SISTEMI DINAMICI

Sistemi Hamiltoniani

Hamiltoniana $\rightarrow$ ruolo dinamico di un sistema

$$H : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

M = varietà $2n$ dimensionale con coordinate (p, q)

Sistema dinamico

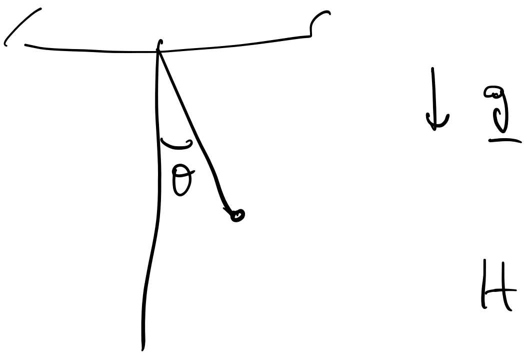
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} q_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dfrac{d}{dt} p_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

In meccanica: q_i coordinate libere

p_i momenti coniugati

$$H(q, p) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(q_i)$$

Ad esempio



$$p = m l \dot{\theta}^2 = I \dot{\theta}^2$$

$$H = \frac{p^2}{2I} - m g l \cos\theta$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{p}{I} \\ \dot{p} = -m g l \sin\theta \end{cases}$$

il moto vive lungo le curve $H = E$ nello spazio delle fasi

Se H è indipendente dal tempo

$$\frac{d}{dt} H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0$$

eq. di Hamilton

Se introduciamo le parentesi di Poisson:

$$\{F, G\} = \nabla F^T \cdot J \cdot \nabla G \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

Se introduciamo il vettore $z = (q, p)$

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\[2ex] \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \longrightarrow \quad \dot{z} = \{z, H\} = J \cdot \nabla H$$

diverso dai sistemi gradiente

$$\dot{z}_i = g_{ij} \nabla_j z$$

$\dot{z} = J \cdot \nabla H \rightarrow$ punti di equilibrio si trovano da $\nabla H = 0$

Se prendiamo una funzione F

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$$

da cui segue che se H è indipendente dal tempo

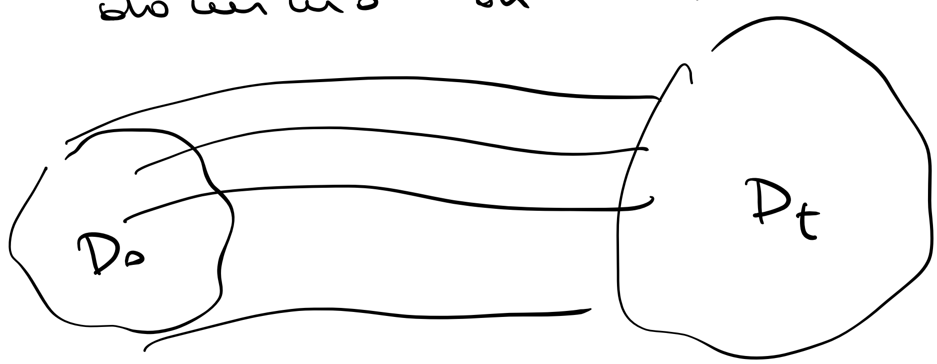
$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = \nabla H^T J \nabla H = 0$$

Consideriamo un sistema autonomo

$$\dot{x} = f(x)$$

Sia φ_t il flusso.

D_0 dominio di $\mathbb{R}^n$



$$D_t = \varphi_t(D_0)$$

Chiamiamo $\mathrm{Vol}\, D_t$ il suo volume

<u>Lemma</u>

$$\left.\frac{d}{dt}(\mathrm{Vol}\, D_t)\right|_{t=0} = \int_{D_0} \nabla \cdot f \, dx$$

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

<u>Dim</u> Usando lo Jacobiano della Trasformazione:

$$\mathrm{Vol}\, D_T = \int_{D_T} dx = \int_{D_0} \det\left(\frac{\partial \varphi_T(x)}{\partial x}\right) dx$$

Espandiamo in serie di Taylor:

$$\varphi_T(x) = x + f(x)\,T + O(T^2)$$

Usiamo la formula:

$$\det(\mathbb{1} + A\varepsilon) = \mathbb{1} + \varepsilon \operatorname{Tr} A + O(\varepsilon^2)$$

segue dal fatto:

$$\det(\mathbb{1} + \varepsilon A) = \prod_i (1 + \varepsilon \lambda_i)$$

$$= 1 + \varepsilon \sum_i \lambda_i + O(\varepsilon)$$

$$= 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A + \dots$$

$$(1+\varepsilon\lambda_1)(1+\varepsilon\lambda_2)$$
$$1 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon\lambda_2 + \varepsilon^2\lambda_1\lambda_2$$

$$\frac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial x} = \mathrm{id} + \frac{\partial f}{\partial x}\tau + O(\tau^2)$$

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_\tau(x)}{\partial x}\right) = \det\left(\mathrm{id} + \frac{\partial f}{\partial x}\tau\right) + O(\tau^2)$$

$$= 1 + \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\tau + O(\tau^2)$$

$$\int_{D_\tau} dx = \int_{D_0} \det\left(\frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x}\right) dx$$

$$\mathrm{Vol}\, D_\tau = \int_{D_0} \left(1 + \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\tau + \cdots\right) dx$$

$$= \mathrm{vol}\, D_0 + \int_{D_0} \tau\, \nabla\cdot f\, dx + \cdots$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{Vol}\, D_\tau\right)\Big|_{\tau=0} = \int_{D_0} \nabla\cdot f\, dx}$$

Teorema (Liouville)

