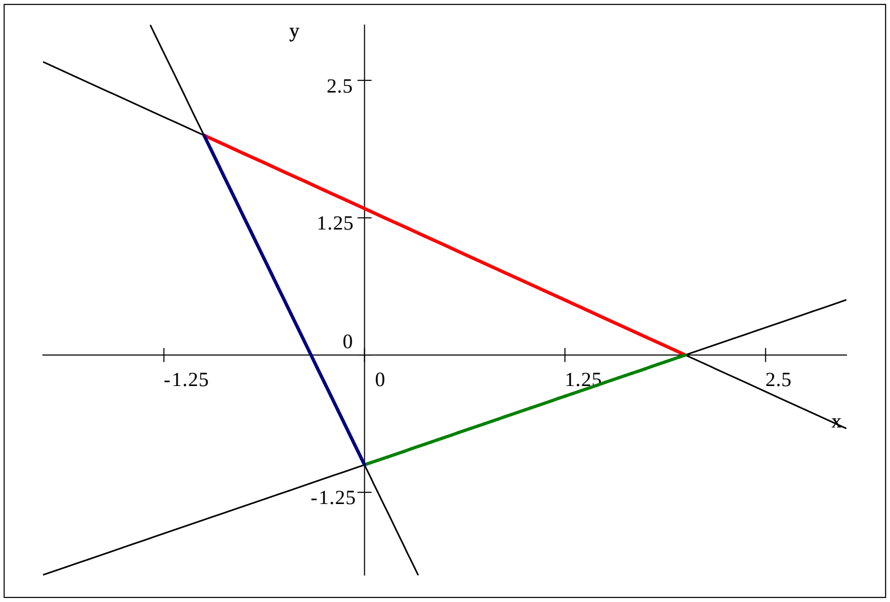
Esercizi sulle forme differenziali

1. *Calcolare il seguente integrale curvilineo*

$$\int_C \sin(x+y)\, ds$$

ove C è la frontiera del triangolo di vertici $P_1(2,0)$, $P_2(-1,2)$ e $P_3(0,-1)$.

Risoluzione Sia $\gamma : [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ la curva il cui sostegno è dato da C. Possiamo scomporre $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ come in figura



ove $C_1 = [P_1, P_2]$, $C_2 = [P_1, P_3]$ e $C_3 = [P_2, P_3]$ che sono rispettivamente i sostegni delle curve $\gamma_1 : [-1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ e $\gamma_3 : [-1,0] \to \mathbb{R}^2$ così definite:

$$\gamma_1 \quad : \quad \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t + \frac{4}{3} \end{cases} \qquad \text{con } -1 \le t \le 2$$

$$\gamma_2 \quad : \quad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t - 1 \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le 2$$

$$\gamma_3 \quad : \quad \begin{cases} x = t \\ y = -3t - 1 \end{cases} \qquad \text{con } -1 \le t \le 0$$

Quindi, scegliendo come verso di percorrenza quello antiorario e orientando la curva secondo il verso delle t crescenti, si ha che

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \sin(x+y)\, ds &= -\int_{-1}^{2} \sin\left(t - \frac{2}{3}t + \frac{4}{3}\right)\sqrt{1+\frac{4}{9}}dt = -\sqrt{13}\int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{3}t + \frac{4}{3}\right) dt \\
\int_{C_2} \sin(x+y)\, ds &= -\int_{0}^{2} \sin\left(t + \frac{1}{2}t - 1\right)\sqrt{1+\frac{1}{4}}dt = -\frac{\sqrt{5}}{3}\int_{0}^{2} \frac{3}{2}\sin\left(\frac{3}{2}t - 1\right) dt \\
\int_{C_3} \sin(x+y)\, ds &= \int_{-1}^{0} \sin(t - 3t - 1)\sqrt{1+9}dt = -\frac{\sqrt{10}}{2}\int_{-1}^{0} -2\sin(-2t-1)\, dt
\end{aligned}$$

