Soluz. del compito d'esame del 21 Aprile 2022

A. Possiamo scindere dapprima la biimplicazione

$$s \;\leftrightarrow\; (\,p\,?\,q : r)$$

in congiunzione di due implicazioni,

$$\big((\,p\,?\,q : r) \;\to\; s\big) \quad \& \quad \big(\neg\,(\,p\,?\,q : r) \;\to\; \neg\, s\big)\ ,$$

poi—alla luce della tabella che descrive il costrutto $(p\,?\,q : r)$—di quattro:

$$\begin{array}{c}\big((p \,\&\, q) \;\to\; s\big) \quad \& \quad \big((\neg\, p \,\&\, r) \;\to\; s\big) \quad \& \\ \big((p \,\&\, \neg\, q) \;\to\; \neg\, s\big) \quad \& \quad \big((\neg\, p \,\&\, \neg\, r) \;\to\; \neg\, s\big)\,.\end{array}$$

Di qui, banalmente, la `3CNF` cercata:

$$\big(\neg\, p \vee \neg\, q \vee s\,\big) \quad \& \quad \big(\,p \vee \neg\, r \vee s\,\big) \quad \& \quad \big(\neg\, p \vee q \vee \neg\, s\,\big) \quad \& \quad \big(\,p \vee r \vee \neg\, s\,\big)\,.$$

Per ottenere una `3DNF` equivalente a questa, possiamo scindere la biimplicazione in disgiunzione di due congiunzioni:

$$\big(s \,\&\, (p\,?\,q : r)\big) \vee \big(\neg\, s \,\&\, \neg\,(p\,?\,q : r)\big)\,.$$

La tabella che descrive il costrutto $(p\,?\,q : r)$ ci mostra i due modi di renderlo vero e i due modi di renderlo falso; in base a questi, otteniamo la `DNF`:

$$\big(s \,\&\, p \,\&\, q\big) \vee \big(s \,\&\, \neg\, p \,\&\, r\big) \vee \big(\neg\, s \,\&\, p \,\&\, \neg\, q\big) \vee \big(\neg\, s \,\&\, \neg\, p \,\&\, \neg\, r\big)\,.$$

B. Basta ricordare che l'ordinamento dei reali è totale e denso e tale rimane se lo restringiamo a un intervallo (qui l'intervallo chiuso $[0,1]$). La skolemizzazione ci dà

$$\forall\, x\, \forall\, y \left(x \leqslant y \;\to\; \big(\, y \leqslant x \vee \big(\neg\, \mathbf{m}(x,y) \leqslant x \;\;\&\;\; \neg\, y \leqslant \mathbf{m}(x,y)\big)\,\big) \right);$$

un'accettabile interpretazione di $\mathbf{m}(x,y)$ è: "punto di mezzo dell'intervallo $[x,y]$ ".

C. 1) Mostriamo, per induzione su i, che il valore di ciascuna x_i è obbligato. Per $i = 0$, tale valore è 0, inquantoché $M_0 = 0$. Per $i = h + 1$, assumendo induttivamente che i valori di $x_0, \ldots, x_h$ sono obbligati, dato che le variabili $x_{i,1}, \ldots, x_{i,M_i}$ compaiono fra queste, anche il valore di x_i risulta univocamente determinato.

2) Dobbiamo poter rappresentare il sistema di equazioni come un grafo diretto aciclico, visitando il quale dalle foglie verso le radici potremo riordinarne le equazioni in modo che sia soddisfatta la condizione riportata al punto 1)

D. Sia n un intero qualsiasi: $n \in \mathbb{Z}$. Se $n < 0$, allora $4\,n+1 \leqslant -3$; essendo negativa, questa quantità non può venir espressa come una somma di quadrati. Per contro, se $n \geqslant 0$, allora $4\,n + 1 \equiv 1 \mod 4$ mentre invece qualsiasi numero m della forma $4^h\,(8k + 7)$ soddisfa $m \equiv 3 \mod 4$ oppure $m \equiv 0 \mod 4$; pertanto la quantità $4\,n + 1$ non ha tale forma e dunque è rappresentabile come somma di tre quadrati perfetti.

Questo risultato ci offre una strada alternativa al teorema dei quattro quadrati per circoscrivere—senza perdita di generalità—il 10º problema di Hilbert ad $\mathbb{N}$ invece che a $\mathbb{Z}$. (Spiegare)