Definibilità aritmetica

Eugenio G. Omodeo

EXISTENTIAL DEFINABILITY IN ARITHMETIC

BY

JULIA ROBINSON

1. **Introduction.** A relation $\rho(x_1, \cdots, x_n)$ among natural numbers is said to be *arithmetically definable* if there is a formula containing the free variables $x_1, \cdots, x_n$, any number of bound variables, and symbols for particular natural numbers, involving only the mathematical symbols $+$ and $\cdot$, and the logical symbols: $\bigwedge$ (for every), $\bigvee$ (there exists), $\wedge$ (and), $\vee$ (or), $\sim$ (not), and $=$ (equals), which holds if and only if the relation $\rho(x_1, \cdots, x_n)$ is satisfied.

A relation $\rho(x_1, \cdots, x_n)$ is said to be *existentially definable* if there is a formula of the type described above which does not contain either of the logical symbols $\bigwedge$ or $\sim$. We shall consider the existential definability of certain relations, e.g. $x=y^z$, $x=y!$, and "x is a prime," which are known to be arithmetically definable by a general theorem of Gödel (see §6)(1).

FIGURA: Definibilità aritmetica, presentata da Julia Robinson nel 1952

Trieste, 12.05.2022

Voci bibliografiche

- Julia Robinson. Definability and decision problems in arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 14(2):98–114, 1949.
- Julia Robinson. Existential definability in arithmetic. *Transactions of the American Mathematical Society*, 72(3):437–449, 1952. Reprinted in [Rob96, p. 47ff.].
- Julia Robinson. *The collected works of Julia Robinson*, volume 6 of *Collected Works*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. ISBN 0-8218-0575-4. With an introduction by Constance Reid. Edited and with a foreword by Solomon Feferman. xliv+338 pp.
- Zhi-Wei Sun. A new relation-combining theorem and its application. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 38(1):209–212, 1992.
- Shih-Ping Tung. On weak number theories. *Japanese journal of mathematics. New series*, 11(2):203–232, 1985.

La seguente definizione aritmetica degli interi nei razionali venne proposta in [Rob49]:

$$\eta(a,b,w) \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad \exists r \, \exists s \, \exists t \, \left(\; 2 + a\cdot b\cdot w^2 + b\cdot r^2 \; = \; s^2 + a\cdot t^2 \; \right),$$

$$\mathbb{Z}(\zeta) \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad \forall a \, \forall b \left(\begin{array}{l} \eta(a,b,0) \;\& \\ \forall u \left(\eta(a,b,u) \implies \eta(a,b,u+1) \right) \\ \implies \\ \eta(a,b,\zeta) \end{array} \right).$$

Qui il *dominio privilegiato del discorso* scorso dalle variabili è $\mathbb{Q}$.

Esercizio **Spiegare perché. . .**

Accettando per corretta questa specifica, perché non possiamo aspettarci che un'aritmetica assiomatica riguardante i razionali (con addizione e moltiplicazione) sia completa ?

La specifica di $\mathbb{Z}$ è soddisfacente: $\boxed{\text{Da un lato,}}$ perché quando una proprietà $P(\zeta)$ (qui la $\eta(\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \zeta\,)$, con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$ generici ma fissati)

- è soddisfatta da $\zeta = \mathbf{0}$ e
- ogniqualvolta è soddisfatta da $\zeta = \boldsymbol{u}$ lo è anche da $\zeta = \boldsymbol{u} + 1$.

allora $P(\zeta)$ — grazie al principio d'induzione aritmetica:

- risulta soddisfatta da $\zeta = \boldsymbol{\zeta}$, per qualsiasi valore $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Di converso}}$ (ciò richiede una dimostrazione ben piú sofisticata che fa ricorso a un importante $\boxed{\boxed{\text{teorema di Hasse del 1923}}}$), se $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{Q}$ è tale da soddisfare il suddetto predicato $\mathbb{Z}(\zeta)$ allora il suo denominatore (scritto nei minimi termini)

- non è divisibile né per 2 né per alcun numero primo $\boldsymbol{b}$ tale che $\boldsymbol{b} \equiv 3 \pmod 4$,
- non è divisibile per alcun numero primo $\boldsymbol{b}$ tale che $\boldsymbol{b} \equiv 1 \pmod 4$;

pertanto il denominatore di $\boldsymbol{\zeta}$ vale ± 1 e dunque $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{N}$.

Possiamo servirci di un'equazione di Pell per mostrare la definibilità esistenziale di $\mathbb{N}$ in un linguaggio per l'aritmetica degli interi (riguardante addizione e moltiplicaz.). Ecco come [Sun92, p. 210]:

$$\mathbb{N}(a) \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad \exists x\, \exists y \left(\quad y \neq 0 \quad \& \quad x^2 = (4\,a + 2)\, y^2 + 1 \quad \right).$$

Qui il *dominio privilegiato del discorso* scorso dalle variabili è $\mathbb{Z}$.

Possiamo servirci di un'equazione di Pell per mostrare la definibilità esistenziale di $\mathbb{N}$ in un linguaggio per l'aritmetica degli interi (riguardante addizione e moltiplicaz.). Ecco come [Sun92, p. 210]:

$$\mathbb{N}(a) \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad \exists x \, \exists y \left(\; y \neq 0 \quad \& \quad x^2 = (4a+2)\, y^2 + 1 \; \right).$$

Qui il *dominio privilegiato del discorso* scorso dalle variabili è $\mathbb{Z}$.

Esercizio

- Mostrare la correttezza di questa specifica .
- È legittimo utilizzare la condizione $y \neq 0$ in una definizione esistenziale?

Possiamo servirci di un'equazione di Pell per mostrare la definibilità esistenziale di $\mathbb{N}$ in un linguaggio per l'aritmetica degli interi (riguardante addizione e moltiplicaz.). Ecco come [Sun92, p. 210]:

$$\mathbb{N}(a) \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad \exists x \, \exists y \Big(\quad y \neq 0 \quad \& \quad x^2 = (4\,a+2)\,y^2 + 1 \quad \Big) .$$

Qui il *dominio privilegiato del discorso* scorso dalle variabili è $\mathbb{Z}$.

Esercizio

- Mostrare la correttezza di questa specifica .
- È legittimo utilizzare la condizione $y \neq 0$ in una definizione esistenziale?

Sí, perché in $\mathbb{Z}$ (cfr. [Tun85, p. 208]):

$$y \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \, \exists v \big(\, y = (2\,u-1)\,(3\,v-1) \, \big)$$

Possiamo servirci di un'equazione di Pell per mostrare la definibilità esistenziale di $\mathbb{N}$ in un linguaggio per l'aritmetica degli interi (riguardante addizione e moltiplicaz.). Ecco come [Sun92, p. 210]:

$$\mathbb{N}(\, a \,) \quad \Leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \quad \exists\, x\, \exists\, y \Big(\; y \neq 0 \quad \& \quad x^2 = (4\, a + 2)\, y^2 + 1 \; \Big) .$$

Qui il *dominio privilegiato del discorso* scorso dalle variabili è $\mathbb{Z}$.

Esercizio

- Mostrare la correttezza di questa specifica .
- È legittimo utilizzare la condizione $y \neq 0$ in una definizione esistenziale?

Sí, perché in $\mathbb{Z}$ (cfr. [Tun85, p. 208]):

$$y \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, u\, \exists\, v \big(\, y = (2\, u - 1)\, (3\, v - 1) \, \big)$$

Esercizio

- Mostrare la correttezza di questa riscrittura di $y \neq 0$.
- Alla luce di questa riscrittura, condensare la specifica di $\mathbb{N}(\, a \,)$.