Quindi si ottiene

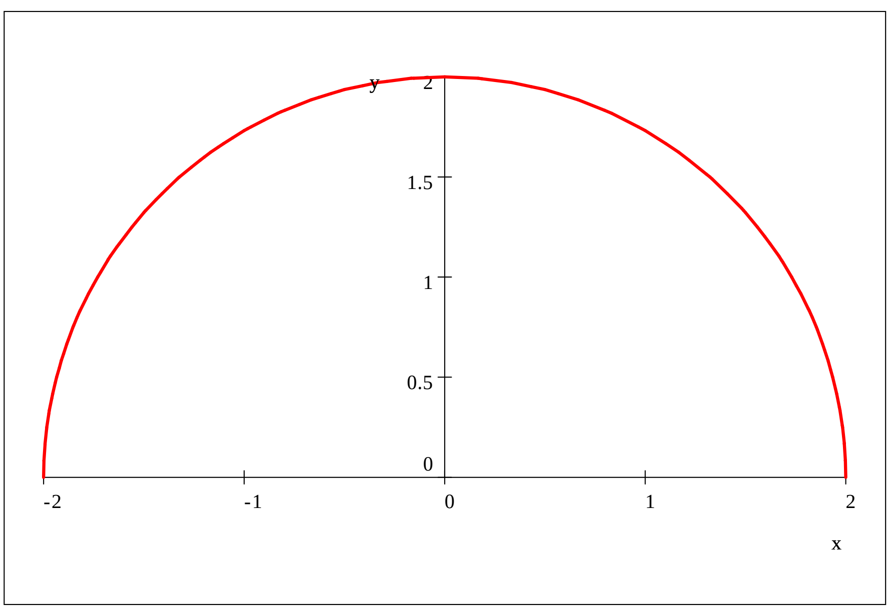
$$\begin{aligned}
\int_{C} \sin(x+y)\, ds &= \int_{C_1} \sin(x+y)\, ds + \int_{C_2} \sin(x+y)\, ds + \int_{C_3} \sin(x+y)\, ds = \\
&= \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cos 2 - \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cos 1.
\end{aligned}$$

2. *Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale*

$$\omega(x,y) = ydx + \left(x^2 - y^2\right) dy$$

lungo la curva γ ove γ è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 2 nel semipiano positivo delle y percorsa in senso orario.

Risoluzione Per la curva γ in figura



Le equazione parametriche della curva γ:$[0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ sono

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le \pi.$$

Allora l'integrale curvilineo di ω lungo γ è dato da

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= -\int_0^\pi 2\sin t\,(-2\sin t)\,dt - \int_0^\pi \left(4\cos^2 t - 4\sin^2 t\right) 2\cos t\ dt = \\
&= 4\int_0^\pi \sin^2 t\ dt - 8\int_0^\pi \cos^3 t\ dt + 8\int_0^\pi \sin^2 t\cos t\ dt = \\
&= 2\int_0^\pi (1-\cos 2t)\,dt - 8\int_0^\pi \cos t\left(1-\sin^2 t\right)dt + 8\int_0^\pi \sin^2 t\cos t\ dt = 2\pi - 1.
\end{aligned}$$

3. *Riconoscere che la forma differenziale*

$$\omega(x,y) = (\sin(x+y) + x\cos(x+y))\,dx + (x\cos(x+y))\,dy$$

è esatta e calcolarne una primitiva.

