

Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale:

$$Q = 0 \quad W \neq 0 \quad \Delta U_{AB} = \cancel{Q} - W$$

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -m c_v (T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma - 1} (p_A V_A - p_B V_B)$$

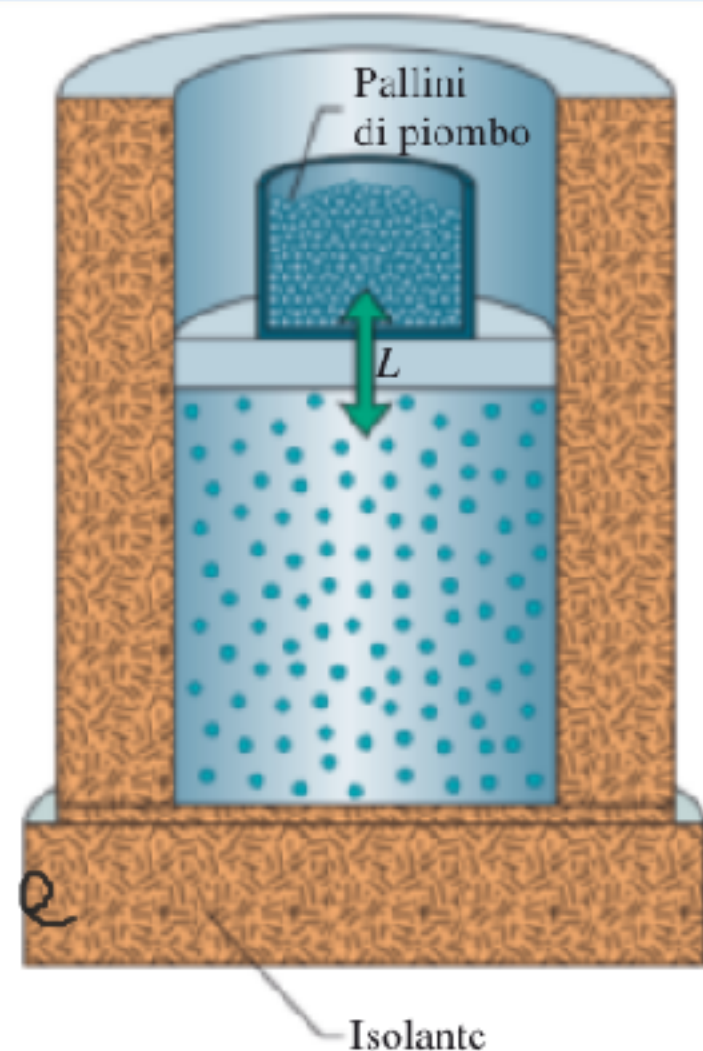
$$pV = mR\bar{T} \rightarrow \bar{T} = \frac{pV}{mR}$$

$$c_p - c_v = R$$

$$\gamma = c_p / c_v$$

$W_{AB} > 0$ se il gas si espande
($T_B < T_A$)

$W_{AB} < 0$ se il gas si comprime
($T_B > T_A$)



⇒

Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale:

Se la trasformazione è reversibile

$$dU + dW = \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ perché adiabatica}}}{dQ} \Rightarrow m c_v dT + p dV = 0^*$$

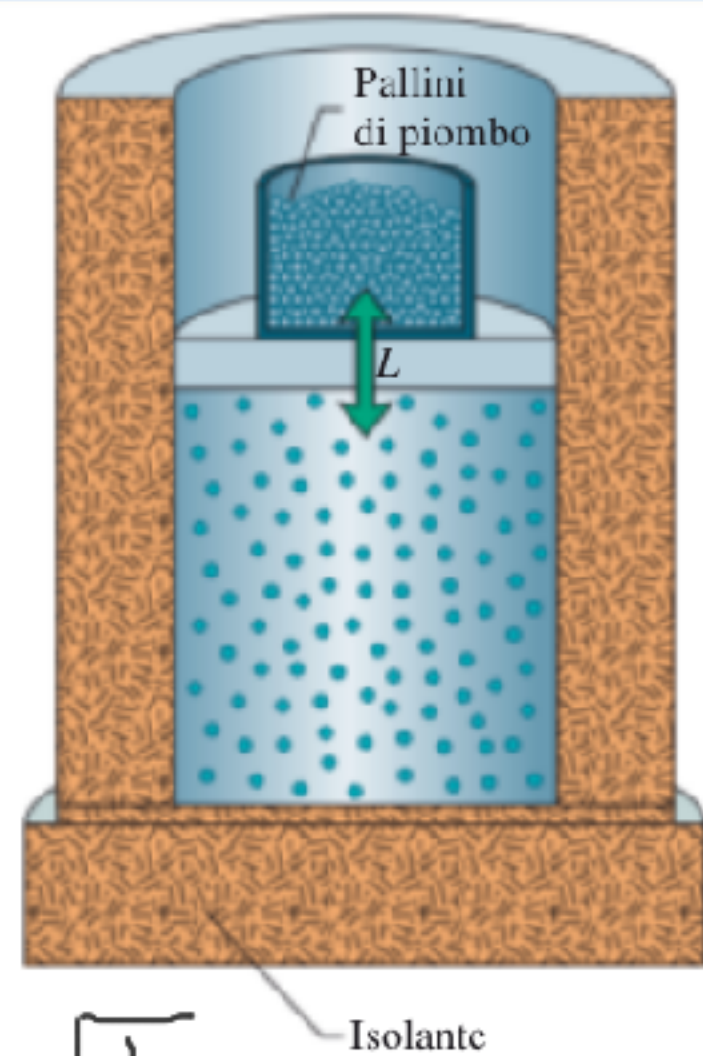
$$pV = mRT \rightarrow p = mRT/V$$

$$\Rightarrow^* m c_v dT + mRT dV/V = 0 \Rightarrow \frac{mR}{m c_v} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Integrando tra due stati A e B:

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = -\ln \frac{T_B}{T_A} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma - 1} = \ln \frac{T_B}{T_A}$$

$$\ln x^a = a \ln x \quad -\ln x = \ln \frac{1}{x} \quad \Rightarrow T_A V_A^{\gamma - 1} = T_B V_B^{\gamma - 1}$$



Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale:

$$i) TV^{\gamma-1} = \text{costante}$$

$$ii) pV^{\gamma} = \text{costante}$$

$$iii) \frac{1}{p} \frac{dp}{p} = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{dV}{V} = \text{costante}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} > 1$$

