Fisica Generale 1 – 018IN

Moto e dinamica dei corpi rigidi

Prof. Pierre Thibault

pthibault@units.it

Strategie per la risoluzione di problemi

1. Visualizza

- Crea un'immagine mentale del problema
- Identifica i concetti che possono esser utili
- Riformula la domanda nelle tue proprie parole, ed in termini che possono essere calcolati.

2. Descrivi

- Fai diagrammi, incluso diagrammi di corpi liberi.
- Scegli un sistema di coordinate che ti sembra appropriato
- Nomina le quantità che sembrano importanti nel problema
- Identifica le quantità da trovare per dare la soluzione al problema.

Strategie per la risoluzione di problemi

3. Fai un piano

- Trasferisci i concetti in forma matematica
- Puoi partire dalla soluzione e lavorare in retromarcia, oppure partire da quello che sai verso quello che cerchi.

4. Esegui il piano

- Risolvi i sistemi di equazioni
- Verifica le unità
- Se hai valori numerici, ora è il tempo di sostituirli.

Strategie per la risoluzione di problemi

5. Valuta la soluzione

- La soluzione risponde alla domanda fatta?
- Se puoi, valida il risultato testando casi limite
- Il risultato è ragionevole?
- Il risultato è completo?

6. Cambia piano se necessario

- Altra strategia?
- Altro sistema di coordinate o di riferimento?

Strategie per la risoluzione di problemi

1. Visualizza

2. Descrivi

3. Fai un piano

4. Esegui il piano

5. Valuta la soluzione

6. Cambia il piano se necessario

Corpi rigidi

Capitoli 12 → 11 → 13

Corpo rigido: un corpo di cui la forma e le dimensioni sono fissi

= posizioni relativi tra parti del corpo sono fisse

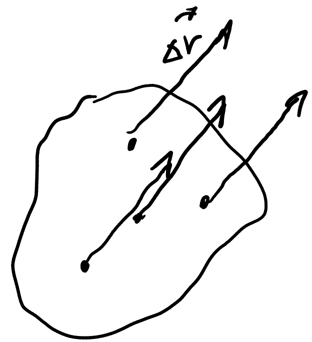
rigido

non-rigido

rigido?

Corpi rigidi - cinematica

Traslazione



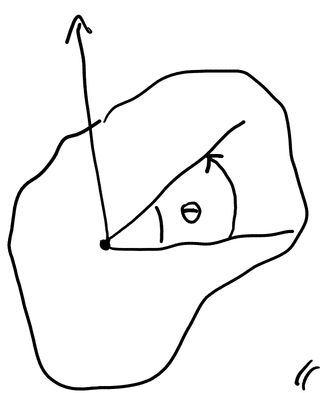
tutte le parti del corpo subiscono lo stesso spostamento

$\Downarrow$

hanno la stessa velocità

$\Rightarrow$ 3 parametri (x, y, z)

Rotazione:

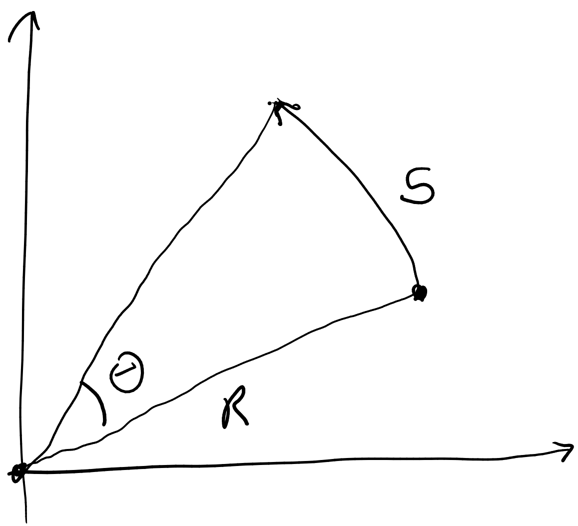


bisogna specificare 3 parametri

(3 angoli, asse + angolo)

"rototraslazione": 6 parametri

Cinematica del moto rotatorio



s: lunghezza dell'arco per uno spostamento angolare a distanza R dell'asse

$\theta = s/R$ angolo in radiante

"coordinata angolare"

velocità angolare: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

accelerazione angolare: $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$

Analogia

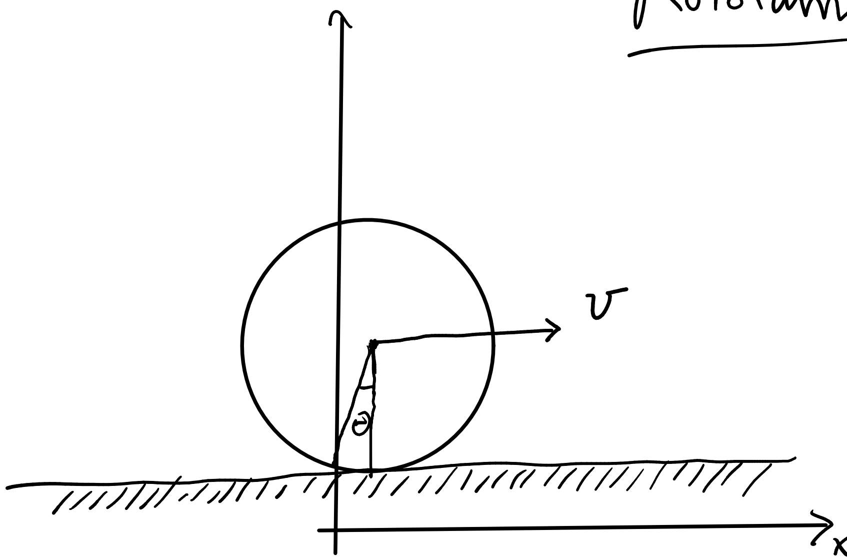
θ	x
ω	v
α	a

e.g. accelerazione angolare costante:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Cinematica del moto rotatorio

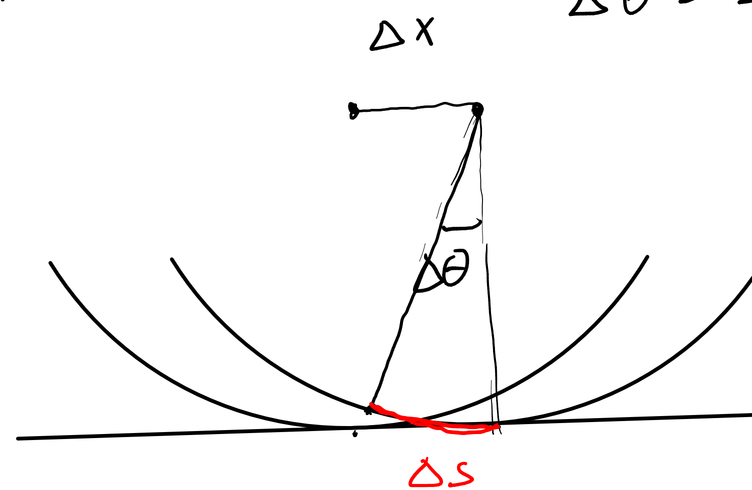
Rotolamento



$x(t)$: posizione del centro del cerchio funzione del tempo

$\theta(t) = ?$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$$



$\Delta s \to \Delta x$ per piccoli spostamenti

$\Delta\theta = \Delta x / R$

$\leftarrow$

Rotolamento

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{x(t)}{R}$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Corpi rigidi - dinamica

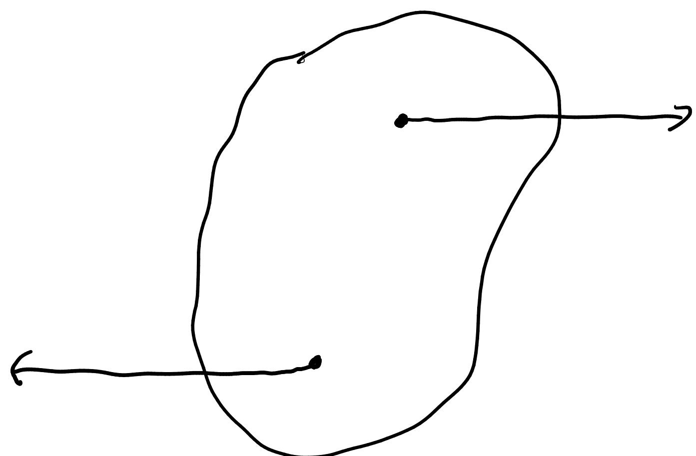
* Modello per corpo esteso
* Assieme di punti materiali con distanze relative fisse
* Centro di massa: molto importante perché

$$\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$$

La risultante delle forze esterne, anche se ciascuna a un punto di applicazione diverso, si comporta come un'unica forza che agisce sul centro di massa come se fosse un punto materiale

Corpi rigidi - dinamica

* Corollario : $\vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$



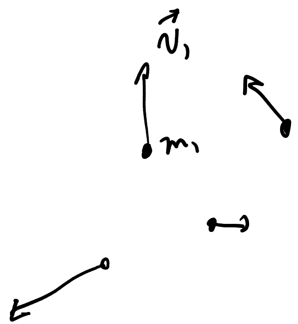
$\leftarrow \vec{a}_{CM} = 0$ il corpo si sposta a velocità costante

Non finisce qui: il corpo può anche girare

$\Rightarrow$ accelazione angolare!

Energia cinetica

Sistema di punti materiali



Energia cinetica totale: $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Velocità del C.M.: $\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i$

Velocità relative al C.M.: $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \boxed{\vec{v}_i\,'}$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i\,'\right)^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i\,'\right) \cdot \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i\,'\right)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(v_{CM}^2 + v_i'^2 + 2\, \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i\,'\right)$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i\,'}_{\text{0 perché } \vec{P}_{tot} \text{ è nullo in C.M.}}$$

$$\boxed{K_{tot} = K_{CM} + K_{rel}}$$

risultato generale!

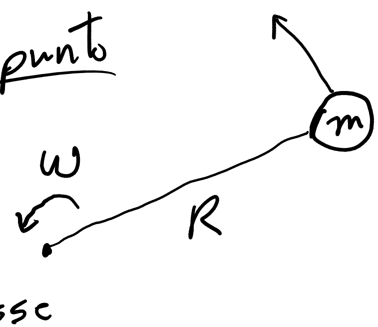
Energia cinetica

Corpo rigido: $K_{tot} = K_{cm} + K_{rot}$

energia cinetica di rotazione

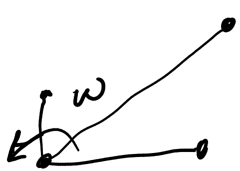
Energia cinetica di rotazione:

- un punto



$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\omega R)^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2$$

- assieme di punti



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i r_i^2}_{I} \omega^2$$

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{momento di inerzia}}$$

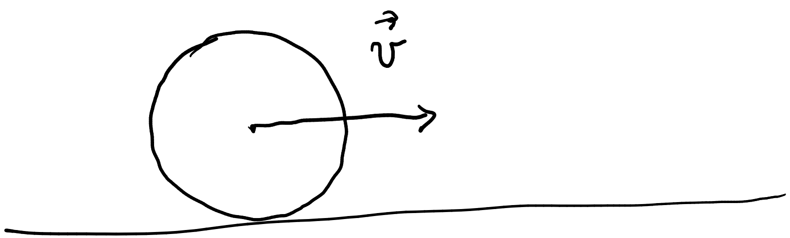
Energia cinetica di un corpo rigido

$$K_{tot} = K_{cm} + K_{rot}$$

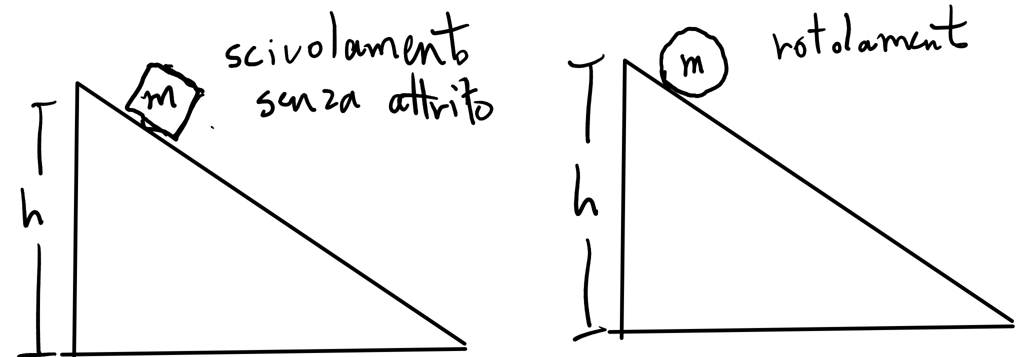
momento di inerzia attorno un asse che passa per il centro di massa

$$K_{tot} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

E.g. rotolamento



$$K_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \underbrace{\omega^2}_{\frac{v^2}{R^2}}$$



L'arriva per prima!

Conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = mgh \qquad \Big| \qquad \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_f^2}{R^2} = mgh$$

Momento di inerzia

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

$$\boxed{I = \int r^2 \, dm}$$

se la densità è data:

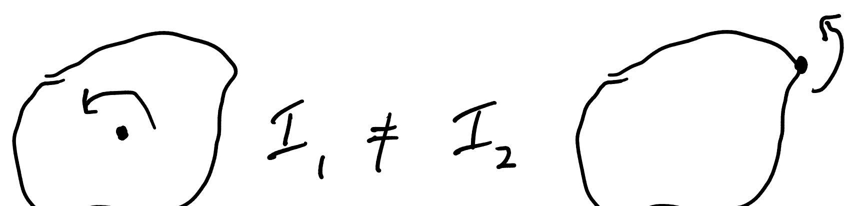
$$\boxed{I = \int r^2 \rho(\vec{r}) \, dV}$$

* rappresenta la resistenza di un corpo al cambiamento di velocità angolare $\longrightarrow$ analogo alla massa

<u>ma</u>

* dipende dalla posizione e dall'orientazione dell'asse di rotazione

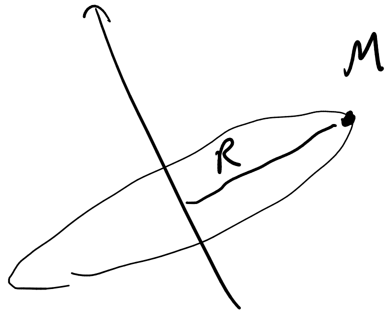
(qui: $I_1 < I_2$)



$$I_1 \neq I_2$$

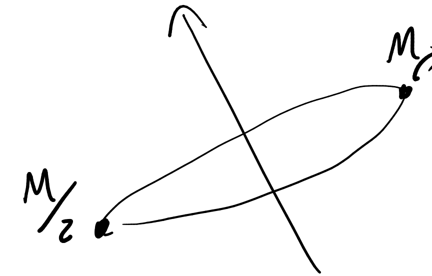
Momento di inerzia

Un punto materiale



$I_{punto} = MR^2$

Due punti materiali



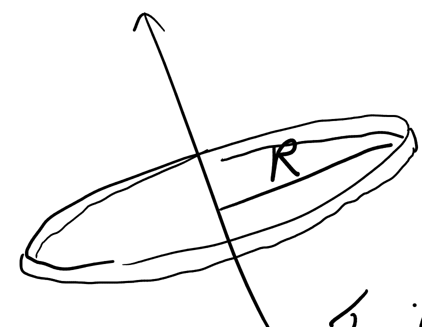
$I_{due\ punti} = MR^2$

N punti materiali a distanza R

$I = \sum_i \frac{M}{N} R^2$

$I = MR^2$

Annello (anche cilindro cavo)



$I = \int R^2 dm$

$I_{anello} = MR^2$

Momento di inerzia

Si possono calcolare per altri corpi:

Sfera piena: $I = \frac{2}{5} M R^2$

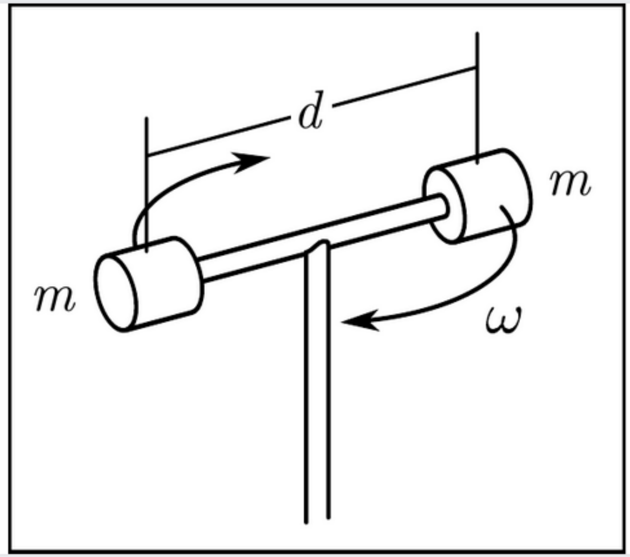
Sfera cava: $I = \frac{2}{3} M R^2$

Cilindro : $I = \frac{1}{2} M R^2$ (pieno, omogeneo)

Anello : $I = M R^2$ (anche cilindro cavo)

Momento di inerzia

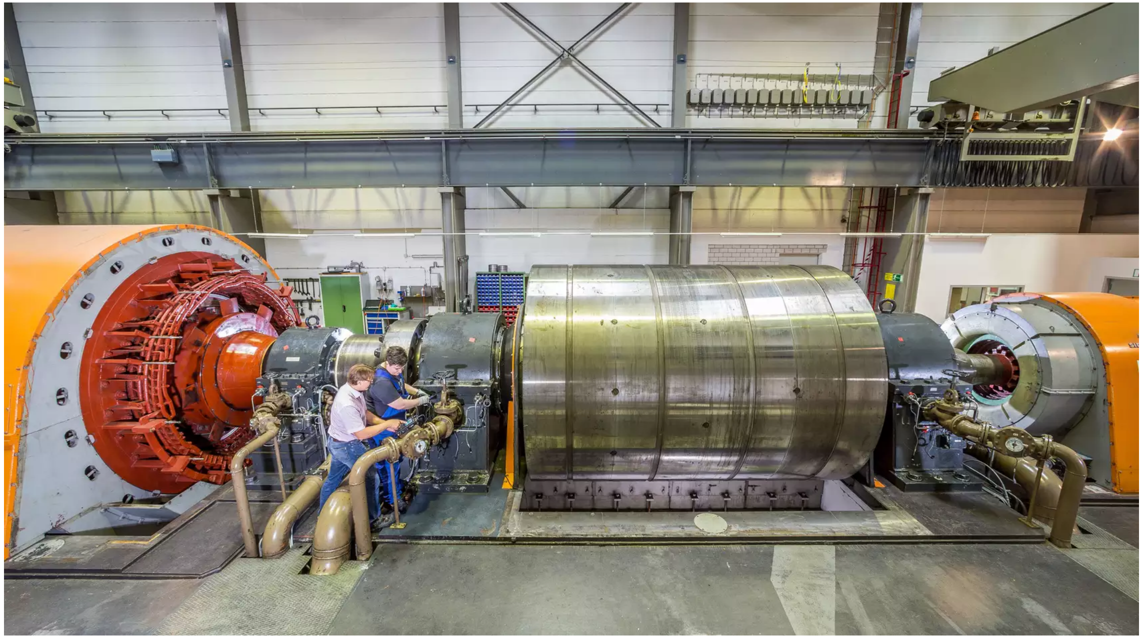
Quanto tempo prende questo sistema per compiere un giro completo se ha un'energia cinetica uguale a $K = 1\,\mathrm{J}$, e $d = 1\,\mathrm{m}$ e $m = 1\,\mathrm{kg}$? L'asta è di massa trascurabile.



$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad K = \frac{1}{2} I \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad T = \sqrt{\frac{2\pi^2 I}{K}}$$

$$I = 2mr^2 = 2m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} md^2 \qquad T = \sqrt{\frac{\pi^2 m d^2}{K}}$$

Momento di inerzia

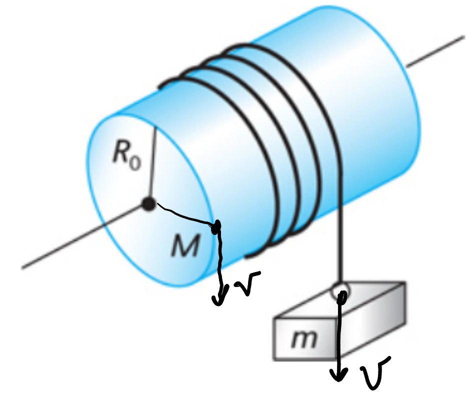


Batteria a volano

Momento di inerzia

Momento di inerzia

12.6 Un blocco di massa m è attaccato a un filo di massa trascurabile, che è avvolto intorno a un cilindro omogeneo di massa M e raggio R_0 (Figura P12.1). Il cilindro è libero di girare, con attrito trascurabile, intorno a un asse orizzontale fisso passante per il suo centro. Dopo che il blocco è sceso di un tratto verticale h a partire $\boxed{\text{dalla quiete}}$, trovare (a) la velocità lineare del centro del blocco e (b) la velocità angolare del cilindro rispetto al suo asse di rotazione.



Conservazione dell'energia meccanica

$$E_i = E_f$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\underbrace{K_i}_{0} + (U_i - U_f) = K_f$$

$$K_f = U_i - U_f$$

$$K_f = mgh$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R_0^2} = mgh$$

$$v^2 \left(1 + \frac{I}{m R_0^2}\right) = 2gh$$

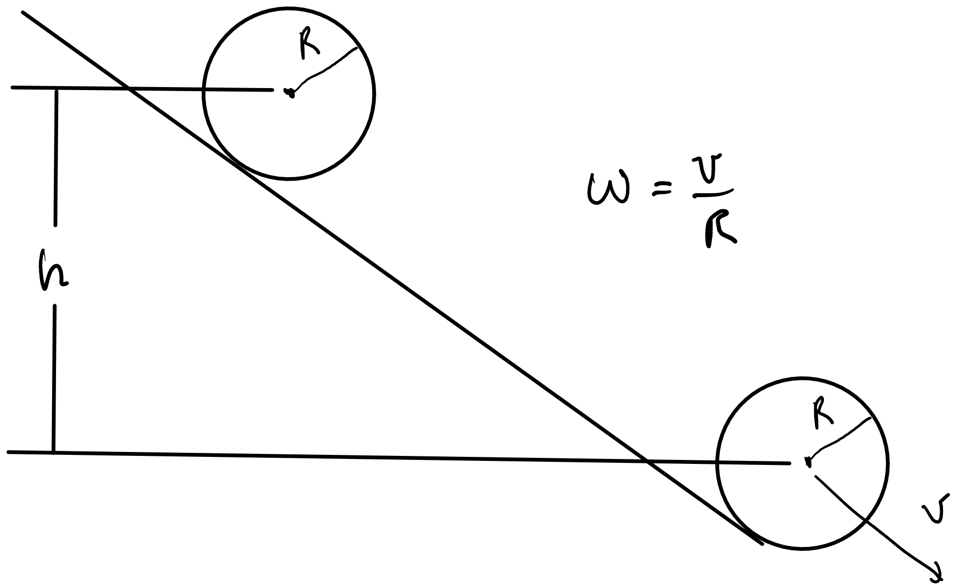
$$\omega = v / R_0$$

$$I = \frac{1}{2} M R_0^2$$

$$v^2 \left(1 + \frac{M}{2m}\right) = 2gh$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Rotolamento



$$\omega = \frac{v}{R}$$

Conservazion dell'energia

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$\frac{v}{R}$

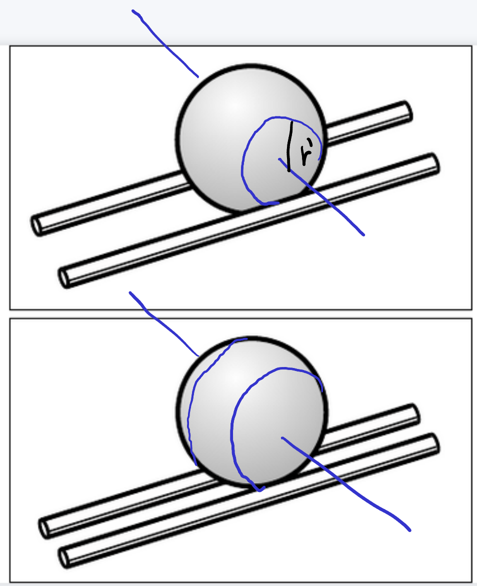
$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}}$$

Sfera piena: $I = \frac{2}{5}mR^2 \longrightarrow v = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{5}{7}}$

Sfera cava: $I = \frac{2}{3}mR^2 \longrightarrow v = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{3}{5}}$

Rotolamento

Due biglie identiche rotolano su due paie di rotaie di distanze diverse. Quale affermazione è giusta?



