SISTEMI DINAMICI

Sistemi gradiente

Prendiamo $V : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$U \subset \mathbb{R}^n$

$$\nabla V_{(x)} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

Un sistema dinamico si dice di tipo gradiente se:

$$\dot{x} = -\nabla V_{(x)}$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n}$$

In particolare

$$dV_{(x)}(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i = \nabla V \cdot y$$

Andiamo a vedere la derivata

$$\frac{d}{d\tau} V(\varphi_\tau(x)) \left(= \frac{d}{d\tau} V(x(\tau)) \right)$$

$$= dV_{(\varphi_\tau(x))} \frac{d}{d\tau} \varphi^\tau(x)$$

$$= \nabla V \cdot (-\nabla V)$$

$$\frac{d}{d\tau} V(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\tau} + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \frac{dx_n}{d\tau}$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \left(-\frac{\partial V}{\partial x_n} \right)$$

Abbiamo dimostrato :

Teo $\frac{dV}{d\tau} \leq 0$ lungo il flusso

$\frac{dV}{d\tau} = 0 \iff x^*$ è punto di equilibrio

In particolare $V(x)$ (oppure se necessario $V(x) - V(x^*)$) è una funzione di Lyapunov

I minimi isolati x^* sono asintoticamente stabili

[$$\frac{d}{dt} x_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

si ottiene $\frac{d}{dt} x_i = -g_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}$]

<u>Osservazione</u> Un sistema gradiente non ammette soluzioni periodiche non costanti (perché V decresce strettamente)

Consideriamo le superfici di livello

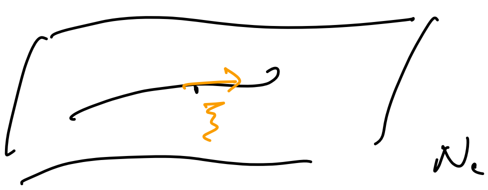
$$N_c = \{ x : V(x) = c \}$$

Diciamo che $x \in N_c$ è regolare se $\nabla V_{(x)} \neq 0$. Per il Teorema della funzione implicita le superfici di livello sono il grafico di una funzione.

Consideriamo un punto regolare x.

Sia ξ un vettore tangente a N_c nel punto x : $\xi \in T_x N_c$

Allora possiamo trovare una curva $\gamma(\tau)$ in N_c tale che $\gamma'(0) = \xi$



Allora

$$dV_{(x)}(\xi) = \frac{d}{d\tau} V \circ \gamma(\tau) \Big|_{\tau=0} = 0$$

quindi lo spazio tangente è il ker del differenziale :

$$T_x N_c = \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid dV_{(x)}(\xi) = 0 \}$$
$$= \{ \xi \in \mathbb{R}^n \mid \nabla V \cdot \xi = 0 \}$$

$\rightarrow$ il gradiente ∇V è ortogonale alle superfici di livello

Interpretazione geometrica:

- abbiamo visto: $\nabla V \perp N_c$
- abbiamo anche $\frac{dx}{d\tau} = -\nabla V$

$\Rightarrow$ le orbite attraversano ortogonalmente le superfici di livello.

<u>Esempio</u> $\quad V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$V(x,y) = x^2(x-1)^2 + y^2$$

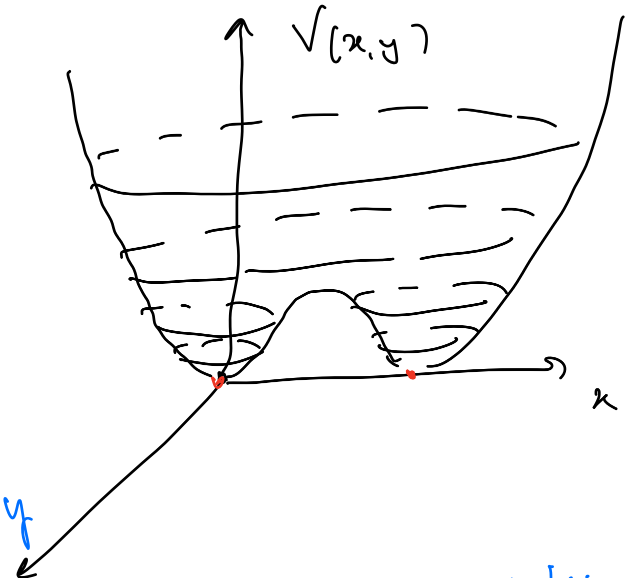
$$\frac{d}{d\tau}\bar{X} = -\nabla V \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x(x-1)(2x-1) \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

$$\left[\, 2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = (x-1)\left[2x(x-1) + 2x^2\right] = (x-1)\left(2x\,[2x-1]\right) \,\right]$$