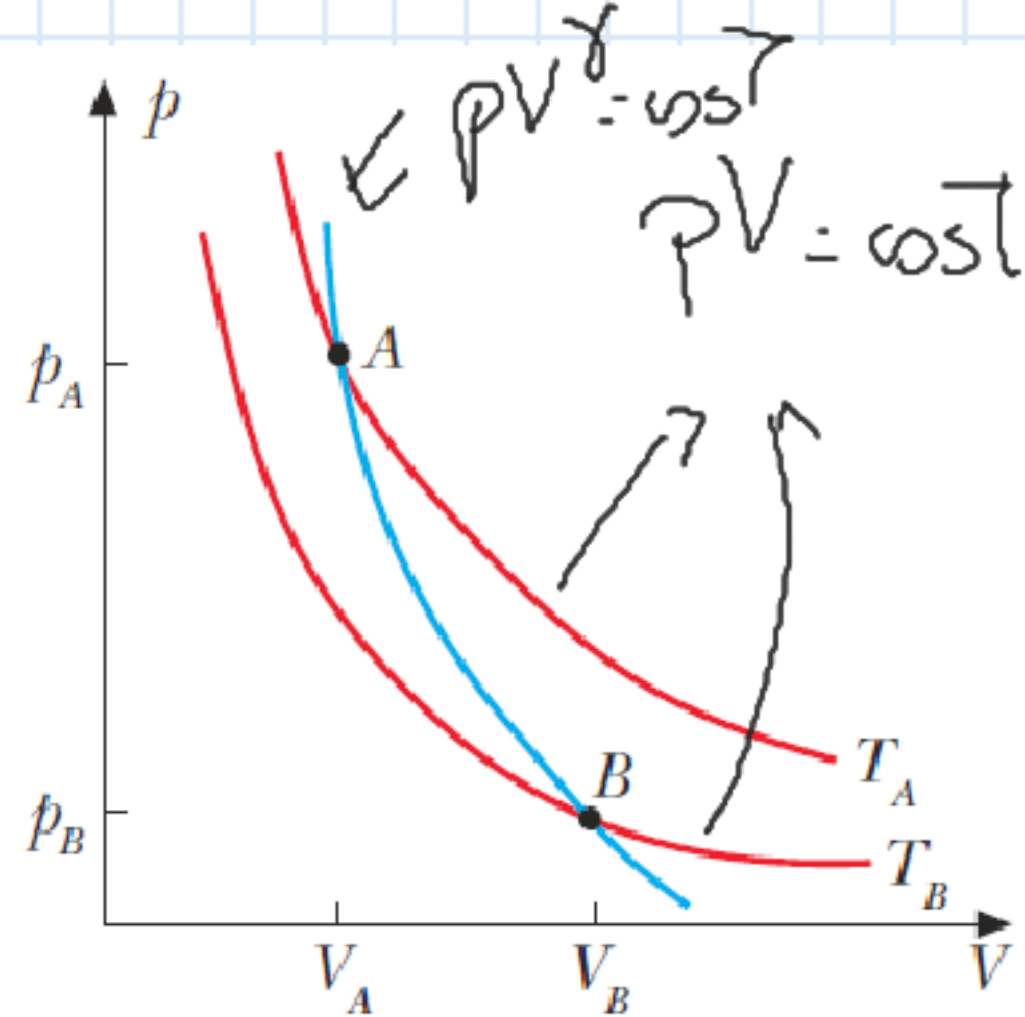
$$pV = nRT$$

$$i) \rightarrow (i)$$

$$T = \frac{pV}{nR}$$

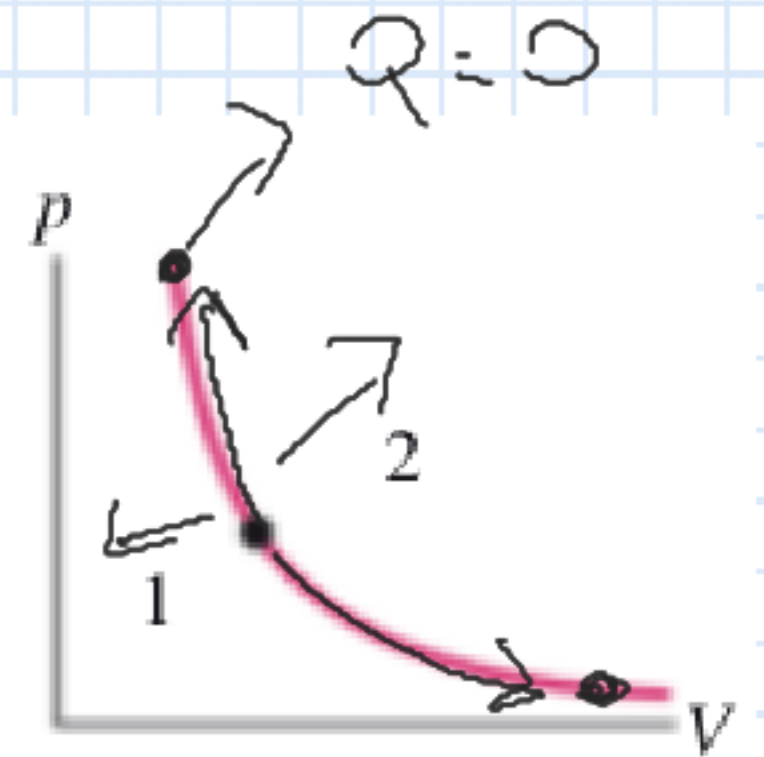
$$i) \rightarrow (ii)$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$



Esempio: Trasformazione Adiabatica Gas Ideale

6. La linea sul diagramma p - V della figura 19.17c rappresenta una curva adiabatica che divide il piano nelle due regioni 1 e 2. Il punto rappresenta lo stato iniziale di un gas. Stabilire se il calore Q scambiato con il gas è una quantità positiva, negativa o nulla quando esso subisce una trasformazione (a) seguendo la curva verso l'alto, (b) seguendo la curva verso il basso, (c) penetrando nella regione 1 e (d) penetrando nella regione 2.



a) $Q=0$

b) $Q=0$

c) $Q < 0$

d) $Q < 0$

Esempio: Atmosfera Adiabatica

Calcolare la variazione di temperatura dell'aria in funzione dell'altezza assumendo che il fenomeno possa essere ricondotto all'espansione adiabatica dell'aria calda che sale

- La variazione di pressione in funzione di h

$$dp = -\rho g dh = \frac{M m}{V} g dh = -\frac{M}{R T} p g dh \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M g}{R T} dh^*$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{M m}{V}$$

$$pV = mRT \rightarrow V = \frac{mRT}{p}$$

$$\left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$$

\Rightarrow

$$* \frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M g}{R} \approx -9.7 \frac{K}{km}$$