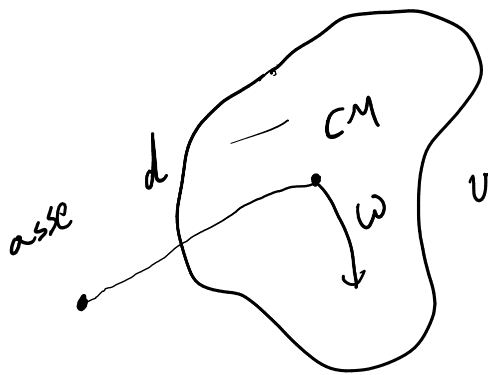
$$v \neq \omega R$$

$$v = \omega r'$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{I}{m r'^2}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{r'^2}}}$$

Teorema degli assi paralleli



$v_{CM} = d\omega$

$$K_{tot} = K_{rot} + K_{CM}$$

$$= \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

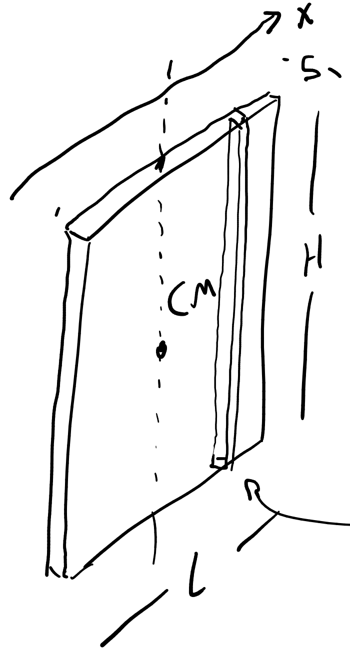
$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(I_{CM} + M d^2 \right)}_{I_{tot}} \omega^2$$

Teorema degli assi paralleli:

$$I_P = I_{CM} + M d^2$$

Teorema degli assi paralleli

Momento di inerzia per una porta



$dV = dx \cdot HS$

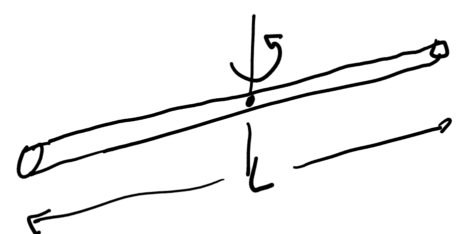
$$I_{CM} = \int r^2\, dm = \int r^2 \rho\, dV = \int r^2 \frac{M}{LSH}\, dV$$

$$= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L\cancel{S}\cancel{H}} \underbrace{\cancel{H}\cancel{S}dx}_{dV} = \frac{M}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\, dx = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{M}{L}\frac{1}{3}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right)$$

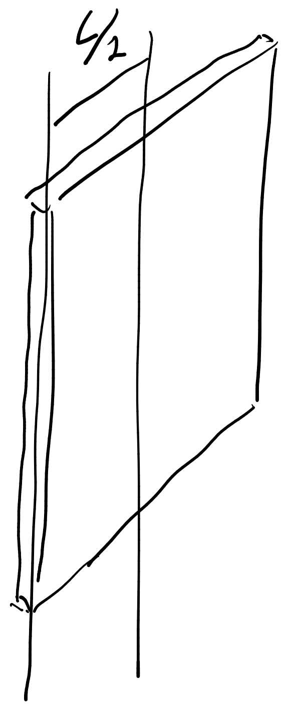
$$\boxed{I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2}$$

stesso risultato per un'asta



$$\boxed{I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2}$$

Momento di inerzia per una porta



momento d'inerzia attorno l'asse laterale :

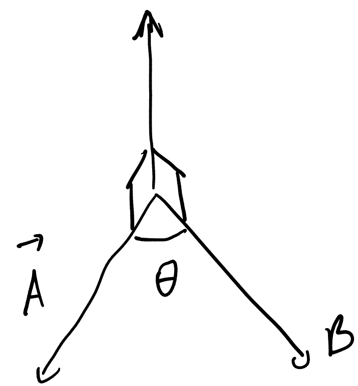
$$I = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{3}ML^2}$$

Prodotto vettoriale *returns*

Incontrato già



$$\vec C = \vec A \times \vec B$$

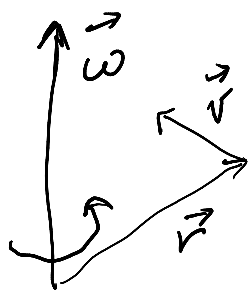
$$|\vec C| = |\vec A||\vec B| \operatorname{sen}\theta$$

$\vec C \perp \vec A$

$\vec C \perp \vec B$

(legge della mano destra per il verso)

$$\vec v = \vec \omega \times \vec r$$

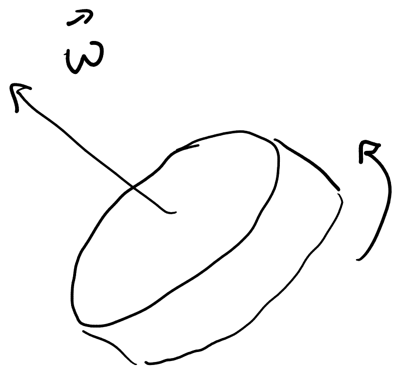


(Forza di Coriolis $\vec F_c = -2m\vec\omega \times \vec v$)

Vettore accelerazione agolare

$\vec{\omega}$ conveniente: $|\vec{\omega}|$ velocità angolare

$\frac{\vec{\omega}}{|\omega|}$ versore dell'asse di rotazione



$\vec{\alpha}$: stesso significato

$|\vec{\alpha}|$: accelerazione angolare

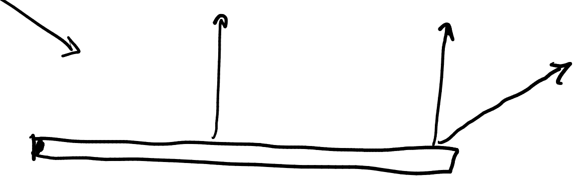
$\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}$: asse

asse fisso: $\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$

se $\vec{\alpha}$ costante: $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha} t$

Aprire una porta

- più grande la massa, più difficile è
- distanza dai cardini
- attrito dei cardini, porta



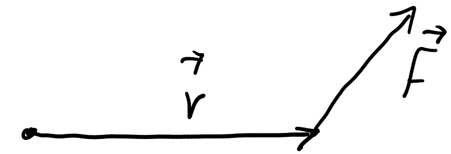
- verso dell forza
- direzione della forza

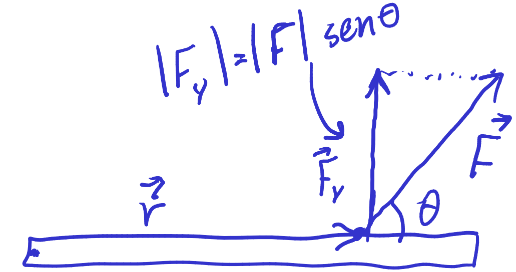
- larghezza della porta
- distribuzione della massa

Momento di forza

$\tau = |\vec{\tau}|$

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

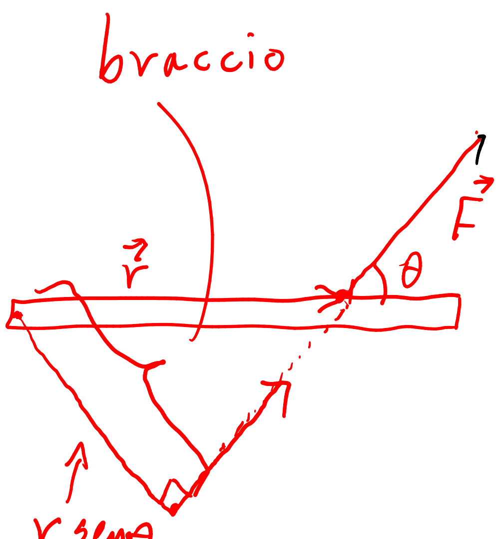




$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \operatorname{sen}\theta$$

$$= r \cdot (F \operatorname{sen}\theta)$$

$$= F \cdot (r \operatorname{sen}\theta)$$

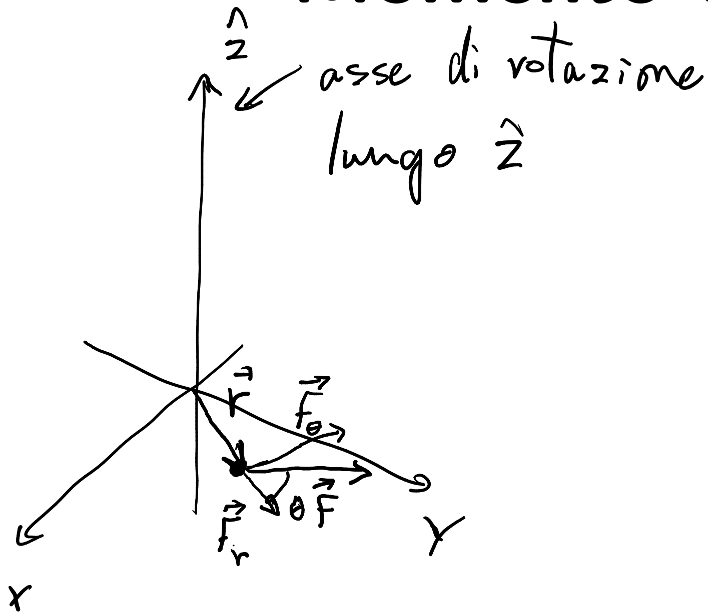


momento di forza:

- distanza all'asse $\times$ componente perpendicolare della forza

- forza $\times$ braccio

Momento di forza e dinamica



Forza $\vec{F}$ agisce su massa m

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \operatorname{sen}\theta \, \hat{k} = \tau_z \hat{k}$$

$$= r F_\theta \hat{k}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad F_\theta = m a_\theta = m r \alpha$$

$$\tau_z = r F_\theta = m r^2 \alpha$$

$\Longrightarrow$ τ produce un accelerazione angolare

Momento di forza e dinamica

Corpo rigido: somma su tutte le parti del corpo:

$$\tau_z = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$= \sum_i r_i F_{i\theta}$$

$$= \sum_i r_i m_i r_i \alpha$$

corpo rigido → tutti i punti hanno la stessa accelerazione angolare

$$= \sum_i r_i^2 m_i \, \alpha$$

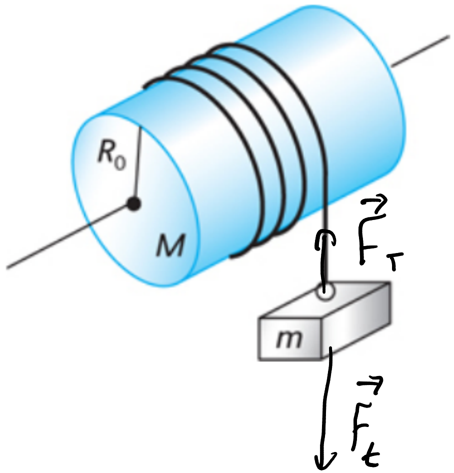
$$= I \alpha$$

$$\boxed{\vec{\tau} = I \vec{\alpha}}$$

analogo a $\vec{F} = m\vec{a}$

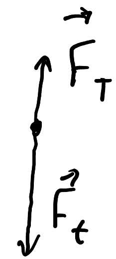
* importante: $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ valido solo se $\begin{cases} \text{asse è fisso} \\ \text{o} \\ \text{asse passa per il centro di massa} \end{cases}$

Esempio 1

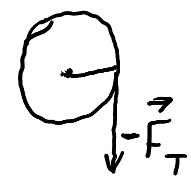


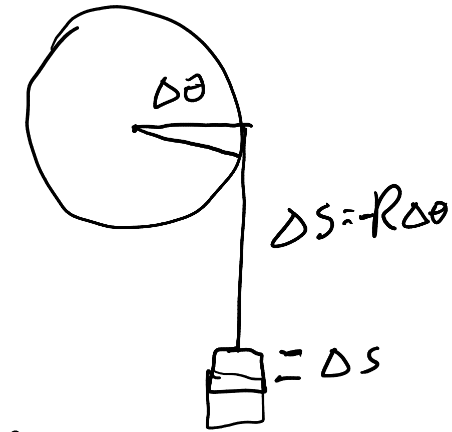
Qual è l'accelerazione della massa m?

massa



cilindro





$$ma = -mg + F_T$$ ← blocco

$$\tau = I\alpha$$ ← cilindro

$$F_T R_0 = \frac{1}{2} M R_0^2 \left(\frac{-a}{R_0}\right)$$

$$F_T = -\frac{1}{2} M a$$

$$ma = -mg - \frac{1}{2} M a$$

$$\left(m + \frac{1}{2} M\right) a = -mg$$

$$a = \frac{-m}{m + \frac{1}{2} M}\, g$$

$$\Delta s = -R_0 \Delta\theta$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = -R_0 \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$v = -R_0 \omega$$

$$a = -R_0 \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-a}{R_0}$$

Esempio 2

13.14 Uno yo-yo con metà dello spago avvolto sull'asse è appoggiato di costa sul pavimento, come mostra la Figura 13.22. Si immagini di tirare delicatamente lo spago in tre diverse direzioni, indicate nella figura da $\vec{\mathbf{F}}_a$, $\vec{\mathbf{F}}_b$ e $\vec{\mathbf{F}}_c$. La forza è in ciascun caso abbastanza lieve da non far scivolare lo yo-yo. In quale caso (se ce n'è qualcuno) lo spago si avvolge sullo yo-yo e in quale caso (se ce n'è qualcuno) lo spago si svolge?