Supponiamo $\nabla \cdot f = 0$

Allora $\forall D_0$: $\mathrm{vol}\, D_0 = \mathrm{vol}\, D_t$

Teo : Se H è una hamiltoniana

$\rightarrow$ il flusso preserva il volume nello spazio delle fasi

Dim

$$f = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

$$\nabla \cdot f = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0$$

Dinamica di Poisson

M varietà liscia d-dim

$H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ hamiltoniana generalizzata

Sistema dinamico di Poisson

$$\dot{z} = \{z, H\}$$

<u>Def</u> Parentesi di Poisson $\{\,,\,\}$ è un operatore su funzioni $C^2(M, \mathbb{R})$ t.c. per $F, G, H \in C^2(M, \mathbb{R})$

- antisimmetria $\{F, G\} = -\{G, F\}$
- bilineare $\{F+G, H\} = \{F, H\} + \{G, H\}$
  e $\{aF, bG\} = ab\{F, G\}$ con a, b costanti
- derivazione $\{FH, G\} = F\{H, G\} + H\{F, G\}$
- Jacobi: $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

Le Parentesi di Poisson introdotte prima obbediscono questa definizione.

__Lemma__ Sia $\{\ ,\ \}$ una parentesi di Poisson su $C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, allora $\exists$ matrice antisimmetrica $J(x)$ t.c.

$$\{F, G\} = \nabla F^T J(x) \nabla G$$

__Dim__ Sketch

Bilineare $\Rightarrow$ $\{\ ,\ \}$ è lineare in ogni slot

Derivazione $\Rightarrow$ agisce come una derivata prima su ciascun argomento

Antisim $\Rightarrow$ $J(x)$ deve essere antisimmetrico

Notiamo che $\nabla F^T J(x) \nabla G$

$\rightarrow$ antisim, bilineare, derivazione

ma non è detto Jacobi

Sistema dinamico di Poisson:

$$\dot{z} = \{z, H\} = J \nabla H$$

Se F è funzione solo di z

$$\frac{d}{dt} F = \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \dot{z} = \nabla F^T \cdot J \cdot \nabla H$$

$$= \{F, H\}$$

Segue da Jacobi:

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = \{\{F, G\}, H\} =$$

$$= \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{H, F\}\} =$$

$$= \{F, \dot{G}\} + \{\dot{F}, G\}$$

Sistemi di Poisson autonomi

$$\dot{H} = \{H, H\} = 0$$

Sono conservativi

Esempio   Eq. di Eulero

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\,\omega_2 \omega_3 \\ J_2 \dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\,\omega_3 \omega_1 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\,\omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

Eq cardinali della dinamica

$$\longrightarrow \begin{cases} \cancel{\underline{R} = \frac{d}{dt} \underline{P}} \\ \underline{M}(O) = \frac{d}{dt} \underline{L}(O) + - \end{cases}$$

$\rightarrow$ moti di precessione

$$\underline{L}(O) = \sum_p (\underline{x}_p - \underline{x}_O) \wedge m \underline{v}_p$$

$$= I_O(\underline{\omega})$$

$$\frac{d}{dt} I_O(\underline{\omega}) = \underline{0}$$

in assenza di momento di forze esterne.

$$I = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

$$H = \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2} \omega_i^2 J_i = \sum_{i=1,2,3} \frac{L_i^2}{2 J_i}$$

$$L_i = J_i \omega_i \rightarrow \dot{L}_i = J_i \dot{\omega}_i$$

$$\begin{cases} \dot{L}_1 = \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_2} \right) L_2 L_3 \\ \dot{L}_2 = \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3} \right) L_1 L_3 \\ \dot{L}_3 = \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1} \right) L_1 L_2 \end{cases}$$

Lo potriamo scrivere come

$$\dot{L} = J \nabla H$$

con $H = \sum_i \frac{L_i^2}{2 J_i}$

$$\begin{pmatrix} \dot{L}_1 \\ \dot{L}_2 \\ \dot{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1/J_1 \\ L_2/J_2 \\ L_3/J_3 \end{pmatrix}$$

$$\dot{L}_1 = \left(\frac{1}{J_3} - \frac{1}{J_2}\right) L_2 L_3$$

$$\dot{L}_2 = \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_3}\right) L_1 L_3$$

$$\dot{L}_3 = \left(\frac{1}{J_2} - \frac{1}{J_1}\right) L_1 L_2$$

$$\dot{z} = J(z) \nabla H$$

Teorema del ritorno

Flusso $\varphi^t \longrightarrow$ associamo un sistema dinamico discreto: fissiamo $T > 0$ e definiamo $g := \varphi^T$. Allora

$$\{ g^k : k \in \mathbb{Z} \}$$

è definita dall'iterazione di g.

$$g^0(x) = x$$

$$g^1(x) = g(x) \qquad g^2(x) = g(g(x))$$

$$g^{-k}(x) = (g^{-1})^k(x)$$

In particolare: $\varphi^{kT}(x) = g^k(x)$

Se T è piccolo possiamo sperare di controllare l'evoluzione del sistema per $t \in [kT, (k+1)T]$

$$\left| \varphi^{t}(x) - g^{k}(x) \right| \leq \max_{s\in[0,T]} \left| \varphi^{s}(g^{k}(x)) - g^{k}(x) \right|$$

il membro di destra è piccolo per $T \to 0$

<u>Teorema</u> Se g è biunivoca, misurabile e che conserva il volume tale $D \subset \mathbb{R}^n$ sia invariante $(g(D)=D)$

Allora $\forall$ insieme A in D (misurabile)

quasi tutti i punti di A tornano infinite volte in A:

se $B := \{ x \in A \mid \exists \{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ divergente tale che $g^{k_j}(x) \in A \ \forall j \in \mathbb{N} \}$

alors $\quad v(A) = v(B)$

$$v(A) = vol(A)$$