Punti di equilibrio sono

$$X_1 = (0,0), \quad X_2 = \left(\tfrac{1}{2}, 0\right), \quad X_3 = (1,0)$$

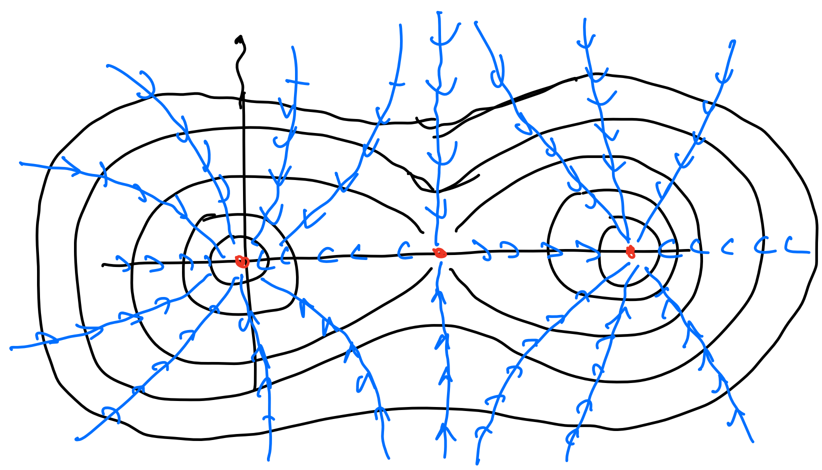
$$Df = \begin{pmatrix} -2(6x^2-6x+1) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$



$$Df_{X_1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Df_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Df_{X_3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$



<u>Proposizione</u> Sia $\bar{x}$ un punto α-limite o ω-limite di una traiettoria del flusso gradiente. Allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio.

<u>Dim</u> Sia $y \in \omega(\bar{x})$

$$\omega(\bar{x}) = \{ y \text{ t.c. } \exists\, t_n \to \infty \text{ con } x(t_n) \to y \}$$

Allora, V è costante lungo la soluzione per y:

Siccome $V(x(t))$ decresce. Quindi

$$V(x(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \inf_{t \geq 0} V(x(t)) = \alpha$$

Se $y \in \omega(x)$. Allora $\exists$ sequenza $\{t_n\}$ $\to \infty$, t.c. $x(t_n) \to y$

Siccome V è continua:

$$\lim_{t_n \to \infty} V(x(t_n)) = V(y) = \alpha$$

Questo è vero per ogni $y \in \omega(x)$.

Cioè $\forall y \in \omega(x)$, $V(y) = \alpha$.

Inoltre: $\omega(x)$ è invariante lungo il flusso: $\forall y \in \omega(x)$

$$\underset{\uparrow \text{ invariante}}{V(y(t)) = V(y)} = \alpha$$

quindi V è costante

$$\frac{dV}{dt}(y) = 0 \quad \forall y \in \omega(x)$$

$\rightarrow$ è un punto di equilibrio :)

Quindi se un sistema gradiente ha solo punti di equilibrio isolati, ogni soluzione va o a infinito o a un punto di equilibrio.

<u>Prop</u>: Un sistema gradiente linearizzato vicino ad un punto

di equilibrio isolato ha solo autovalori reali

Perché $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ è simmetrica

SISTEMI HAMILTONIANI

Consideriamo un sistema n-dim

$$\frac{d}{dt} x(t) = f(x(t))$$

diciamo che $I(x)$ è una quantità conservata se

$$0 = \frac{d}{dt} I(x) = \sum_i \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} =$$

$$= \nabla I \cdot \frac{dx}{dt} = \nabla I \cdot f$$

Il gradiente di una quantità conservata è ortogonale al campo vettoriale f.