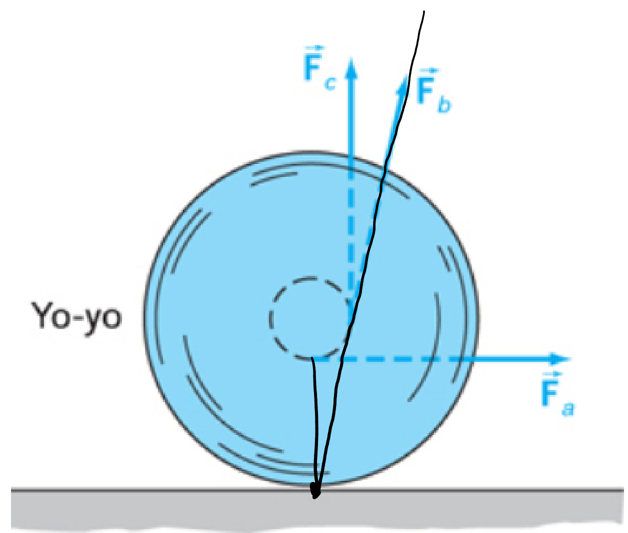
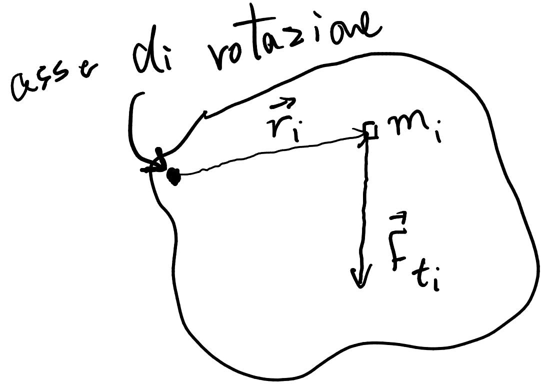


Figura 13.22 Quesito 13.14.

Esempio 2

Momento di forza dovuto alla gravità



$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{ti}$$
$$= \sum_i \vec{r}_i \times (-\hat{j}\, m_i g)$$
$$= -g \sum_i m_i \vec{r}_i \times \hat{j}$$
$$= -g \sum_i m_i (x_i \hat{k} - z_i \hat{i})$$
$$= -g \left(\sum_i m_i x_i\right) \hat{k} + g\left(\sum_i m_i z_i\right) \hat{i}$$
$$= -g M x_{cm} \hat{k} + g M z_{cm} \hat{i}$$
$$= \vec{r}_{cm} \times (-\hat{j} M g) = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_t$$

$$\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$
$$\vec{r}_i \times \hat{j} = x_i(\hat{i} \times \hat{j}) + y_i(\hat{j} \times \hat{j}) + z_i(\hat{k} \times \hat{j})$$
$$= x_i \hat{k} + 0 - z_i \hat{i}$$

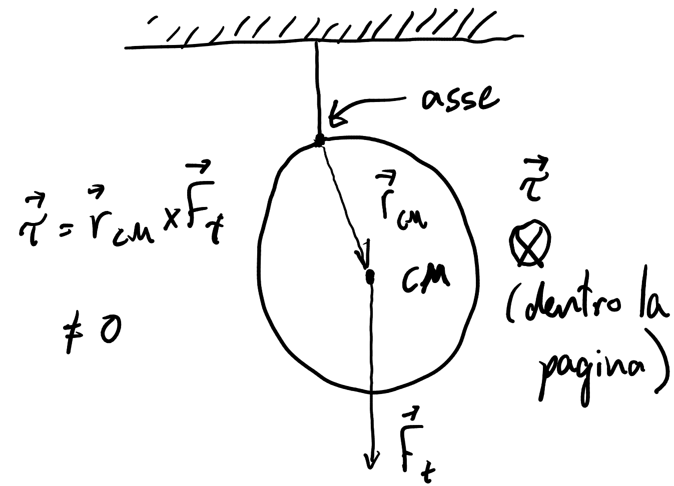
$$\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum m_i} = x_{cm}$$

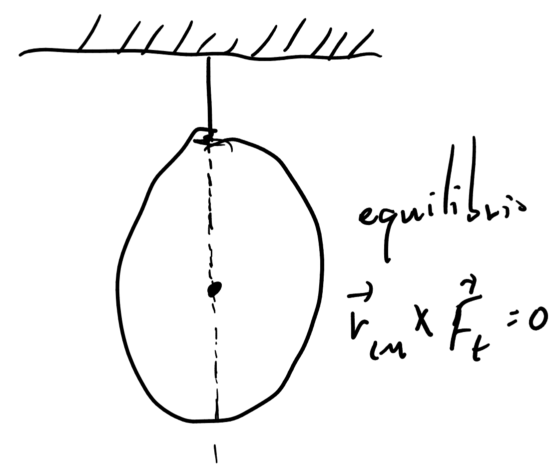
Conclusione:
il momento di forza dovuto alla gravità è uguale al momento di forza applicato solo sul C.M.

Baricentro

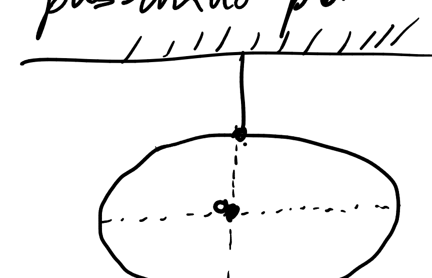
Baricentro = centro di gravità = centro di massa

oggetto sospeso





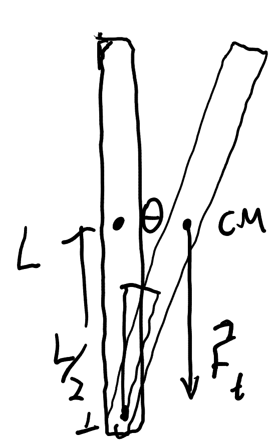
all'equilibrio, il C.M. è sempre sulla rete verticale passando per il perno



→ bastano due misure per trovare il C.M.

Baricentro

Esempio 3



$$\tau = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= r\, F_t \,\text{sen}\,\theta$$
$$= \frac{L}{2} mg \,\text{sen}\,\theta$$
$$\tau = I\alpha$$
$$= \frac{1}{3} m L^2 \alpha$$

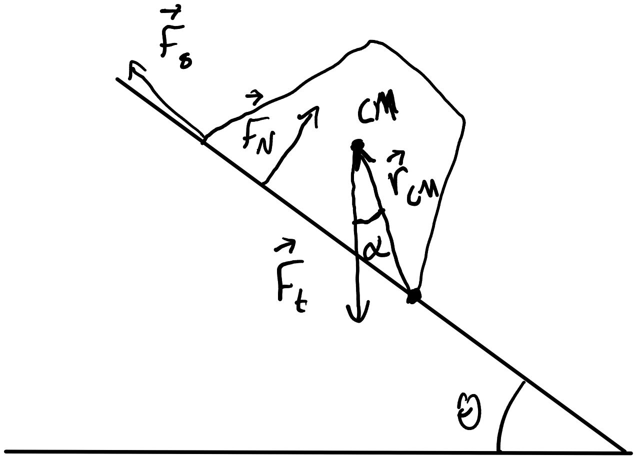
$$\frac{\cancel{L}}{2} \cancel{m} g \,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3} \cancel{m} L^{\cancel{2}} \alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{2}\frac{g}{L} \,\text{sen}\,\theta$$ accelerazione angolare

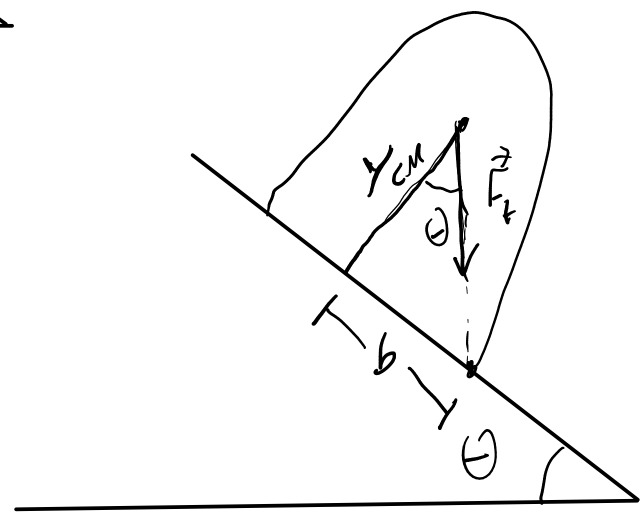
accelerazione lineare del punto più alto

$$\alpha \cdot L = \frac{3}{2} g \,\text{sen}\,\theta \;> g$$ per un certo angolo

Ribaltamento



$$\left(\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} = 0 &= \vec{F}_s + \vec{F}_N + \vec{F}_t \\ F_N &= F_t \cos\theta \\ F_s &= F_t \,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned} \right)$$



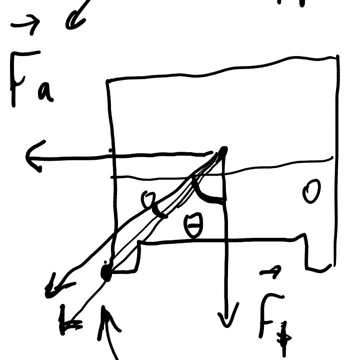
$$\boxed{\tan\theta < \frac{b}{Y_{CM}} \quad \text{condizione di stabilità}}$$

Ribaltamento

Dal lato passaggiero, una Jeep si ribalta se è inclinata più di 41°. Quale velocità non deve superare per evitare di ribaltarsi in una curva di raggio $R = 100\,\mathrm{m}$?

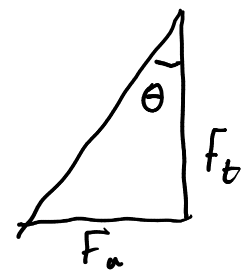
In sistema non-inerziale

forza apparente (centrifuga)

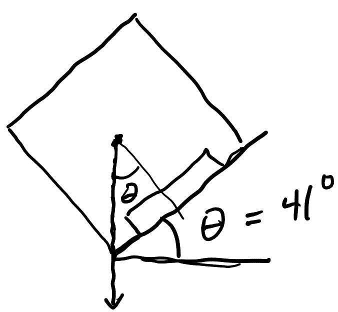


$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_a + \vec{F}_t$$

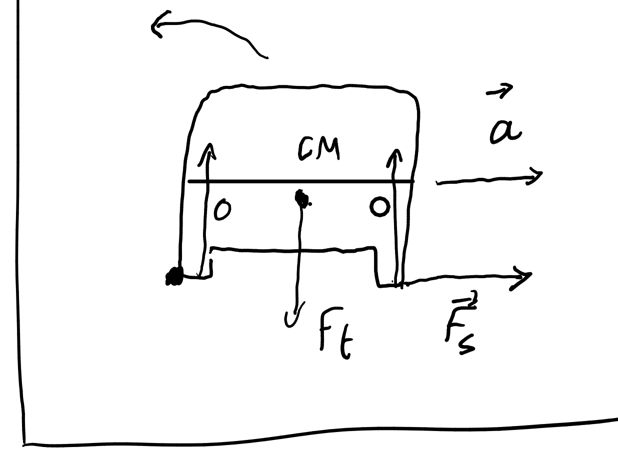
$$\tan\theta < \frac{F_a}{F_t}$$



$$F_a = \frac{mv^2}{R}$$



In sistema inerziale



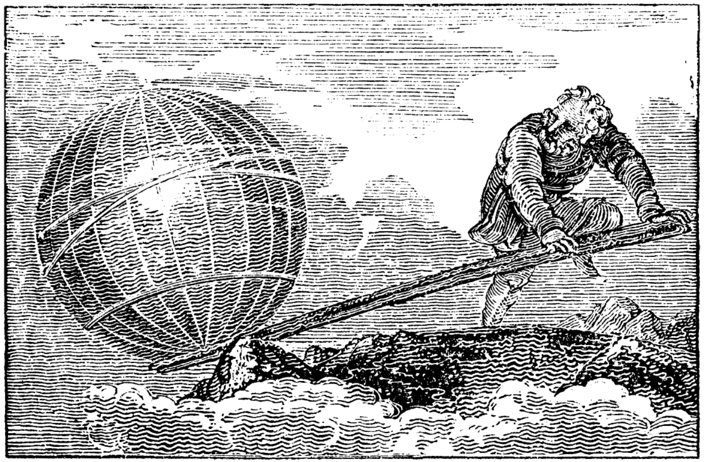
$$\tan\theta = \frac{\cancel{m}v^2/R}{\cancel{m}g}$$