$\gamma_{aria} \sim 1.4 \rightarrow 28.88$

Esempio: Trasformazioni Notevoli Gas Ideali

Ordina le 4 trasformazioni secondo valori decrescenti di calore assorbito dal gas ideale:

a) $p = \text{cost}$ ISOBARA : $W_A = p \Delta V$

$$\Delta U = m c_v \Delta T$$

$$Q_A = \Delta U + W = m c_v \Delta T + p \Delta V =$$

$$= m \Delta T (c_v + R) = m c_p \Delta T$$

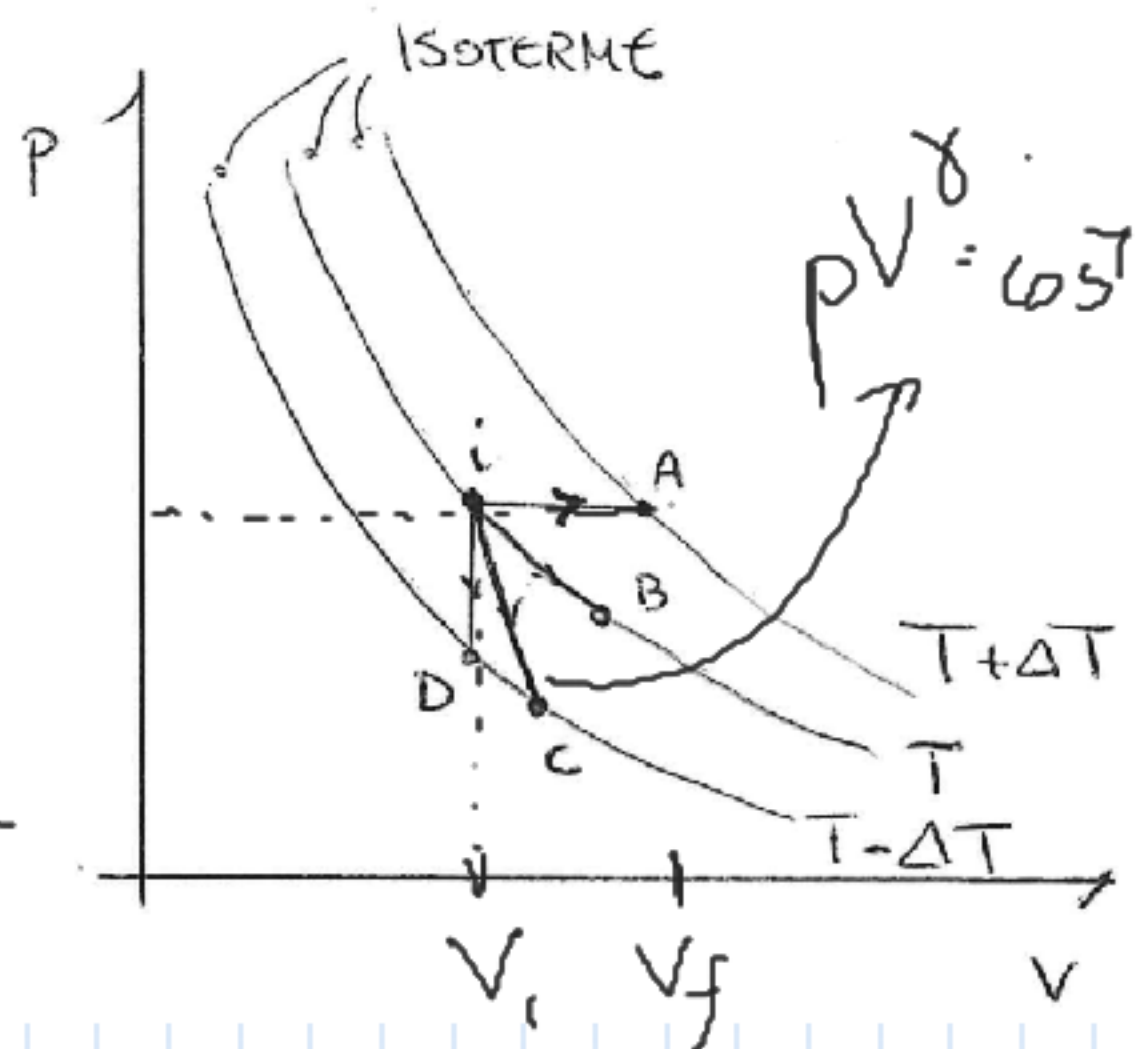
b) $T = \text{cost}$ U(T) = cost $\Rightarrow \Delta U = 0$