$\Rightarrow$ le traiettorie giacciono sugli insiemi di livello $I(x(t)) = \text{costante}$.

<u>Esempio</u> Modello Preda-Predatore (Lotka-Volterra).

$$\begin{cases} u'(t) = r\,u(t) - a\,u(t)\,v(t) \\ \quad\;\;\; = (r - a\,v(t))\;u(t) \\ v'(t) = -\mu\,v(t) + d\,u(t)\,v(t) \\ \quad\;\;\; = (-\mu + d\,u(t))\;v(t) \end{cases}$$

Punti di eq: $(u,v) = (0,0)$

$$(u,v) = \left(\frac{\mu}{d}, \frac{r}{a}\right)$$

La quantità

$$H(u,v) = d\,u(t) - \mu \log u(t) + a\,v(t) - r \log v(t)$$

si conserve.

$$\frac{d}{d\tau} H(u,v) = u'(\tau)\left(d - \frac{\mu}{u(\tau)}\right)$$

$$+ v'(\tau)\left(a - \frac{r}{v(\tau)}\right)$$

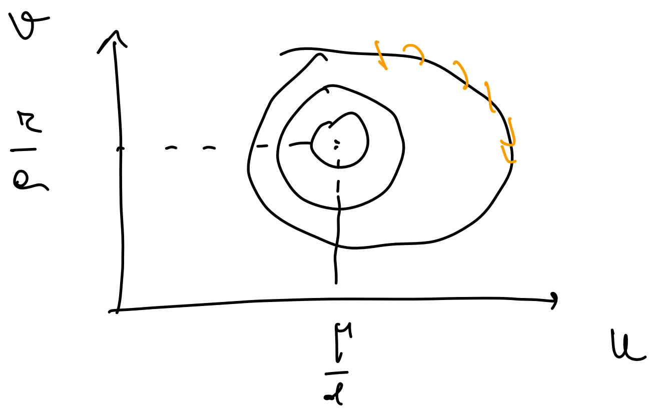
$$= \big(r - a\,v(\tau)\big)\,u(\tau)\left(d - \frac{\mu}{u(\tau)}\right)$$

$$+ \big(-\mu + d\,u(\tau)\big)\,v(\tau)\left(a - \frac{r}{v(\tau)}\right)$$

$= 0$

$\rightarrow$ Tutte le traiettorie giacciono su $H(u,v) =$ costante

L'insieme $\{ H(u,v) = k \}$ $\quad k > H\left(\frac{\mu}{d}, \frac{r}{a}\right)$



Poniamo
$$p = \log u$$
$$q = \log v$$

$$\cancel{h = d e^{q} - \mu p + a e^{p} - r q}$$

$$h = d e^{p} - \mu p + a e^{q} - r q$$

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \log v = \frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} =$$
$$= \frac{1}{v} \left(-\mu + d\, u(\tau)\right) v(\tau)$$
$$= (-\mu + d\, u) = \frac{\partial h}{\partial p}$$

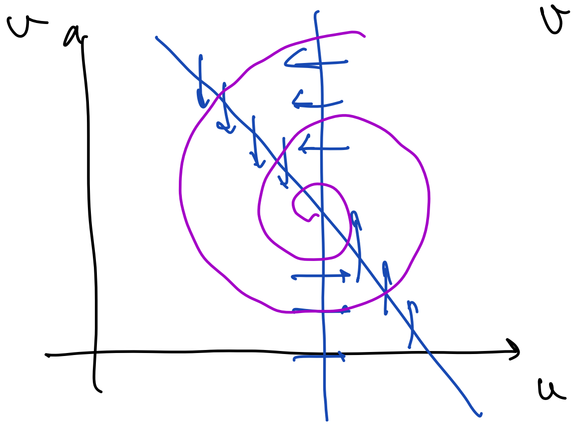
$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \log u = \frac{1}{u} \frac{du}{d\tau} = (r - a v)$$
$$= - \frac{\partial h}{\partial q}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{d\tau} = \dfrac{\partial h}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{dp}{d\tau} = - \dfrac{\partial h}{\partial q} \end{cases}$$

Esercizio

$$u' = (r - bu)u - auv$$

$$v' = -\mu v + duv$$



1. eq.
2. isocline
3. ritratto di fase