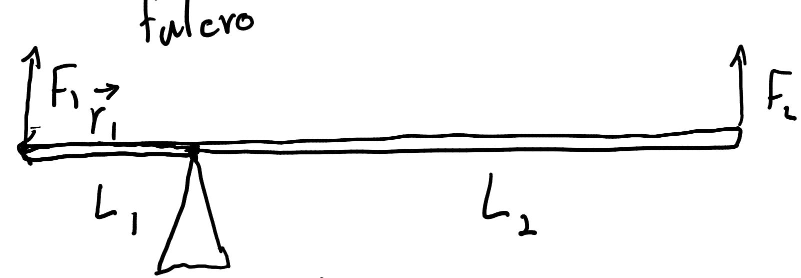
$$v^2 = \frac{Rg}{\tan\theta}$$

$$\boxed{v = \sqrt{gR\tan\theta}}$$

Ribaltamento

Leve ed ingrenaggi

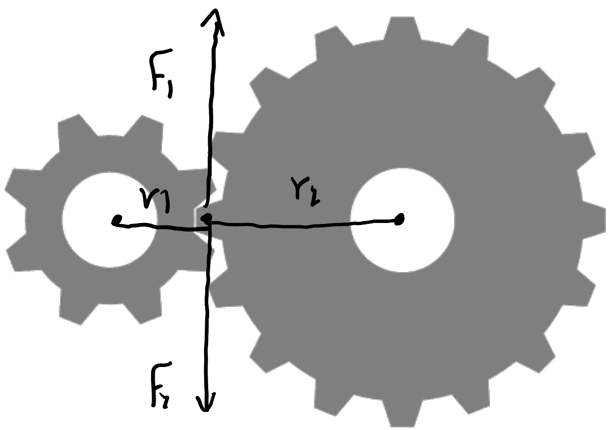




equilibrio: $\sum_i \vec{\tau} = 0 = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$

$= -F_1 L_1 + F_2 L_2$

$F_1 L_1 = F_2 L_2 \qquad F_1 = F_2 \dfrac{L_2}{L_1}$

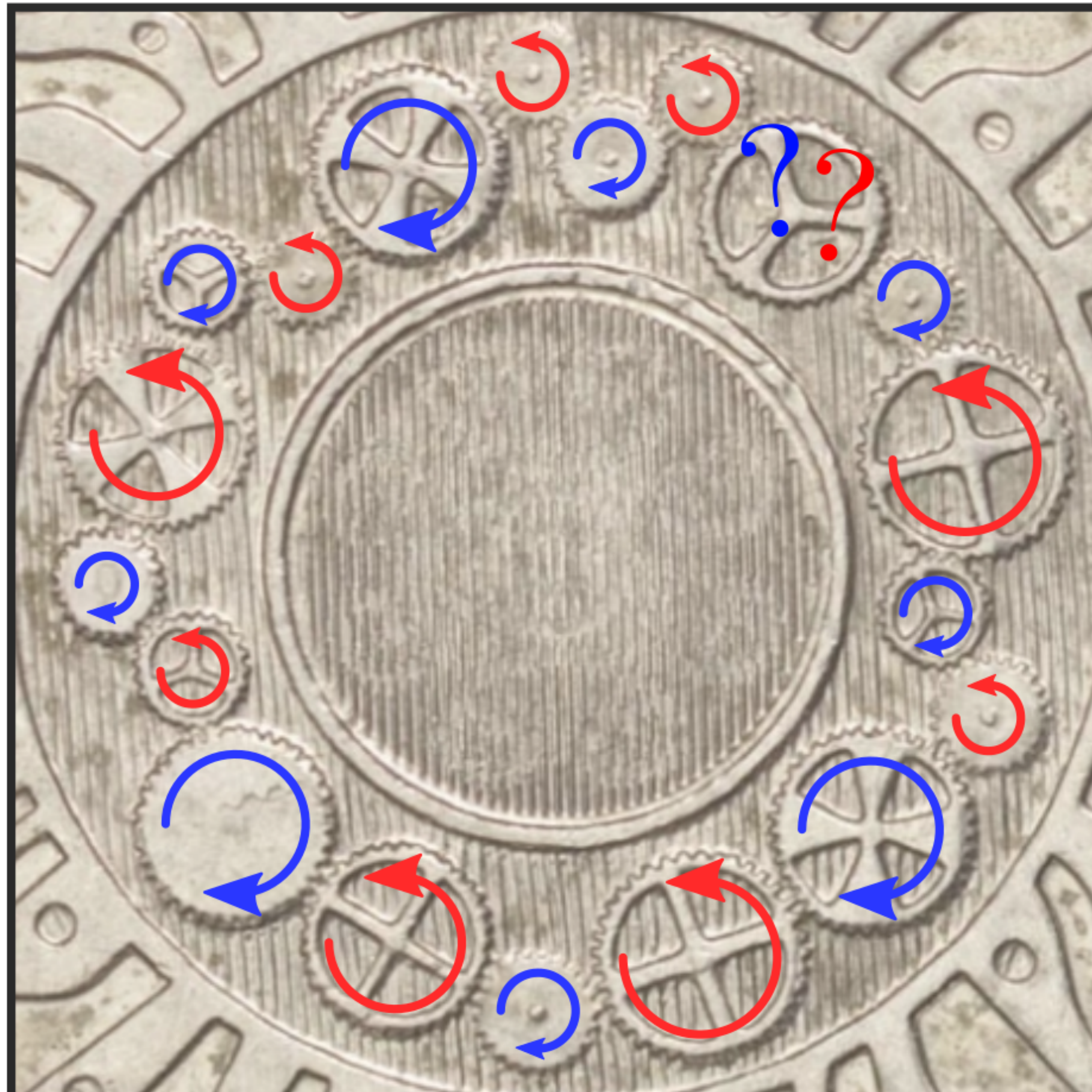


$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= r_1 F_1 \\ \tau_2 &= r_2 F_2 \end{aligned}\right\} \qquad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \tau_1 = \tau_2 \frac{r_1}{r_2}$$

$$\left(r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \qquad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

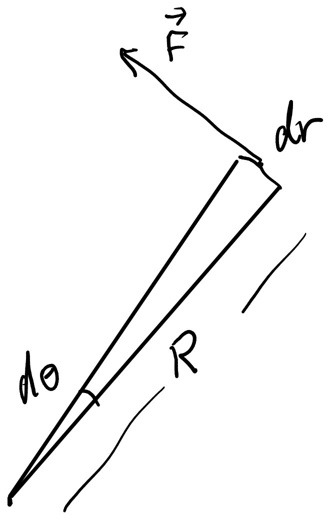
Leve ed ingranaggi



Potenza

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \vec{v}\, dt \qquad dW = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$



$$dr = R\, d\theta = R \omega\, dt$$

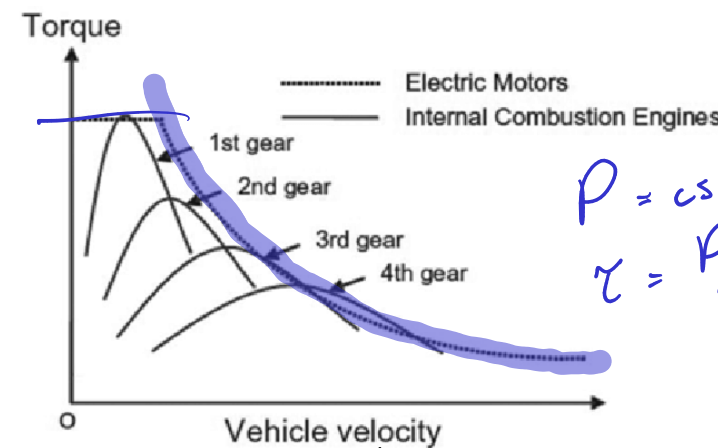
$$F\, dr = F R\, \omega\, dt = dW$$

$$P = \underbrace{F R}\, \omega$$

$$= \tau\, \omega$$

in generale: $\boxed{P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}}$

Momento di Forza



velocità

$P = \text{cst.}$

$\tau = P/\omega$

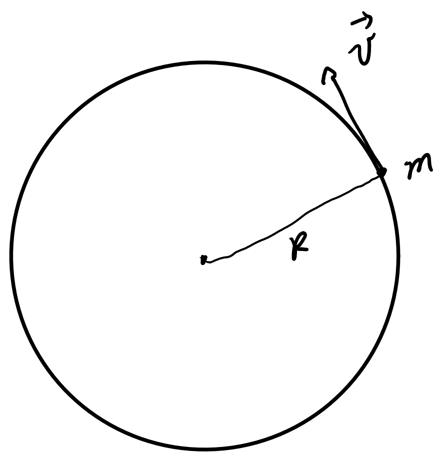
Momento angolare

Momento angolare di un punto materiale: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

dipende dell'origine scelta

quantità di moto

Caso particolare: moto circolare:



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = mR^2\vec{\omega}$$

$v = R\omega$

$|\vec{r}| = R$

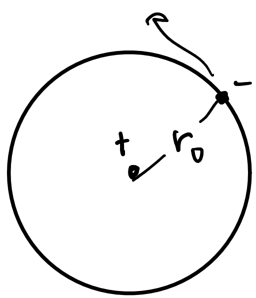
Momento angolare

* Momento angolare della terra intorno al Sole:

$$\ell = mR^2\omega = m_t \cdot d_{s-t}^2 \cdot \frac{2\pi}{\underbrace{T}_{1\,\text{anno}}} = 2.7\times 10^{40}\ \mathrm{kg\,m^2/s}$$

* Elettrone in orbita intorno un protone (idrogeno)

costante di Planck



Modello di Bohr

$$\ell = \hbar = 1.05\times 10^{-34}\ \mathrm{kg\,m^2/s}$$

r_0 : raggio di Bohr

$$r_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar T}{2\pi m}} \qquad T = 1.6\times 10^{-16}\ \mathrm{s}$$

$$= 5.4\times 10^{-11}\ \mathrm{m} = 0.54\ \mathrm{\mathring{A}}$$

$$1\ \mathrm{\mathring{A}} = 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Momento angolare e dinamica

Punto materiale:
$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{\tau}}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}} \qquad \left(\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

2ª legge di Newton per il moto rotatorio

$\vec{\ell}$ e $\vec{\tau}$ con la stessa origine in un sistema inerziale

Equazioni cardinali della meccanica

Sistema di punti materiali

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$

momento angolare totale di un sistema di punti materiali

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{l}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i$$

3ª legge di Newton ⇒ tutti i momenti di forza interni si cancellano

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{ext}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

Quadro generale

$$
\begin{tikzcd}
\vec{r} \arrow[r, "d/dt"] \arrow[drr, dash, bend right, "W"'] & \vec{v} \arrow[r, "d/dt"] \arrow[d, "\times m"] \arrow[dr, dash, "P"] & \vec{a} \arrow[d, "\times m"] \\
& \vec{p} \arrow[r, "d/dt"] & \vec{F}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\theta \arrow[r, "d/dt"] \arrow[drr, dash, bend right, "W"'] & \vec{\omega} \arrow[r, "d/dt"] \arrow[d, "\times I"] \arrow[dr, dash, "P"] & \vec{\alpha} \arrow[d, "\times I"] \\
& \vec{\ell} \arrow[r, "d/dt"] & \vec{\tau}
\end{tikzcd}
$$

Equilibrio statico di un corpo rigido

Sapiamo già: $\sum \vec{F}_{ext} = 0$ $\Rightarrow$ C.M. velocità costante (quantità di moto conservata)

Ora $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$ $\Rightarrow$ velocità angolare costante (momento angolare conservato)

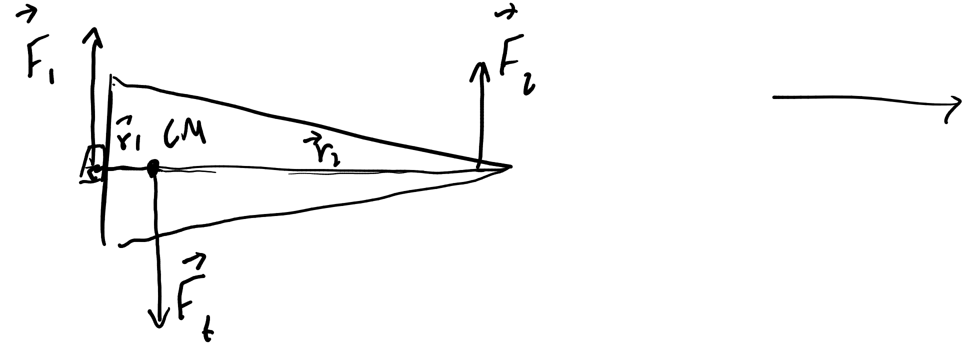
in particolare: un corpo a riposo rimane a riposo

Condizioni per l'equilibrio statico:

$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \qquad \sum \vec{\tau} = 0}$$

importante: si può scegliere qualsiasi punto di riferimento!

