \text{ al numeratore}) - (\text{potenze di } k \text{ al denominatore}) =$$

$$D = 4L - P_e - 2P_r$$

Naivamente:

⇒ Il diagramma diverge come  $\Lambda^D$   $\Lambda$ : cutoff

Nota che  $\Lambda^0$  corrisponde a  $\log \Lambda$  ( $\int_0^\Lambda \frac{dk}{k} \sim \log \Lambda$ )

Il diagramma è finito se  $D < 0$ .

In realtà, i diagrammi a livello albero hanno

$D = 0$  ma sono finiti,

alcuni diagrammi possono avere un sotto-diagramma divergente anche se il diagramma complessivo ha

$D < 0$ .

Possiamo però ridurci a diagrammi con le linee esterne amputate, e di tipo 1PI (irriducibili a 1 particella), dato che tutti i diagrammi connessi sono formati da un albero di diagrammi 1PI.

Notiamo che

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1$$

⇒ Ogni propagatore ha un  $\int d^4k$ , ogni vertice una  $\delta^4(\dots)$  ed una  $\delta^4(\dots)$  e la conservazione del momento globale.

Inoltre: 
$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e)$$

dato che i vertici sono  $\int d^4k$  e propagatori sono collegati a 2 vertici,

$$\Rightarrow D = 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma =$$

$$D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e$$

Un numero limitato di diagrammi ha  $D \geq 0$ :

$D=4$

Diag. vuoto-vuoto  
Si cancella in  $Z[0]$

$D=3$

↓  
 $=0$  per Lorentz

$D=2$

↓  $\rightarrow (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) \log \Lambda$   
Sono divergenti  
logaritmicamente

$D=1$

Teorema di Furry  
(per coniugazione di carica)

$D=0$

↓  
La parte div. è nulla  
per id. di Ward

$D=1$

$\sim A \not{p} \log \Lambda + B m \log \Lambda$

$D=0 \sim \log \Lambda$

Date le simmetrie della QED, solamente 3 hanno divergenze rilevanti alla fenomenologia, e sono divergenze logaritmiche, mentre un quarto diagramma divergente è l'energia del vuoto.

⇒ Una volta regolarizzati queste poche ampiezze, tutte le altre daranno risultati FINITI.

Nota che il nr. di diagrammi divergenti è molto più alto e aumenta ad ogni ordine in th. delle perturbazioni.

POSSIAMO CLASSIFICARE LE TEORIE IN:

### • TEORIE SUPER-RINORMALIZZABILI

Un numero finito di diagrammi di Feynman è divergente.

### • TEORIE RINORMALIZZABILI

Un numero finito di ampiezze sono superficialmente divergenti.

### • TEORIE NON-RINORMALIZZABILI

Tutte le ampiezze sono divergenti se andiamo ad un ordine sufficientemente alto in teoria delle perturbazioni.

Consideriamo la teoria di uno scalare in  $d$  dimensioni dello spaziotempo, con lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{g}{u!} \phi^u$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L = P - V + 1 \\ uV = N + 2P \end{array} \right.$$

$L$ : # loop  
 $P$ : # propagatori  
 $V$ : # vertici  
 $N$ : # gambe esterne

$$\Delta = dL - 2P = d + \left[ u \left( \frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left( \frac{d-2}{2} \right) N$$

- $d=4$  e  $u=4$  :  $\Delta = 4 - N$  rinormalizzabile
- $d=4$  e  $u=6$  :  $\Delta = 4 - N + 2V$  non-rinormalizzabile
- $d=4$  e  $u > 4$  : non-rinormalizzabile
- $d=3$  e  $u=6$  :  $\Delta = 3 - \frac{N}{2}$  rinormalizzabile
- $d=3$  e  $u=4$  :  $\Delta = 3 - \frac{N}{2} - V$  super-rinormalizzabile

$\Rightarrow$  Per essere rinormalizzabile è necessario che

$$u \left( \frac{d-2}{2} \right) - d \leq 0$$

Questo corrisponde alla richiesta che l'accoppiamento  $g$  abbia dimensioni in energia  $\epsilon^{\Delta}$  con  $\Delta \geq 0$ .

## SCALING CON L'ENERGIA

Dato un termine  $X$  che scala come  $E^\Delta$

definiamo:  $[X] \equiv \Delta$

L'azione è adimensionale (scala come  $t^0$ ):  $[S] = 0$ .

Dato  $[d^d x] = -d$  e  $S = \int d^d x \mathcal{L} \Rightarrow [\mathcal{L}] = d$ .

Dal termine cinetico:

$$\left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \right] = 2 + 2[\phi] \equiv d \rightarrow [\phi] = \frac{d-2}{2} \quad [\phi] = 1 \text{ in } d=4$$

Prendiamo l'interazione:

$$[\lambda \phi^n] = [\lambda] + n[\phi] = [\lambda] + n \frac{(d-2)}{2} \equiv d$$

$$[\lambda] = d - n \frac{(d-2)}{2}$$

Quindi  $\lambda$  è adimensionale per  $d=4$  e  $n=4$

Il grado di divergenza superficiale è quindi

$$D = d - [\lambda]V - \left( \frac{d-2}{2} \right) N$$

$\Rightarrow$  La teoria è rinormalizzabile per  $[X] \geq 0$

Questo è generalizzabile per particelle ed accoppiamenti qualsiasi. Per  $d=4$ : [Se. 3.1]

$N_f$ : # gambe esterne di un campo di spin  $S_f$

$V_i$ : # vertici con accoppiamento  $g_i$ , del tipo

$$\mathcal{L} \supset g_i \int d^4x \prod_f \phi_f^{n_{if}}$$

$[g_i] = 4 - d_i - \sum_f n_{if} (S_f + 1) \Rightarrow$  dimensione dell'accoppiamento  $g_i$

$$D = 4 - \sum_f N_f (S_f + 1) - \sum_i V_i [g_i]$$

- Se tutti i  $[g_i] > 0 \Rightarrow$  la teoria è SUPER-RINORMALIZZABILE
- Se tutti i  $[g_i] \geq 0 \Rightarrow$  la teoria è RINORMALIZZABILE
- Se anche un solo  $[g_i] < 0 \Rightarrow$  NON RINORMALIZZABILE