SISTEMI DINAMICI

Flusso $\varphi^t \longrightarrow g := \varphi^T$ sistema dinamico discreto

g, g^2, g^3

<u>Teorema</u> g biunivoca (invertibile) che conserva il volume, e tale che preso $D \subset \mathbb{R}^n$ invariante

$(g(D) = D)$

Allora $\forall A \subset D$, quasi tutti i punti di A tornano infinite volte in A

$B := \{ x \in A \mid \exists \{n_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ divergente tale che $g^{n_j}(x) \in A \quad \forall j \in \mathbb{N} \}$

$$\nu(A) = \nu(B)$$

$$\left[\quad \nu(A) = \int_A dx \quad \right]$$

Dim Il punto $x \in A$ è detto un punto ricorrente in A, se $g^k(x) \in A$ per qualche $k > 0$.

Denotiamo con N l'insieme dei punti non ricorrenti:

$$N = \{ x \in A : g^k(x) \notin A \;\; \forall k \geq 1 \}$$

In particolare $x \in N$: $g^k(x) \notin N \subset A$ perché $N \subset A$. (preso $k \geq 1$)

Quindi $N \cap g^k(N) = \phi$

Fissiamo $k_2 > k_1 \geq 1$

$$g^{k_1}(N) \cap g^{k_2}(N) = g^{k_1}\left(N \cap g^{k_2 - k_1}(N)\right)$$

$= \emptyset$

Quindi: Tutti gli insiemi $g^k(N)$ con $k \in \mathbb{N}$ sono disgiunti

Siccome per ipotesi g conserva il volume: hanno tutti volume $v(N)$

Siccome sono tutti contenuti in D si ha $\forall\, k > 0$

$$v(D) \geq \sum_{l=0}^{k-1} v\left(g^l(N)\right) = k\, v(N)$$

Siccome $v(D) < +\infty$, deve essere

$v(N) = 0$

Definiamo

$$N_\infty = \left\{ x \in A \;\middle|\; \exists\, k > 0 \text{ per cui } g^l(x) \notin A \text{ per ogni } l \geq k \right\}$$

" l'insieme dei punti non ricorrenti infinite volte "

Allora :

$$N_\infty \subset \{ x \in A \mid \exists\, k > 0 \text{ per cui } g^{kj}(x) \notin A \text{ per ogni } j \geq 1 \}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ x \in A \mid (g^k)^j(x) \notin A \ \forall j \geq 1 \}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$$ è la def di N_k : punti non ricorrenti per g^k

Stesso ragionamento di prima :

g^k è biunivoca, misurabile e lascia $\mathcal{D}$ invariante

$\rightarrow$ quanto dimostrato prima vale per $g^k \Rightarrow \nu(N_k) = 0 \ \forall k \geq 1$

$\Rightarrow \nu(N_\infty) = 0$

Siccome

B = insieme dei punti ricorrenti

∞ volte

N_∞ = insieme punti non-ricorrenti ∞ volte

$$B = A \setminus N_\infty \qquad (A = B \cup N_\infty)$$

$$v(B) = v(A)$$

$\rightarrow$ quasi tutti i punti di A tornano ∞ volte in A.

<u>COROLLARIO</u> Per $\dot{x} = f(x)$ in un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, limitato e invariante, φ^T conservi il volume. Allora

1) per ogni insieme $A \subset D$ (misurabile) l'insieme dei punti "vaganti" di A

$$V_A := \{ x \in A \mid \exists\, T > 0 \text{ t.c. } \varphi^T(x) \notin A$$

per ogni $t \geq T \}$

ha misura nulla.

2) $\forall \varepsilon > 0$, l'insieme $B_\varepsilon \subset D$ dei dati iniziali x tali che $\varphi^t(x)$ ritorna infinite volte a una distanza non superiore ad ε da x ha misura piena $\nu(B_\varepsilon) = \nu(D)$.

<u>Dimostrazione</u>

1) L'insieme V_A è contenuto in

$$\overline{V}_A := \{ x \in A \mid \exists \text{ intero } k > 0 \text{ per cui } \varphi^j(x) \notin A \text{ per ogni intero } j \geq k \}$$

$\overline{V}_A$ l'insieme dei punti non ricorrenti infinite volte in A per $g = \varphi^1$.

Siccome $g = \varphi^{-1}$ soddisfa le ipotesi del Teorema precedente $\nu(\overline{V}_A) = 0$ e quindi $\nu(V_A) = 0$

2) Siccome D è limitato, può essere ricoperto da un numero finito di palle di raggio $\varepsilon/2$. Allora basta applicare 1) a ciascuna di esse.