Equilibrio statico



$$\sum_i \vec F = 0$$

$$\vec F_1 + \vec F_2 + \vec F_t = 0$$

$$F_1 + F_2 = mg \quad (*)$$

$$\sum_i \vec \tau = 0$$

$$\vec r_1 \times \vec F_1 + \vec r_2 \times F_2 = 0$$

$$x_1 F_1 - x_2 F_2 = 0$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{x_2}{x_1} \quad (**)$$

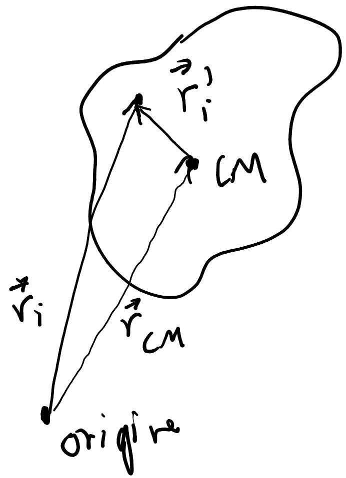
$$F_1 = F_2 \frac{x_2}{x_1} \quad (*)$$

$$F_2 \left(\frac{x_2}{x_1} + 1 \right) = mg \quad (**)$$

$$F_2 = \frac{mg}{1 + x_2/x_1}$$

$$F_1 = \frac{mg}{1 + x_1/x_2}$$

Orbita e spin



$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i'$$

posizione relativa al C.M.

$$\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

relativo all'origine scelta

$$= \vec{r}_{CM} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i' \times \vec{p}_i$$

Momento angolare totale:

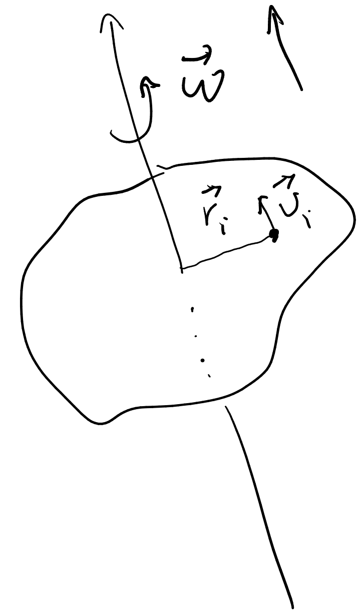
$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \vec{r}_{CM} \times \underbrace{\sum_i \vec{p}_i}_{\vec{p}_{CM}} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i$$

$$= \underbrace{\vec{r}_{CM} \times \vec{p}_{CM}}_{\vec{L}_O \text{ "orbitale"}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i}_{\vec{L}_S \text{ "spin"}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_O + \vec{L}_S}$$

Corpo rigido

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i$$
$$= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$
$$= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$
$$= \sum_i m_i r_i^2 \vec{\omega}$$
$$= I\vec{\omega}$$



$$|\vec{v}_i| = |\vec{r}_i|\omega$$

$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

e.g momento angolare di spin della terra

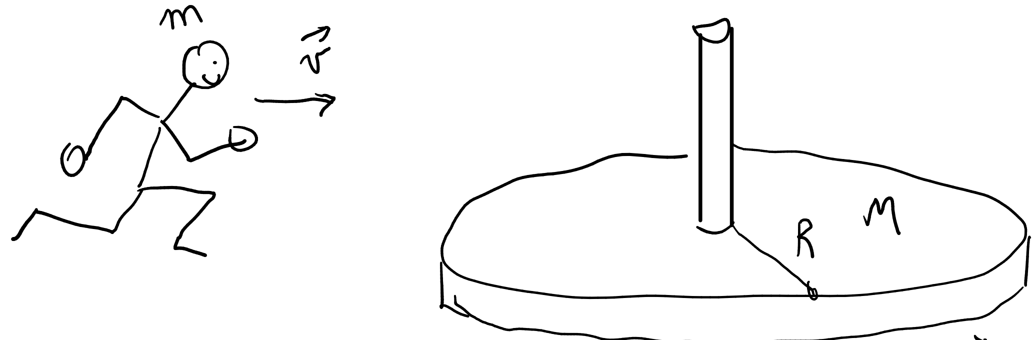
$$L = I\omega$$
$$\simeq \frac{2}{5} M R^2 \omega$$
$$= \frac{2}{5} M R^2 \frac{2\pi}{T} = 7 \times 10^{33}\ \mathrm{kg\,m^2/s}$$

Conservazione del momento angolare

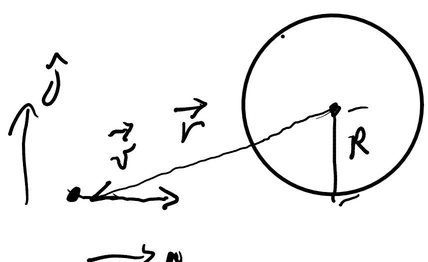
Già visto: $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f$

Ora: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$

Un bambino (velocità $\vec{v}$, massa m) salta su una giostra inizialmente a riposo. Qual è la velocità angolare del sistema dopo?

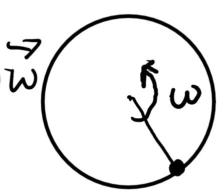


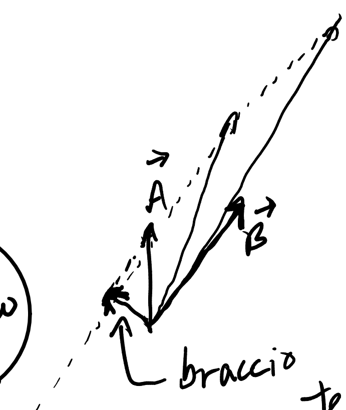
Nessun momento di forza esterno $\Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$



$$\vec{L}_i = \vec{r} \times m\vec{v} = mRv\hat{k}$$

$$\vec{L}_f = (I_g + I_b)\vec{\omega} = \left(\tfrac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\vec{\omega}$$

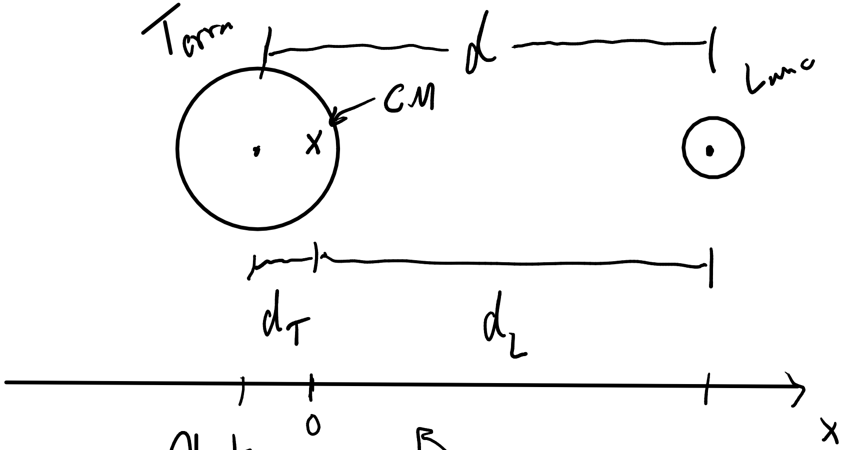




$$L_i = L_f \qquad \omega\left(\tfrac{1}{2}M + m\right)R^{\cancel{2}} = m\cancel{R}v$$

$$\omega = \frac{mv}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R}$$

Conservazione del momento angolare



sistema terra-luna: il CM non è al centro della terra

$$x_{CM} = 0 = \frac{-m_T d_T + m_L d_L}{m_T + m_L}$$

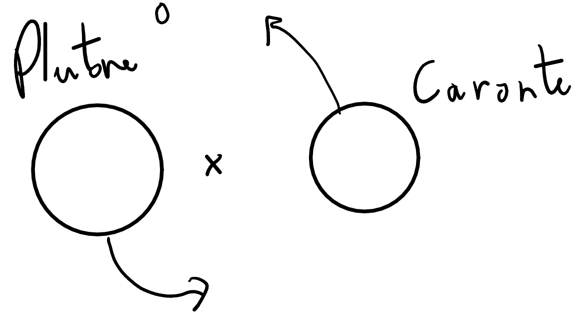
$$m_T d_T = m_L d_L$$

(... calcoli interessanti rivoluzioni sincrone)

$$d_T = \frac{m_L}{m_T} d_L$$

$$d = d_T + d_L = d_L\left(1 + \frac{m_L}{m_T}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} d_L &= d\,\frac{m_T}{m_T + m_L} \\ d_T &= d\,\frac{m_L}{m_T + m_L} \end{aligned}}$$



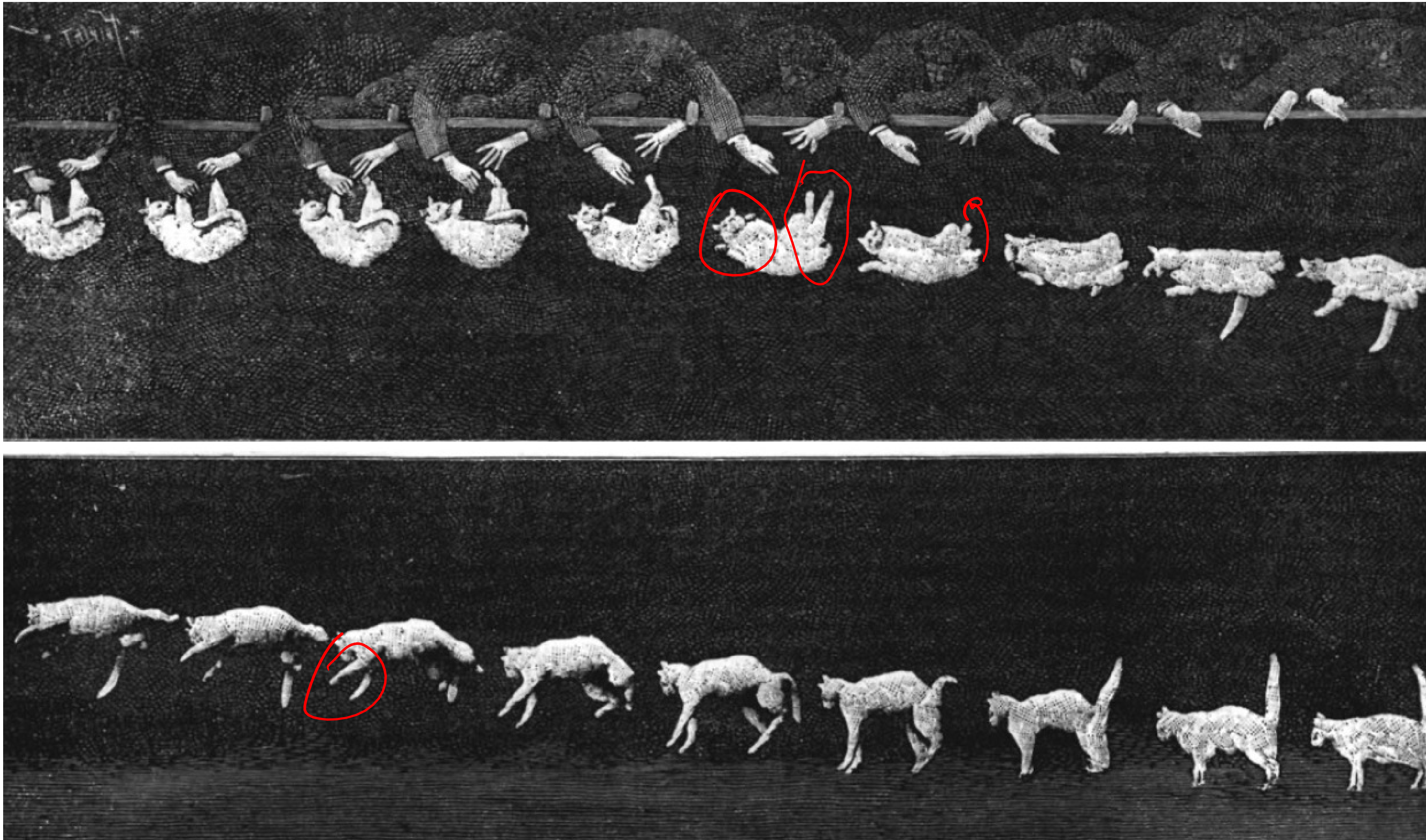
$$\vec{L}_0 = (m_T d_T^2 + m_L d_L^2)\,\omega$$

$$\vdots$$

$$= \frac{m_T m_L}{m_T + m_L} d^2 \omega$$

"massa ridotta"

