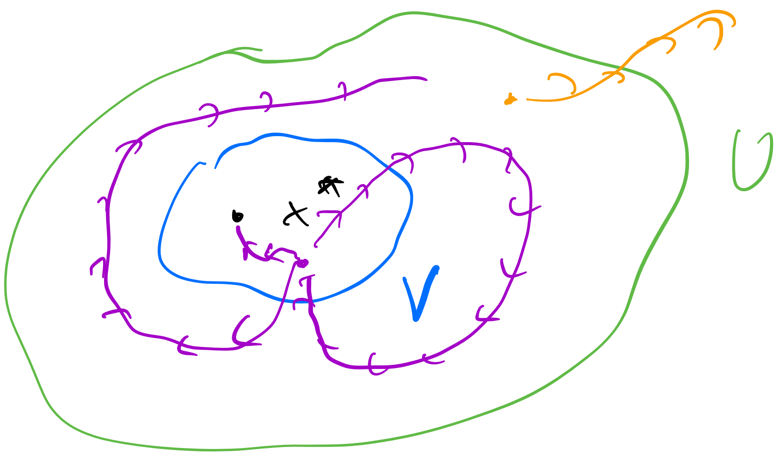
SISTEMI DINAMICI

Problema della stabilità :

Def Stabilità secondo Lyapunov



→ Teorema : funzione di Lyapunov

→ $L(x^*) = 0$

→ $L(x) > 0$

→ $L(\varphi_t(x)) < L(x) \quad t > 0$

$\leq$

$\frac{dL(\varphi_t(x))}{dt} < 0$ forte

≤ 0 debole

$$\frac{dL}{dt}(\varphi_t(x)) = \nabla L \cdot \frac{dx}{dt} =$$

$$= \nabla L \cdot f(x) \quad < 0$$
$$\leq 0$$

quantità conservate : Q t.c.

$$\frac{d}{dt} Q(\varphi_t(x)) = 0$$ forniscono funzioni di Lyapunov deboli.

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

SISTEMA DI LORENZ

$\sigma, r, b > 0$

Punto critico : $(0,0,0)$

$$Df\Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Localmente: la direzione z

è autovettore con autovalore $-b$

Quindi attrattivo quando $b > 0$

Per gli altri due autovalori:

$$\lambda^2 + (\sigma+1)\lambda + \sigma(1-r) = 0$$

(dove $\sigma > 0$)

autovalori per λ:

attrattivo per $r < 1$ AS

sella per $r > 1$ instabile

Cerchiamo di costruire una funzione

di Lyapunov:

$$L = A x^2 + B y^2 + C z^2$$

$$\frac{dL}{dt} = 2A\dot{x}x + 2B\dot{y}y + 2C\dot{z}z$$

$$= 2A\sigma(y-x)x +$$

$$+2B(rx-y-xz)y + 2C(-bz+xy)z$$

$$= 2A\sigma yx - 2A\sigma x^2 + 2B\,2xy +$$

$$-2By^2 - 2Bxzy - 2Cbz^2 +$$

$$+ 2Cxyz$$

[Notiamo: due termini hanno xyz
se scegliamo $B = C$ eliminiamo
il termine xyz.]

$$= 2A\sigma yx - 2A\sigma x^2 + 2B\,r\,xy$$
$$- 2By^2 - 2Bbz^2$$

$$= (2A\sigma + 2Br)xy - 2A\sigma x^2$$
$$- 2By^2 - 2Bbz^2$$

$$A = \frac{1}{2\sigma}, \qquad B = \frac{1}{2}$$

$$= (1+r)xy - \underbrace{(x^2+y^2+bz^2)}_{b>0}$$

completando il quadrato

$$= -\underbrace{\left(x - \frac{r+1}{2}y\right)^2}_{} - \underbrace{\left(1 - \frac{(r+1)^2}{4}\right)}_{}y^2 - \underbrace{bz^2}_{b>0}$$

$$\underbrace{r<1}_{} \longrightarrow \frac{dL}{dt} < 0$$

l' origine $x^* = (0,0,0)$ è asintoticamente stabile anche nella teoria non lineare.

Cosa succede se $r=1$?

Per $r=1$ abbiamo $\left.\frac{dL}{dt}\right|_Z = 0$

dove $Z = \{(x,y,z) : x=y,\ z=0\}$

<u>Teorema</u> (Principio di La Salle)

Sia x^* un punto di equilibrio e L funzione di Lyapunov debole (definita su U, compatto e invariante in avanti).

Sia $Z = \{ x \in U \mid \frac{dL}{dt} = 0 \}$ l'insieme dove L non decresce.

Allora se $\{x^*\}$ è l'unico sottoinsieme invariante in avanti di Z, allora x^* è asintoticamente stabile.

Quindi inoltre:

$$Z = \{ (x,y,z) : x=y, \; z=0 \}$$

è l'insieme dove $\left.\frac{dL}{dt}\right|_Z = 0$

nel caso limite $r=1$.

$\to$ $(0,0,0)$ è AS anche per $r=1$.

<u>Esempio</u> $\ddot{x}+\mu\dot{x}+\omega^2 x=0$

per $\mu>0$ è un oscillatore armonico con attrito.