$$Q_B = W_B = \int_{V_i}^{V_f} p dV = m R T \ln V_f / V_i \quad Q_B < Q_A$$

c) $Q_c = 0$

d) $V = \text{cost}$ ISOCORA $W = 0$

$$Q_D: \Delta U = -m c_v \Delta T < 0$$



$$Q_A > Q_B > Q_c > Q_D$$

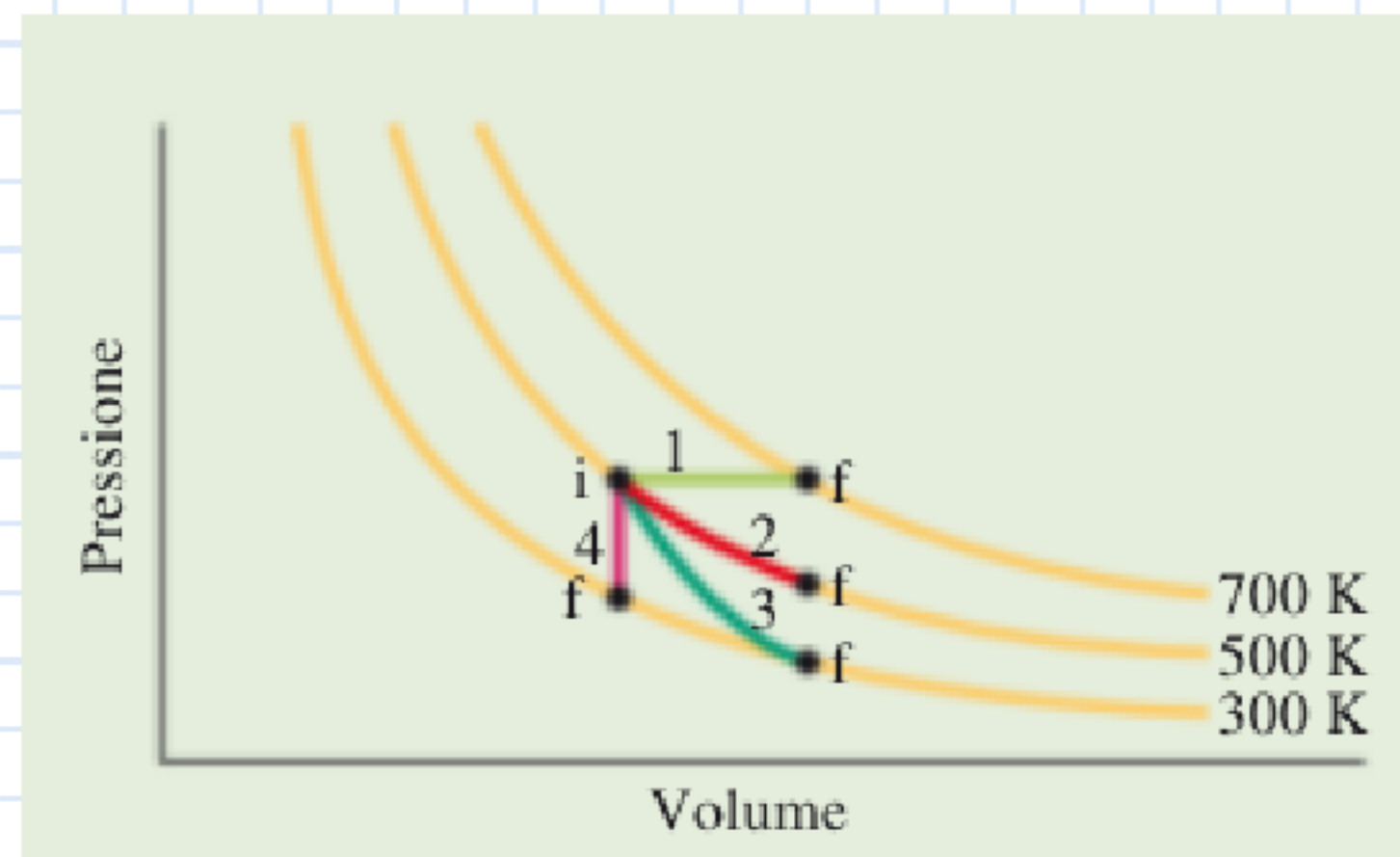
Recap: Gas Ideali

$$pV = nRT \quad (\text{legge dei gas perfetti}).$$

$$C_p = C_v + R. \quad (\text{Relazione di Mayer})$$

$$\Delta U = Q - W \quad (1^\circ \text{ Principio Termodinamica})$$

$$\Delta U = n c_v \Delta T \quad (\text{Energia Interna Gas Ideale})$$



Quantità
costante

Tipo di
trasformazione

1
2
3
4

p

T

$PV^\gamma, TV^{\gamma-1}$

V

Isobara

Isoterma

Adiabatica

Isocora

$$Q = nC_p\Delta T; L = p\Delta V$$

$$Q = L = nRT \ln(V_f/V_i); \Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$Q = 0; L = -\Delta E_{\text{int}}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} = nC_v\Delta T; L = 0$$

Teoria Cinetica dei Gas:

Per questa trattazione consideriamo:

i) gas costituito da molecole uguali, in moto continuo e disordinato

$$\vec{V}_m = \sum_i \vec{v}_i = 0 \quad g = \text{cost}$$

ii) gli urti tra le molecole e le molecole e le pareti sono elastici

$$q = s \text{ conserva}$$

iii) Non sono presenti forze intermolecolari (se non durante gli urti)

Sola forma di energia interna è l'energia CINETICA

iv) Le dimensioni delle molecole sono molto inferiori rispetto alle distanze medie delle particelle

il volume occupato dalle molecole di gas è trascurabile rispetto al V del recipiente

Pressione esercitata dal gas su una parete:

$$\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$$

lungo asse x:

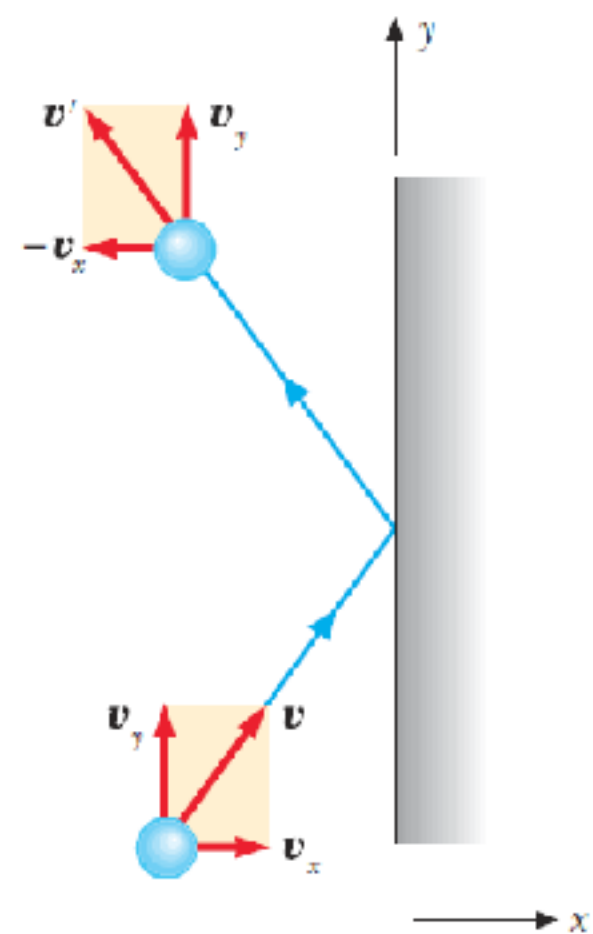
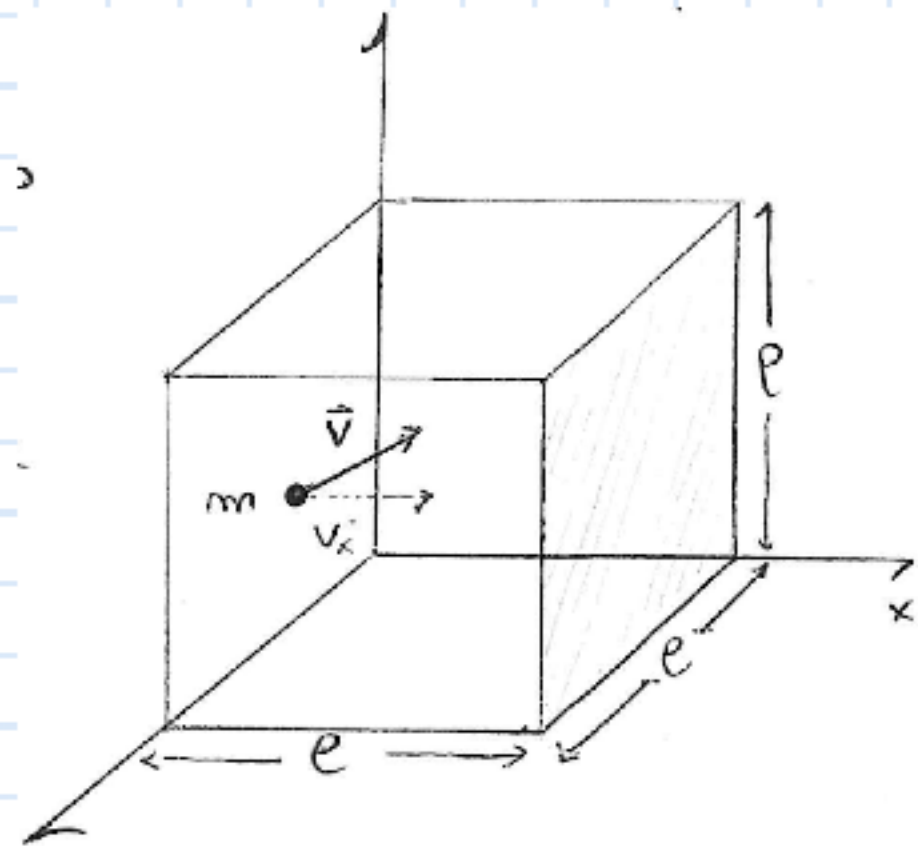
$$\Delta q = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x$$