Conservazione del momento angolare

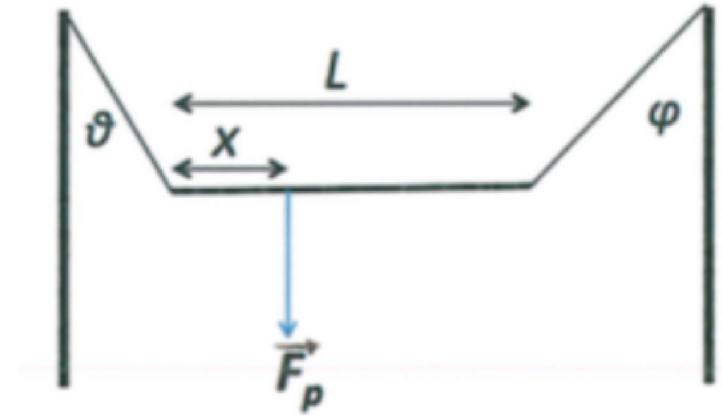


Conservazione del momento angolare

$\omega_1 > \omega_2$

Prova scritta 13.09.2018

Problema 2. Un'asta NON OMOGENEA di lunghezza L=101 cm e forza peso F_p=2.0 N, in quiete e in posizione orizzontale, è sospesa a due fili di massa trascurabile, come illustrato in figura. I due fili formano con la verticale gli angoli ϑ=30° e $\boldsymbol{\varphi}$=45°.

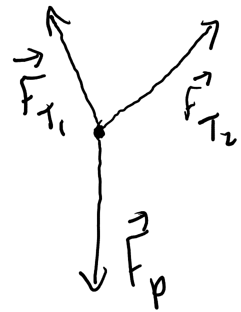


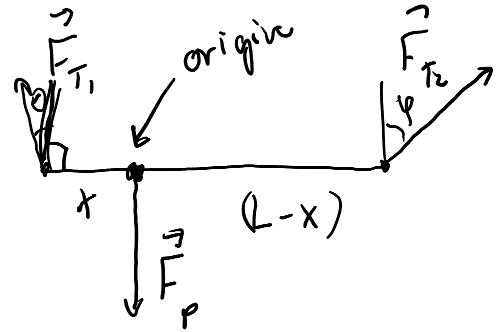
(a) Disegnare il diagramma a corpo libero delle forze applicate all'asta.

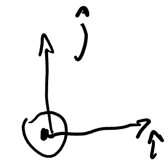
(b) Scrivere le condizioni di equilibrio statico per l'asta in questo caso specifico e determinare i moduli di tutte le forze applicate all'asta.

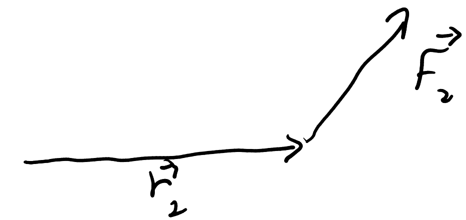
(c) Determinare la distanza x tra il centro di massa dell'asta e la sua estremità a sinistra.

a)







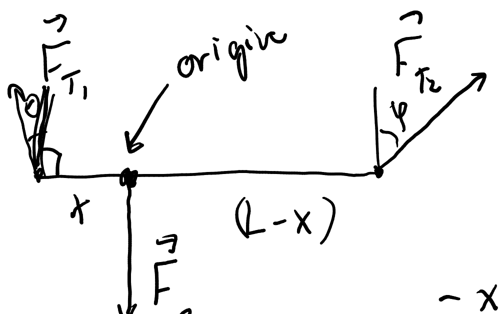


b) $\sum_i \vec F_{ext} = 0$

$\vec F_{T_1} + \vec F_{T_2} + \vec F_p = 0$

x: $-F_{T_1}\,\text{sen}\,\theta + F_{T_2}\,\text{sen}\,\varphi = 0$ (*)

y: $F_{T_1}\cos\theta + F_{T_2}\cos\varphi - F_p = 0$ (**)

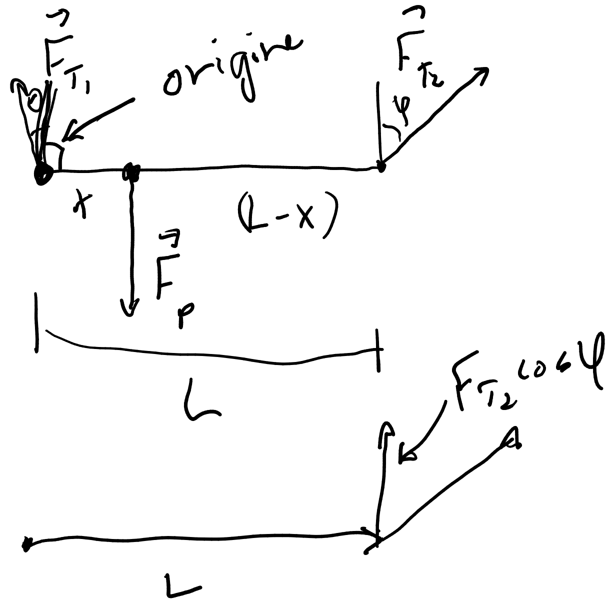


Origine al C.M.

$$\vec\tau_{T_1} + \vec\tau_{T_2} + \overbrace{\vec\tau_p}^{0} = 0 \quad \leftarrow \sum_i \vec\tau_{ext} = 0$$

$$-x\,F_{T_1}\cos\theta\,\hat k + (L-x)\,F_{T_2}\cos\varphi\,\hat k = 0$$

Origini al estremo sinistra dell'asta



$$\vec{\tau}_{T_1} + \vec{\tau}_{T_2} + \vec{\tau}_p = 0$$

$$0 + L F_{T_2} \cos\varphi \, \hat{k} - x F_p = 0 \quad (***)$$

$$(***) \quad F_{T_2} \cos\varphi = \frac{x}{L} F_p \qquad F_{T_2} = \frac{x/L}{\cos\varphi} F_p$$

$$(**) \quad F_{T_1} \cos\theta + \frac{x}{L} F_p - F_p = 0$$

$$F_{T_1} \cos\theta = F_p \left(1 - \frac{x}{L} \right) \qquad F_{T_1} = \frac{(1 - x/L)}{\cos\theta} F_p$$

$$(*) \quad F_{T_1} \,\mathrm{sen}\,\theta = F_{T_2} \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

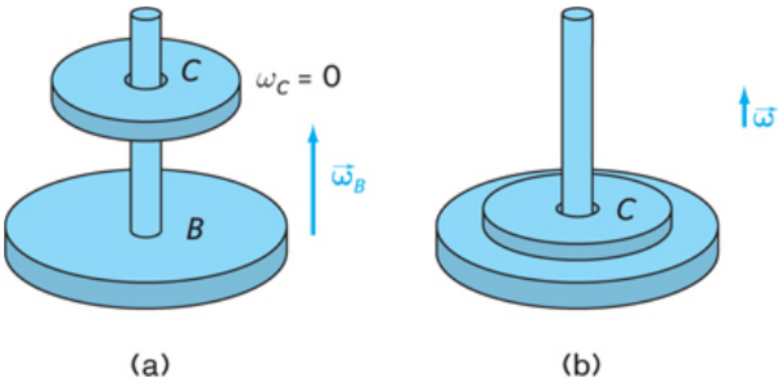
$$(1 - x/L) \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} \cancel{F_p} = x/L \, \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} \cancel{F_p}$$

$$(L - x) \tan\theta = x \tan\varphi$$

$$x (\tan\varphi + \tan\theta) = L \tan\theta$$

$$x = L \frac{\tan\theta}{\tan\varphi + \tan\theta}$$

13.28 Il disco B ruota liberamente con velocità angolare ω_B ed è solidale con un'asta cilindrica che ne sporge lungo l'asse di rotazione. Il disco C ha un foro al centro che consente di infilarlo sull'asta, come mostra la Figura E13.9; il disco C, inizialmente in quiete, viene lasciato cadere sul disco B. (a) Si determini la velocità angolare del sistema dopo che l'attrito tra B e C li ha portati a una velocità angolare comune. (b) Qual è la variazione dell'energia cinetica del sistema? Si esprimano le risposte in termini di ω_B, I_B e I_C. (c) Si calcolino i valori numerici delle espressioni trovate nelle parti (a) e (b) quando $I_B = 0.20\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, $I_C = 0.10\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ e $\omega_B = 6.2$ rad/s.



a) Conservazione del momento angolare

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$I_B \vec{\omega}_B = (I_B + I_C)\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_B \frac{I_B}{I_C + I_B}$$

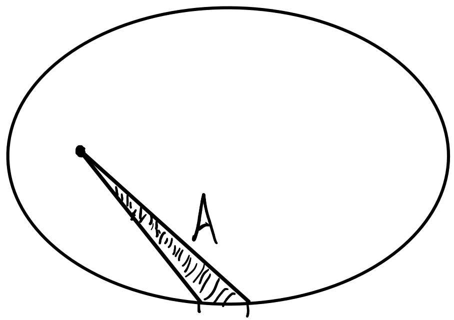
b) $\Delta E = E_f - E_i$

$$= \frac{1}{2}(I_B + I_C)\omega^2 - \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

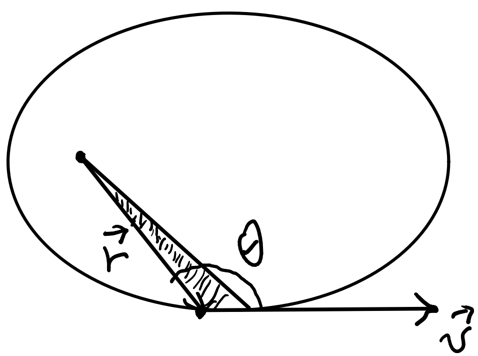
$$= \frac{1}{2}\cancel{(I_B + I_C)}\, \omega_B^2 \frac{I_B^2}{(I_B + I_C)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$$

$$= \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 \left(\frac{I_B}{I_B + I_C} - 1 \right)$$

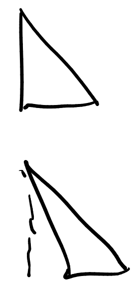
2a legge di Kelplero

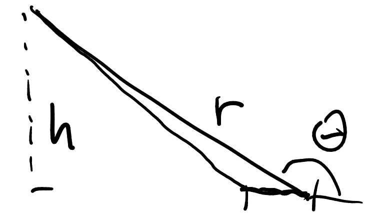


$\Delta t \propto A$



$dA =$





$dA = \frac{1}{2}$ base $\times$ altezza

$$dA = \frac{1}{2} ds \, r \, \text{sen}\,\theta$$

$$= \frac{1}{2} v \, dt \, r \, \text{sen}\,\theta$$

$$dA = \underbrace{\left(\frac{1}{2} v r \, \text{sen}\,\theta\right)}_{\frac{\ell}{2m}} dt$$