Applichiamo questi risultati a φ_H^t ottenuto dal sistema hamiltoniano $\dot{x} = J \nabla H_{(x)}$, con

$$D_E = \{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(x) \leq E \}$$

insiemi limitati

Conservazione dell' energia $\Rightarrow D_E$ sono insiemi invarianti

→ si applica il teorema del ritorno.

Se l'energia del sistema è data, i moti possibili si svolgono sull'insieme

$$\Sigma'_E = \{ x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(x) = E \}$$

superficie isoenergetica

__Teo__ $E \in \mathbb{R}$ energia, Σ_E superficie compatta di $\mathbb{R}^{2N}$, e t.c. $\nabla H(\xi) \neq 0$ $\forall \xi \in \Sigma_E$. Indichiamo con $d\sigma(\xi)$ l'elemento di superficie su Σ'_E

Allora la misura

$$\mu(A) = \int_A d\sigma(\xi) \frac{1}{|\nabla H(\xi)|}$$

$(A \subset \Sigma_E)$

è lasciato invariante dal flusso

$$\mu(\varphi_H^t(A)) = \mu(A)$$

- misura invariante → caratterizza i comportamenti "tipici"

→ misura microcanonica

Esempio

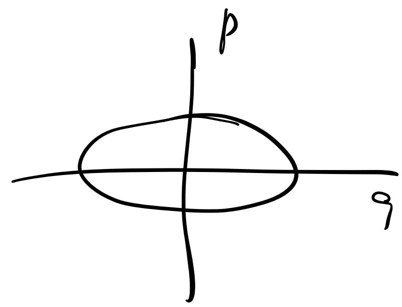
oscillatore armonico

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$$

se $E > 0$

$$\Sigma_E = \left\{ (q, p) : \frac{q^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1 \right\}$$

$$a = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad b = \sqrt{2mE}$$



In coordinate angolari

$\xi \in \Sigma_E$

$$\longleftrightarrow \quad \xi(\theta) = (\overset{q}{a \cos\theta}, \overset{p}{b \sin\theta})$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(-a \sin\theta)^2 + (b \cos\theta)^2}$$

$$d\sigma(\xi) = \sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{r(\theta)\, d\theta}$$

Allora $\quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$

$$|\nabla H| = \sqrt{\nabla H \cdot \nabla H}$$

$$\nabla H = \left(kq \, , \, \frac{p}{m} \right)$$

$$\sqrt{\nabla H \cdot \nabla H} = \sqrt{k^2 q^2 + \frac{p^2}{m^2}} =$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{2E}{k}} \longrightarrow a^2 = \dfrac{2E}{k} \longrightarrow k^2 = \dfrac{(2E)^2}{a^4} \\[2ex] b = \sqrt{2mE} \longrightarrow b^2 = 2mE \longrightarrow m^2 = \dfrac{b^4}{(2E)^2} \end{cases}$$

$$= 2E \sqrt{\frac{q^2}{a^4} + \frac{p^2}{b^4}}$$

$$\frac{d\sigma(\theta)}{|\nabla H|} = \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}}{2E \sqrt{\dfrac{q^2}{a^4} + \dfrac{p^2}{b^4}}} \, d\theta$$

$$\begin{cases} q^2 = a^2\cos^2\theta \\ p^2 = b^2\sin^2\theta \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{a^2\cos^2\theta}{a^4} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^4}}$$

$$\parallel$$

$$\sqrt{\frac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}}$$

$$\frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}{2\bar{E}\sqrt{\frac{q^2}{a^4} + \frac{p^2}{b^4}}}\, d\theta = \frac{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}\, d\theta}{2\bar{E}\sqrt{\frac{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}{a^2b^2}}}$$

$$= \frac{ab}{2\bar{E}}\, d\theta = \frac{2\bar{E}}{2\bar{E}}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\, d\theta = \boxed{\frac{d\theta}{\omega}}$$

$$a = \sqrt{\frac{2\bar{E}}{k}} \qquad b = \sqrt{2m\bar{E}} \qquad ab = 2\bar{E}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione moto armonico.

Boltzmann : ipotesi ergodica

il sistema spende nella

regione $W \subset \Sigma_E$ un tempo

proporzionale a $\mu(W)$

→ il tempo di ricorrenza è

$$\frac{\mu(\Sigma_i)}{\mu(W)} \longrightarrow \sim \frac{1}{\mu(W)}$$