$\vec{I}_x = -\Delta q = 2mv_x$ Impulso trasmesso alla parete
di dx in seguito all'urto

Il tempo che intercorre tra due urti sulla
parete di destra:

$$\Delta t = \frac{2e}{v_x}$$

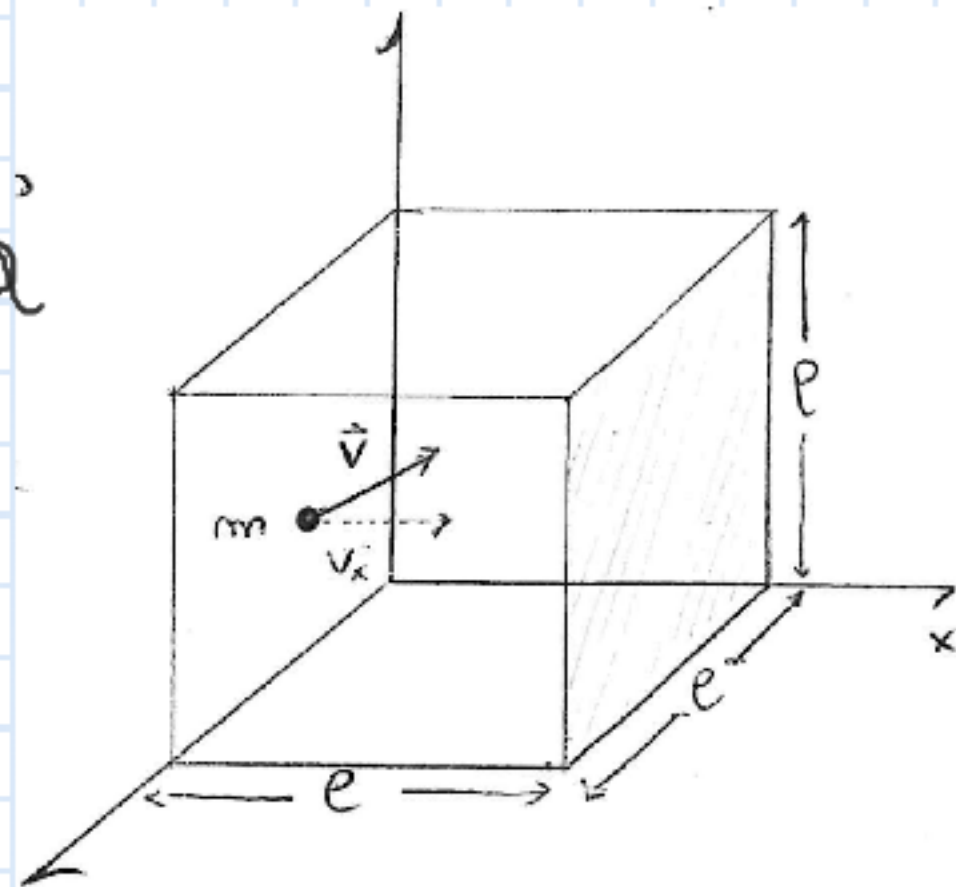
percorrere 2 volte il lato del cubo



Pressione esercitata dal gas su una parete:

La forza media esercitata dalla particella sulla parete sarà:

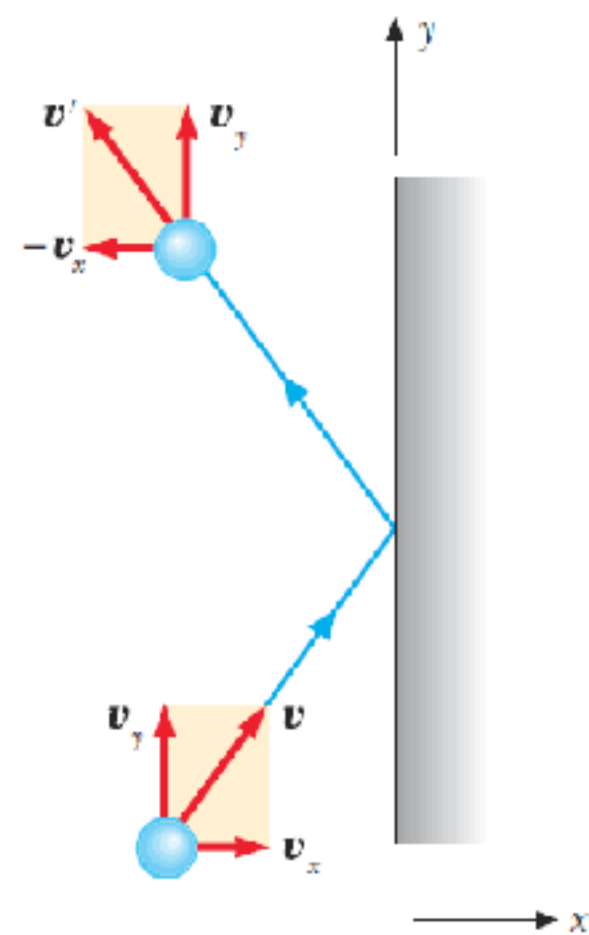
$$F_x = \frac{\Delta q_x}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2l/v_x} = \frac{mv_x^2}{l}$$



→ La forza totale esercitata da N molecole di gas sulla parete:

$$F_x^{Tot} = \sum_{i=1}^N F_{x,i} = m \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2$$

→ La pressione: $P_x = \frac{F_x^{Tot}}{e^2} = \frac{m \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2}{e^3} \Rightarrow$
 superficie della parete $\leftarrow e^2$ $\leftarrow e^3 \rightarrow V$