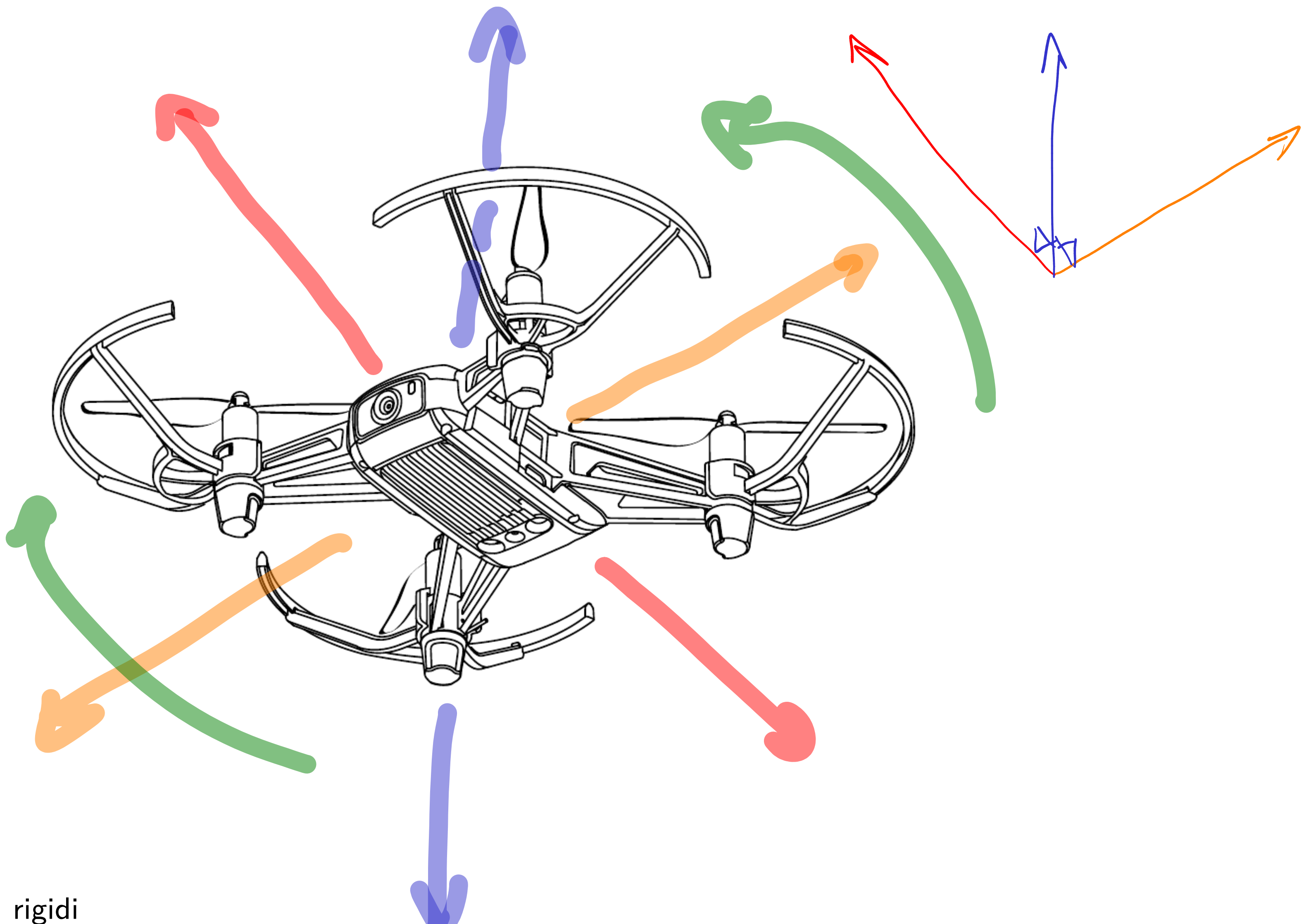
costante!

costante perché momento angolare conservato

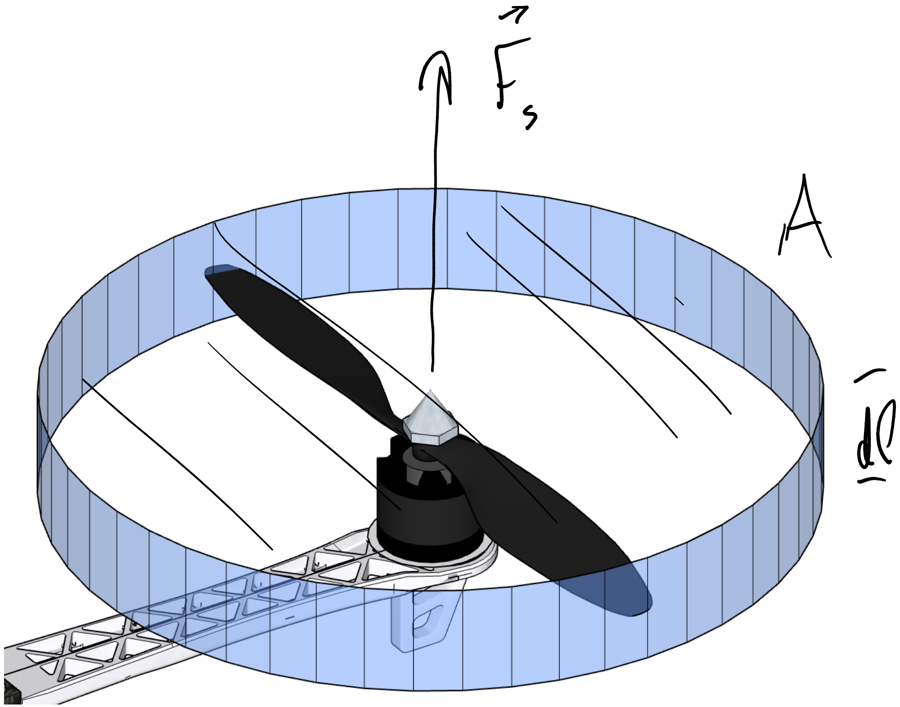
$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m r v \, \text{sen}\,\theta \, \hat{k}$$

$$\boxed{dA \propto dt}$$

La fisica del drone



Spinta ("thrust")



$$F_s = \frac{dp}{dt} = v\,\frac{dm}{dt}$$

$$dm = \rho\, dV = \rho\, d\ell\, A = \rho\, v\, dt\, A$$

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A$$

$$F_s = v^2 \rho A$$

in realtà $2A$

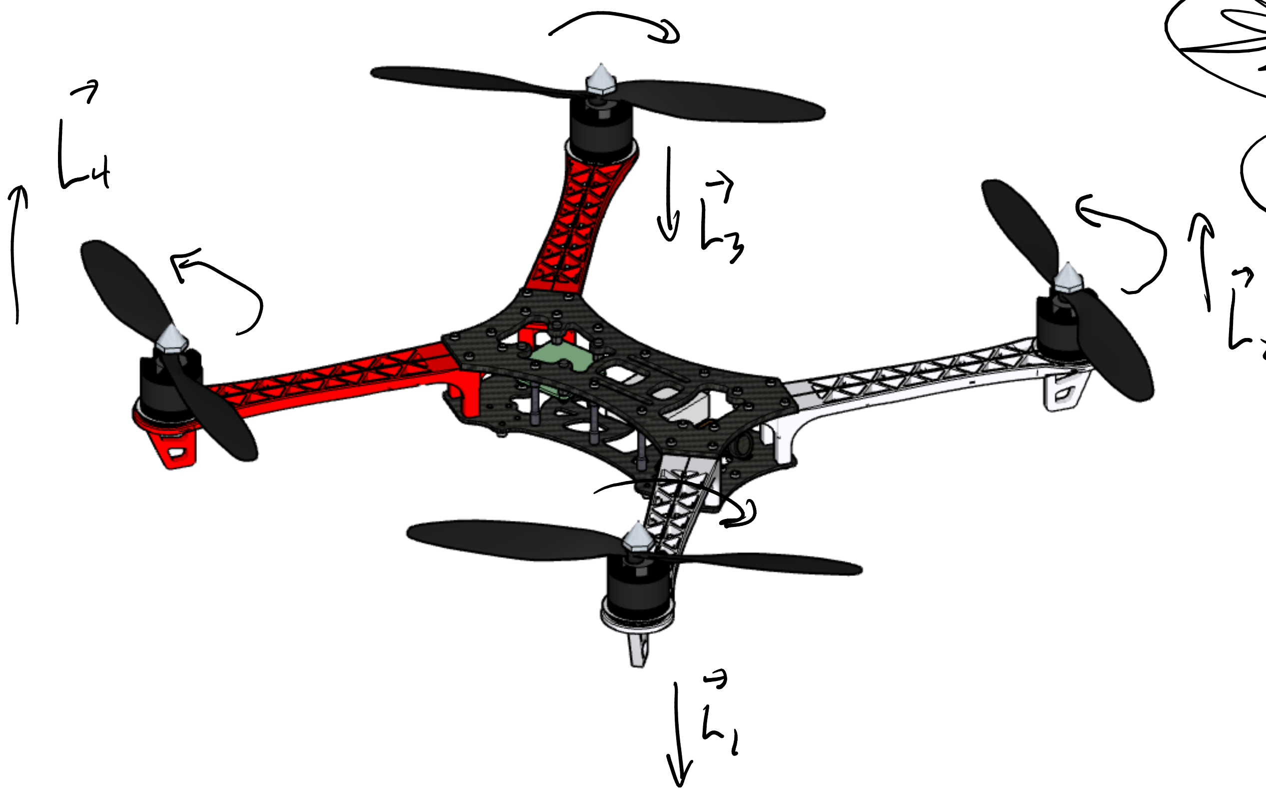
$$F_s \simeq 2A\rho v^2$$

$\rho = 1.2\ \mathrm{kg/m^3}$ $\qquad A = \pi (4\,\mathrm{cm})^2 \simeq 0.005\ \mathrm{m^2}$

$m = 0.08\ \mathrm{kg}$ $\qquad F_t = F_s$ $\qquad mg = 2v^2\rho A$

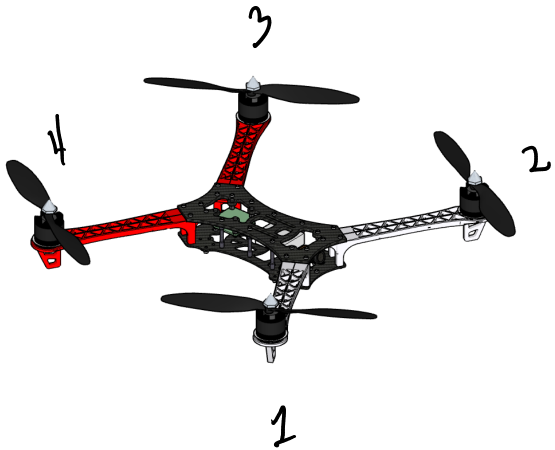
$\longrightarrow v \simeq 4\ \mathrm{m/s}$

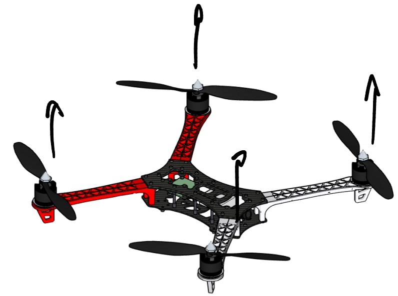
Momento angolare

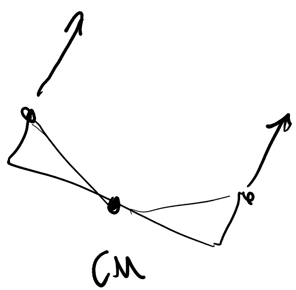


$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_2 + \vec{L}_4 = 0 \; !$$

Moto





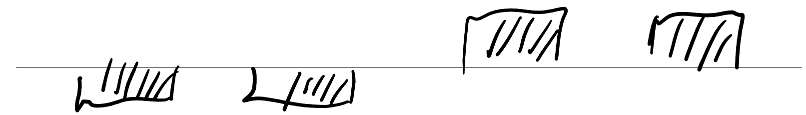


variazione dell momento angolare

Spinta ("thrust")

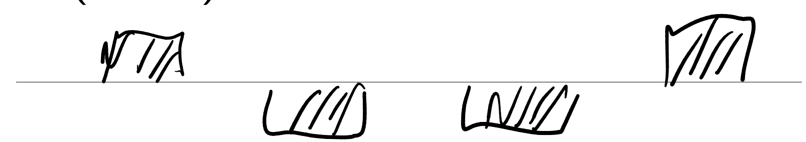
1 2 3 4

Beccheggio ("pitch")



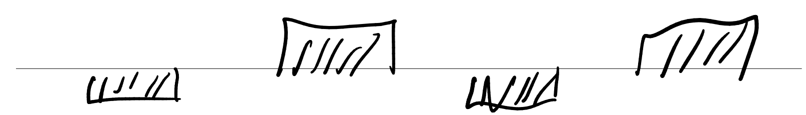
1 2 3 4

Rollio ("roll")



1 2 3 4

Imbardata ("yaw")



1 2 3 4