Risoluzione La forma differenziale ω è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ che è un aperto stellato rispetto ad ogni suo punto, quindi per provare che ω è esatta devo solo verificare che essa sia chiusa. Calcolo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_1}{\partial y} &= \cos(x+y) - x\sin(x+y) \\
\frac{\partial a_2}{\partial x} &= \cos(x+y) - x\sin(x+y)
\end{aligned}$$

Pertanto, essendo $\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$, si ha che ω è chiusa e quindi è esatta. Calcolo una sua primitiva. Fisso il punto $O(0,0)$ e un punto $P(\overline{x},\overline{y})$ qualsiasi e congiungo questi due punti con le curve $\gamma_1 : [0,\overline{x}] \to \mathbb{R}$ e $\gamma_2 : [0,\overline{y}] \to \mathbb{R}$ date dalle equazioni

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le \overline{x} \\
\gamma_2 &: \begin{cases} x = \overline{x} \\ y = t \end{cases} \qquad \text{con } 0 \le t \le \overline{y}
\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\overline{x}} \sin t\ dt + \int_0^{\overline{x}} t\cos t\ dt + \int_0^{\overline{y}} \overline{x}\cos(\overline{x}+t)\,dt = \overline{x}\sin(\overline{x}+\overline{y}).$$

Pertanto la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita ponendo $f(x,y) = x\sin(x+y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è una primitiva di ω.

4. *Data la forma differenziale*

$$\omega(x,y)=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy,$$

dimostrare che è esatta e determinarne una primitiva.

Risoluzione La forma differenziale ω è definita su $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Vediamo innanzitutto se ω è chiusa. Calcolo

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_1}{\partial y} &= \frac{-2y(x^2+y^2)^2-2\left(x^2+y^2\right)2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{2y^3-6x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3}\\ \frac{\partial a_2}{\partial x} &= \frac{2y\left(x^2+y^2\right)^2-2\left(x^2+y^2\right)2y2xy}{\left(x^2+y^2\right)^4}=\frac{2y^3-6x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^3}.\end{aligned}$$

Quindi ω è chiusa. Proviamo che è esatta prendendo una curva γ che giri attorno al punto $O\,(0,0)$, per esempio la curva $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$\gamma:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\qquad \text{con } 0\le t\le 2\pi.$$

e calcolando l'integrale di ω lungo γ. Scelgo come verso di percorrenza quello antiorario e calcolo

$$\begin{aligned}\int_\gamma\omega &= \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)^2}(-\sin t)\,dt+\int_0^{2\pi}\frac{2\sin t\cos t}{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)^2}\cos t\;dt=\\ &= \int_0^{2\pi}-\sin t\cos^2 t\;dt+\int_0^{2\pi}\sin t\left(1-\cos^2 t\right)dt+2\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t\;dt=0.\end{aligned}$$

Pertanto ω è chiusa. Calcoliamo ora una sua primitiva. Prendiamo il punto $P_0\,(1,0)$ e un punto $P\,(\overline{x},\overline{y})$ qualsiasi e congiungo questi due punti con le curve $\gamma_1:[1,\overline{x}]\to\mathbb{R}$ e $\gamma_2:[0,\overline{y}]\to\mathbb{R}$ date dalle equazioni

$$\begin{aligned}\gamma_1 &: \begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}\qquad \text{con } 1\le t\le\overline{x}\\ \gamma_2 &: \begin{cases}x=\overline{x}\\ y=t\end{cases}\qquad \text{con } 0\le t\le\overline{y}\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\omega+\int_{\gamma_2}\omega &= \int_1^{\overline{x}}\frac{t^2}{t^4}dt+\int_0^{\overline{y}}\frac{2\overline{x}t}{\left(\overline{x}^2+t^2\right)^2}dt=\int_1^{\overline{x}}\frac{1}{t^3}dt+\overline{x}\int_0^{\overline{y}}\frac{2t}{\left(\overline{x}^2+t^2\right)^2}dt=\\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\overline{x}}+\overline{x}\left[-\frac{1}{\overline{x}^2+t^2}\right]_0^{\overline{y}}=1-\frac{\overline{x}}{\overline{x}^2+\overline{y}^2}.\end{aligned}$$

Pertanto la funzione $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, definita ponendo $f(x,y)=1-\frac{x}{x^2+y^2}$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, è una primitiva di ω.