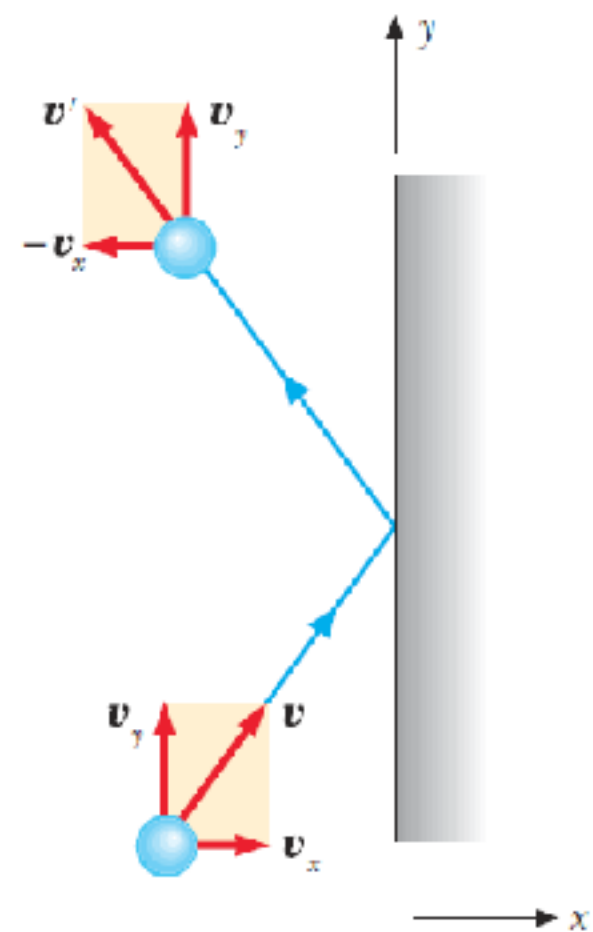
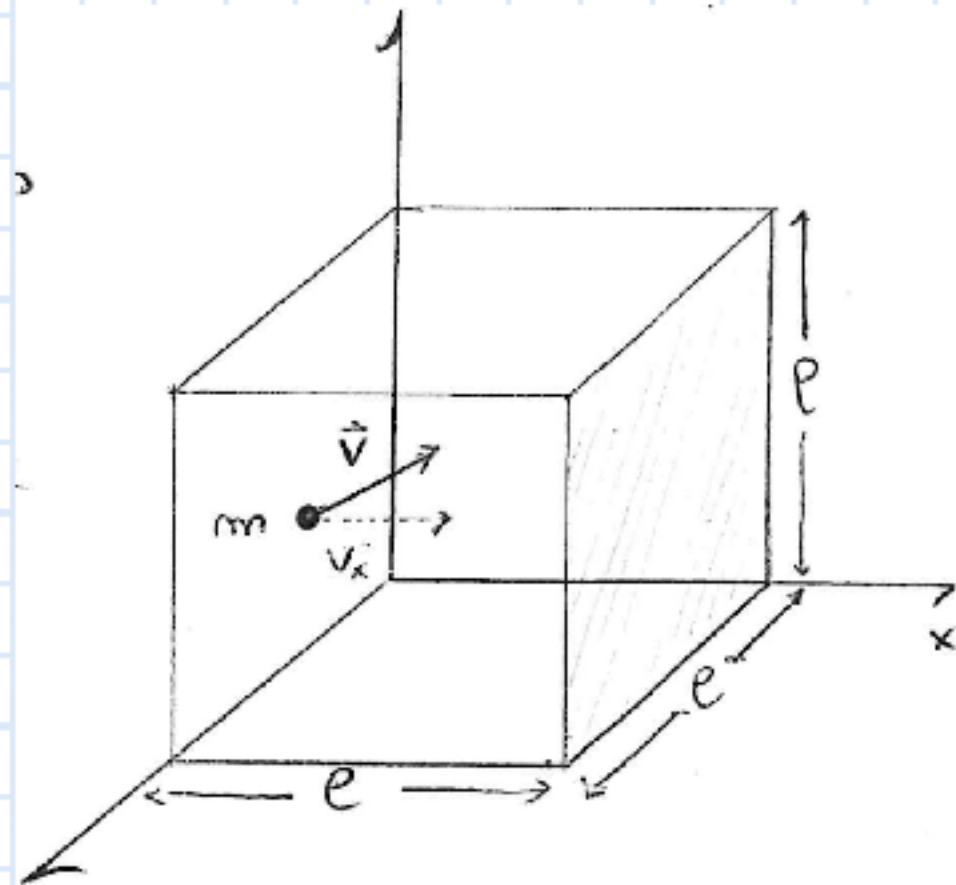
Pressione esercitata dal gas su una parete:

$$P_x = \frac{F_x}{e^2} = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 = \frac{mN}{V} \overline{v_{xi}^2}$$

$= \frac{mN}{V} \overline{v_x^2} \Rightarrow$ Velocità quadratica media lungo X

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X$$

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2)$$



Pressione esercitata dal gas su una parete:

dato che il moto è caotico

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

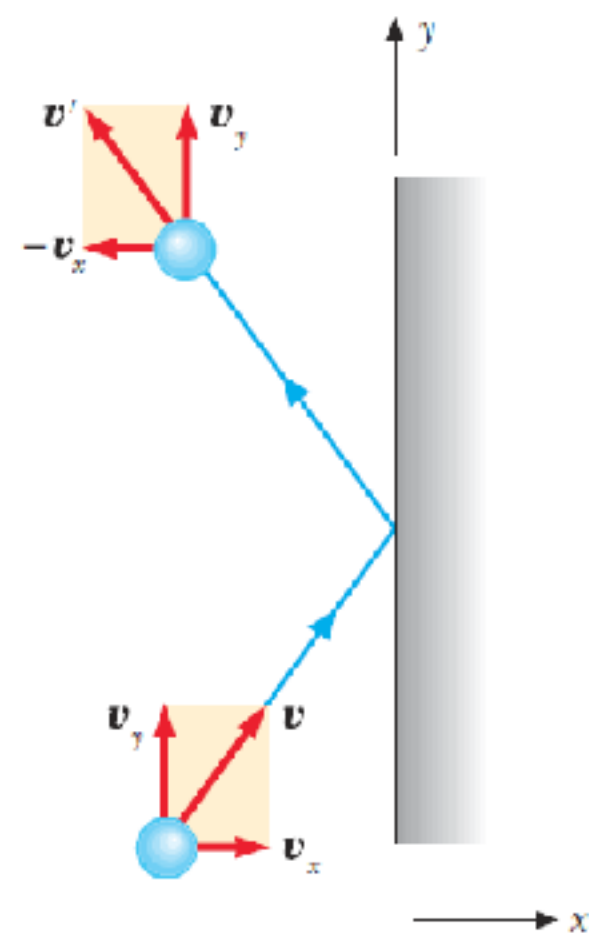
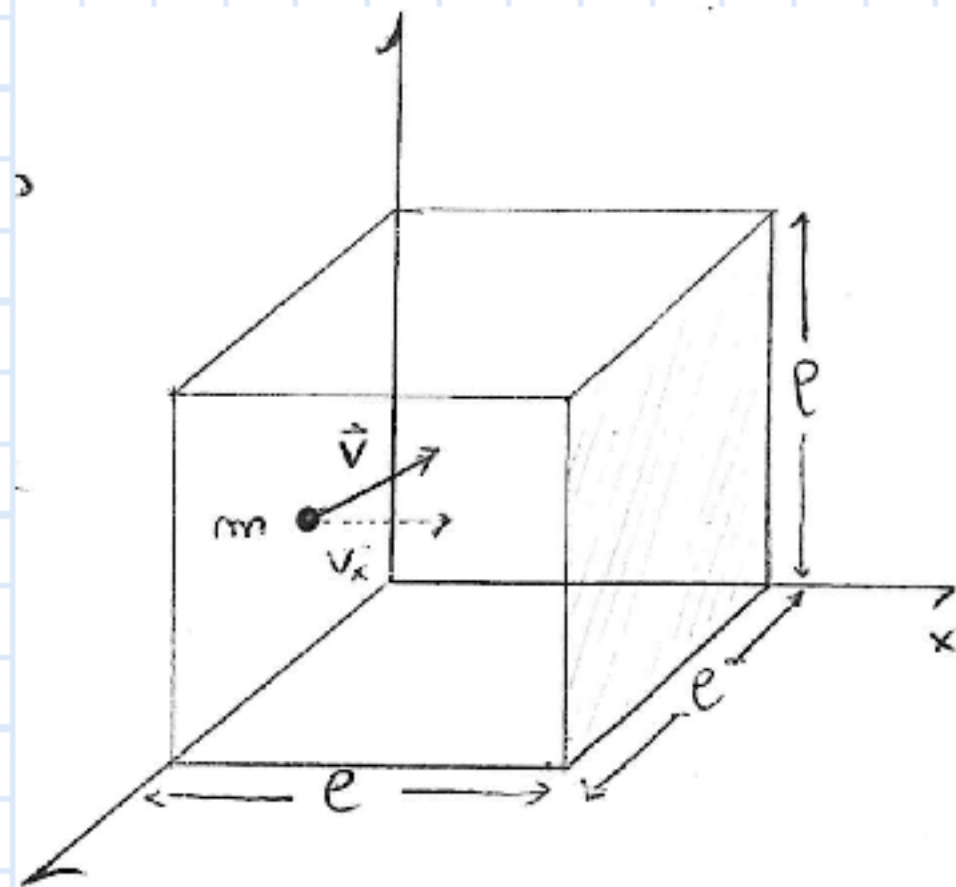
$$\Rightarrow p = \frac{Nm}{3} \overline{v^2}$$

Equazione di
Joule-Clausius-Kirchhoff

$$E_k = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{N} \sum_i v_i^2 \right] = \frac{1}{2} m \overline{v^2} *$$

$$\Rightarrow pV = \frac{2}{3} N E_k$$

Energia cinetica media
traslazionale delle molecole



• $pV = \frac{2}{3} N \bar{E}_k$ $pV = nRT$ (legge di gas ideali)

$\Rightarrow \bar{E}_k = \frac{3}{2} \frac{m}{N} RT = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{N_A} RT \right) \Rightarrow \bar{E}_k = \frac{3}{2} k_B T$

\nearrow # mole
 \searrow # molecole
 \rightarrow k_B

Energia cinetica
 Media molecole di gas

$\bar{E}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$

$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

\downarrow massa di una molecola
 \downarrow massa molare

Velocità quadratica media
 gas perfetto

Energia Cinetica e Velocità Quadratica Media di una molecola di gas Ideale:

TABELLA 19.1 Alcune velocità molecolari a temperatura ambiente ($T = 300 \text{ K}$)*

Gas	Massa molare (10^{-3} kg/mol)	v_{qm} (m/s)
Idrogeno (H_2)	2,02	1920
Elio (He)	4,0	1370
Vapore acqueo (H_2O)	18,0	645
Azoto (N_2)	28,0	517
Ossigeno (O_2)	32,0	483
Biossido di carbonio (CO_2)	44,0	412
Biossido di zolfo (SO_2)	64,1	342

Esempio: Pressione esercitata da un fascio di molecole di idrogeno H₂

•17. Un fascio di molecole d'idrogeno (H₂) viene lanciato contro un muro in una direzione che forma un angolo di 55° con la normale al muro. Tutte le molecole del fascio hanno una velocità di 1,0 km/s e una massa di $3,3 \cdot 10^{-24}$ g. Il bersaglio ha un'area di 2,0 cm² e la frequenza d'urto è di 10^{23} molecole al secondo. Calcolare la pressione sul muro dovuta al fascio.

per una molecola:

$$\Delta p = (-m v \cos \theta) - (m v \cos \theta)$$

$$= -2 m v \cos \theta$$

$$\bar{I}_x = -\Delta p_x = 2 m v \cos \theta = \bar{F}_x \Delta t \quad \text{durata urto}$$

Forza esercitata da N particelle.

$$\bar{F}_x = \frac{\bar{I}_x}{\Delta t} N = 2 m v \cos \theta N = 2 m v \cos \theta f$$

$$\Rightarrow P = \frac{\bar{F}_x}{S} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