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-\mu y-\omega^2 x \end{cases}$$

Prendiamo: $L=\omega^2x^2+y^2$

$$\frac{dL}{dt}=\omega^2 2x\dot{x}+2y\dot{y}=$$

$$=\omega^2 2xy+2y(-\mu y)+2y(-\omega^2 x)$$

$$=\omega^2 2xy-\mu 2y^2-2y\omega^2 x$$

$$=-2\mu y^2\leq 0$$

$$Z = \left\{ (x,y) : \frac{dL}{dt} = 0 \right\} =$$

$$= \{ (x,y) : y = 0 \}$$

Siccome $(0,0)$ è l'unico punto fisso di Z $\rightarrow$ è asintoticamente stabile

INSIEMI LIMITE & ATTRATTORI

Se abbiamo un sistema dinamico possiamo parlare delle sue orbite:

$$\Gamma_x = \{ \varphi_t(x) : t \in \mathbb{R} \}$$

$$\Gamma_x^+ = \{ \varphi_t(x) : t \geq 0 \}$$

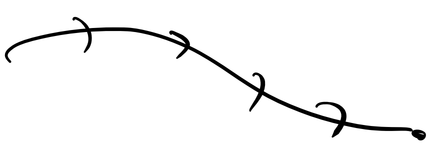
$$\Gamma_x^- = \{ \varphi_t(x) : t \leq 0 \}$$

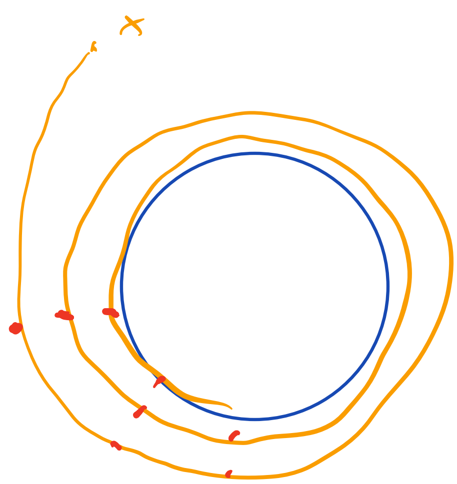
Possiamo caratterizzare le orbite attraverso il loro andamento per

$t \longrightarrow +\infty$.

Def: un punto limite y è definito da $\varphi_t(x) \longrightarrow y$ se $\exists$ sequenza $t_1 < t_2 \dots < t_k$ tale che $t_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Def L'insieme di tutti i punti limite di Γ_x^+ è detto l'insieme ω-limite, $\omega(x) = \omega(\Gamma_x^+)$, similmente $\alpha(x)$, punti limite di Γ_x^- per $t \longrightarrow -\infty$.





Def Un <u>ciclo limite</u> γ è un'orbita periodica che è l'insieme ω-limite o α-limite di un punto $x \notin \gamma$

Quindi un ciclo limite è un'orbita periodica γ, è una curva chiusa invariante con la proprietà che traiettorie vicine spiraleggiano verso (o allontanandosi da) γ.

Chiuso & invariante : $\underline{\varphi_t(\gamma) = \gamma}$

L'insieme ω-limite è un insieme invariante : se $y \in \omega(x)$, allora possiamo trovare una sequenza $\{t_n\}$ tale che $\varphi_{t_n}(x) \longrightarrow y$.

Per continuità, fissato $s \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{s+t_n}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)) \to \varphi_s(y)$$

e quindi $\varphi_s(y) \in \omega(x)$

In modo simile possiamo definire il concetto di <u>attrattore</u>, come un insieme invariante verso il quale si muovono le traiettorie.

Diremo che un insieme Λ è stabile se $\forall$ intorno U di Λ possiamo trovare un sottoinsieme V di U tale che tutte le traiettorie che partono da V restano in U

Λ è asintoticamente stabile se è stabile e la distanza tra la traiettoria $\varphi_t(x)$ e Λ tende a zero per $t \longrightarrow +\infty$

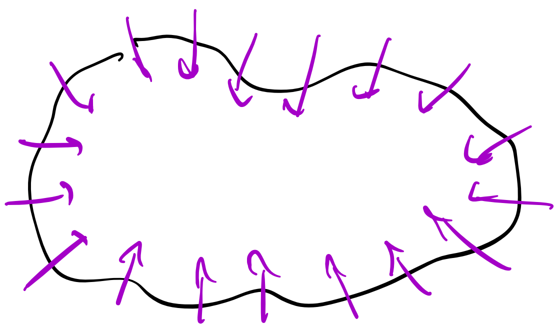
Def Un insieme N viene detto regione di intrappolamento (trapping region) se è compatto e

$$\varphi_t(N) \subset \overset{\text{interno } N}{\operatorname{int}(N)} \quad t > 0$$

Regione di intrappolamento = regione invariante in avanti con la proprietà che ogni traiettoria che inizia nella trapping region si sposta al suo interno e vi rimane

Modo più semplice di costruirla

→ cerco una regione tale che il campo vettoriale punti al suo interno



<u>Def</u> Un insieme Λ si dice insieme attrattivo se c'è una regione di intrappolamento compatta $N \supset \Lambda$, tale che

$$\Lambda = \bigcap_{t>0} \varphi_t(N)$$

[→ l'insieme invariante più grande dentro una regione di intrappolamento]

Def Un insieme Λ si dice un attrattore se è un insieme attrattivo e $\exists$ punto x tale che $\Lambda = \omega(x)$.

Commento:

un insieme S si dice minimale se è chiuso, non vuoto e invariante e $\nexists$ nessun sottoinsieme con queste proprietà.

se S è compatto: minimale $\iff \omega(x) = S$