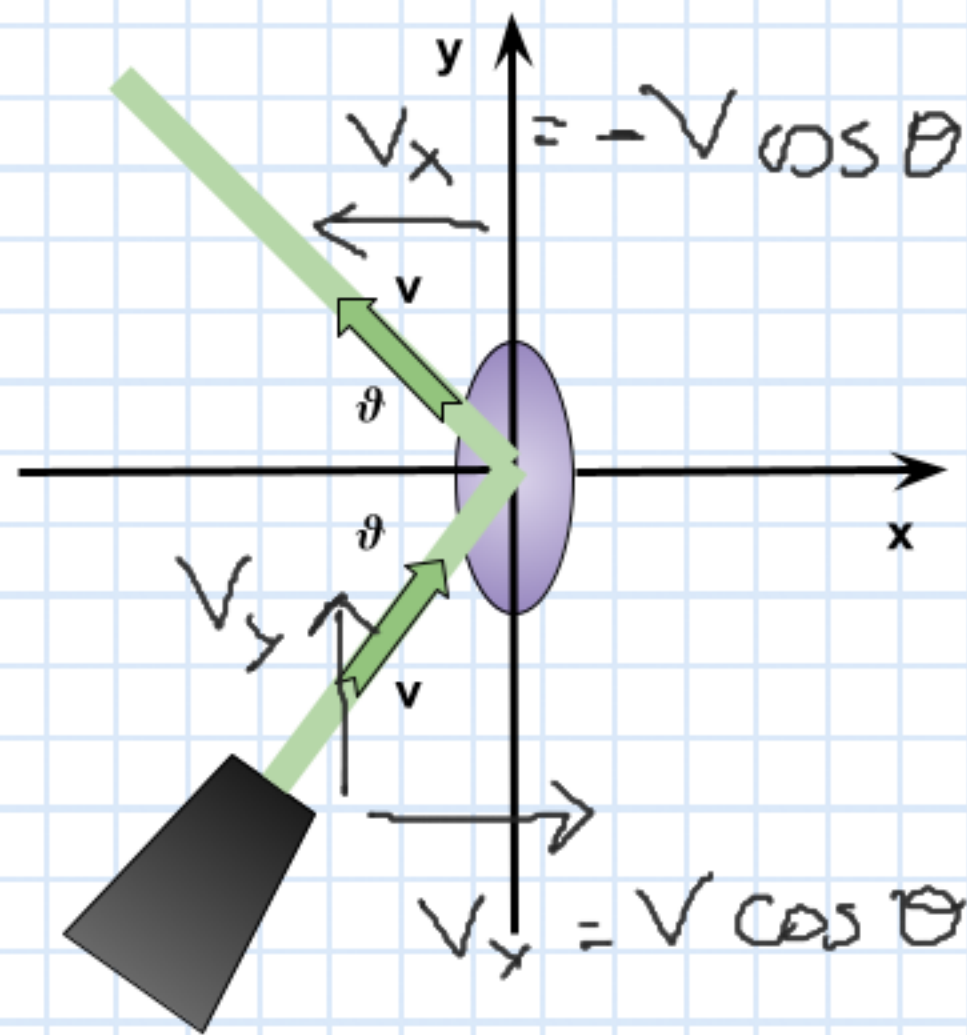
$$\theta = 55^\circ$$

$$v = 1 \text{ km/s}$$

$$m = 3,3 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

$$S = 2,0 \text{ cm}^2$$

$$f = 10^{23} \text{ s}^{-1}$$



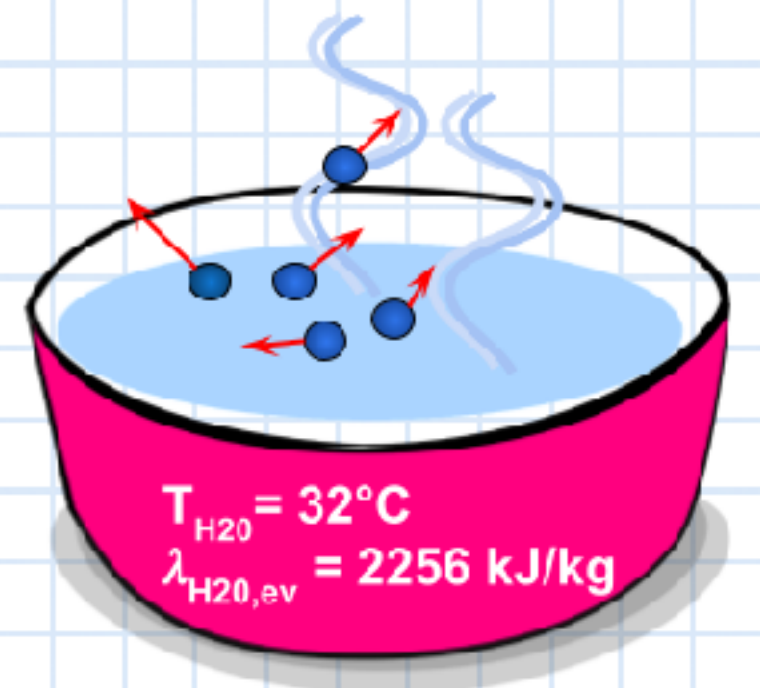
$$\Delta t = \frac{1}{f} \Rightarrow \text{frequenza urto}$$

Esempio: Energia media molecole H₂O

Nota il calore latente di evaporazione dell'acqua:

i) stimare l'energia cinetica media delle molecole che evaporano

$$T_{\text{H}_2\text{O}} = 32^\circ\text{C} \quad \lambda_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{ev}} = 2256 \text{ kJ/kg}$$



=> Assumiamo che tutte le molecole che evaporano abbiano la stessa energia

$$\varepsilon = \lambda_{\text{H}_2\text{O}}^{\text{ev}} / N \quad N = \text{numero molecole di H}_2\text{O in 1 kg}$$

↳ energia assorbita dalle molecole in un kg di H₂O

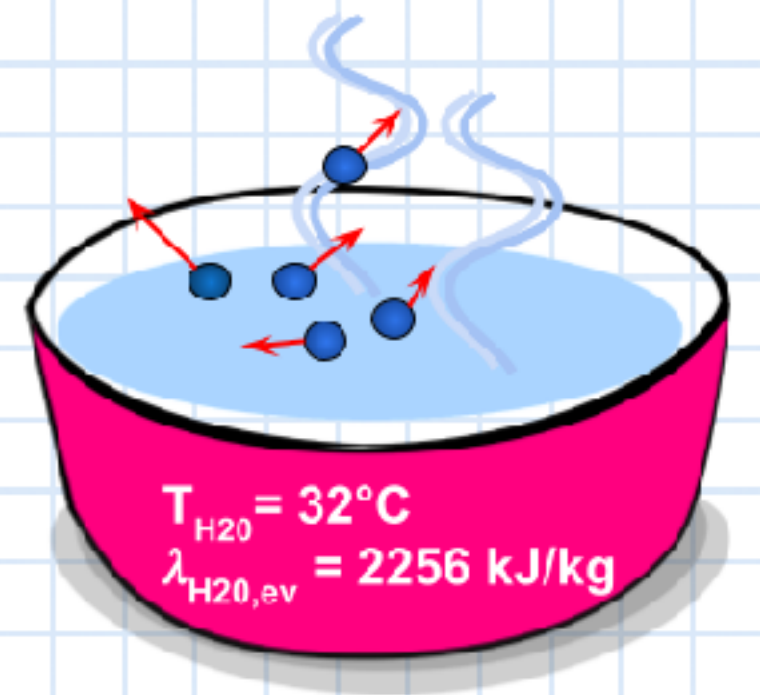
$$N = \frac{N_A}{M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{(1 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-3}) \text{ kg/mol}} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}} = 3,34 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1}$$

↳ massa molecolare H₂O

Esempio: Energia media molecole H₂O

Nota il calore latente di evaporazione dell'acqua:

ii) il rapporto fra questa energia e l'energia cinetica delle molecole dell'acqua a $T=32^\circ\text{C}$



$$\varepsilon = \frac{\lambda^{\text{ev}}}{N} = \frac{2256 \cdot 10^3 \text{ J/kg}}{3,34 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1}} = 6,77 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \overline{E_k} = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \overline{E_k}^{\text{H}_2\text{O}} = \frac{3}{2} k_B \underbrace{(32 + 273,15)}_{T[\text{K}]} = 6,32 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{\overline{E_k}} \approx 10$$