TRASFORMAZIONI CANONICHE

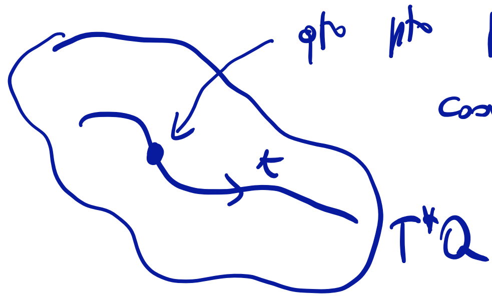
In un sist. Hamiltoniano,
lo STATO è dato da un pto nello
SPAZIO DELLE FASI, con coord. $(\bar{p}, \bar{q})$.

Il moto di qto punto nello sp. delle
fasi mi descrive come evolve il sist.

Un SISTEMA HAMILTONIANO è tale se esiste un set di
coordinate $(\bar{p}, \bar{q})$ t.c. le eq. del moto (cioè eq. nelle
incognite $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$) hanno la semplice forma delle
eq. di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{p}_h = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h} \\ \dot{q}_h = \dfrac{\partial H}{\partial p_h} \end{cases} \qquad h = 1, \dots, n \qquad \text{e} \qquad H = H(\bar{p}, \bar{q}, t)$$

Il moto è descritto dalle funzioni $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$.



qto pto può essere descritto da
coord. $(\bar{p}, \bar{q})$, oppure da
diverse coord. $(\tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}})$

Lo stesso moto può essere descritto scegliendo diverse
coord. $(\tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}})$ su lo sp. delle fasi; il moto ora è
dato dalle funzioni $\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t)$.

Le nuove eq. del moto (con incognite $\tilde{\bar{p}}(t), \tilde{\bar{q}}(t)$) sono
nella forma delle eq. di Hamilton?

Cioè $\exists$ una funz. $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c. le funz. $\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)$ soddisfano le eq. del moto $\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h}$ e $\dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h}$.
Se qto avviene, la trasf. di coord. $(p,q) \to (\tilde{p}, \tilde{q})$ è detta CANONICA

Consideriamo una trasf di coord. nello sp. delle fasi data da

$$(\star) \begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \\ q_h = v_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \end{cases}$$

$\equiv \tilde{\bar{p}}, \tilde{\bar{q}}$ (notazione semplificata)

coordinate p e q si mescolano

Nella notazione compatta

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t) = x_i(\tilde{x}, t)$$

anche scritta a volte

$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ ha detto

Def. La trasf. di coord. $(\star)$, regolare e invertibile, si dice CANONICA, se comunque si prende un'Hamiltoniana $H(p,q,t)$, ESISTE SEMPRE un'Hamiltoniana $K(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ t.c. se le eq. del moto nelle coord. p_h, q_h assumono la forma di eq. di Hamilton con Ham. H $\leftarrow \forall H$

$$\dot{p}_h = -\frac{\partial H}{\partial q_h} \qquad \dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h} \qquad h = 1, \dots, m \qquad (\neq),$$

allora anche le eq. del moto nelle nuove coord. $\tilde{p}_k, \tilde{q}_k$ assumono la forma di eq. di Ham. con Hamiltoniana K

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h} \qquad \dot{\tilde{q}}_h = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h} \qquad h = 1, \dots, m \qquad (\circ)$$

Le loro soluzioni sono collegate dalla trasf. canonica:

$$p_h(t) = u_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$$
$$q_h(t) = v_h(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t), t)$$

soluz. di $(\neq)$ — soluz. di $(\circ)$

H e K si dicono CANONICAMENTE CONIUGATE

Trasf. canoniche nel formalismo compatto

Consideriamo la trasf. di coord nello sp. delle fasi data da

$$x_i = w_i(\tilde{x}, t) \qquad\qquad \bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$$

$\hookrightarrow$ trasf. inversa $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$, cioè

$$\begin{cases} w(\tilde{w}(x,t),t) = x \\ \tilde{w}(w(\tilde{x},t),t) = \tilde{x} \end{cases}$$

Se il moto in T^*Q è descritto dalle funzioni

$$x_i(t) \qquad i = 1,\dots,2n$$

nelle coord. x, allora nelle coord. $\tilde{x}$ sarà descritto dalle funzioni

$$\tilde{x}_j(t) = \tilde{w}_j(x(t), t)$$

$\leftarrow$ equivalentemente: $x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$

Da qta espressione, si può ricavare una relaz. tra le derivate $\dot{x}(t)$ e $\dot{\tilde{x}}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_i \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial x_i}}_{\equiv \tilde{J}_{ji}} \dot{x}_i(t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}$$

($\equiv \tilde{J}_{ji}$) (Jacobiano della trasf. di coord.)

$\uparrow$ analogamente $\dfrac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_l} \equiv J_{ml}$ con $\sum_l J_{ml} \tilde{J}_{lj} = \delta_{mj}$

cioè $\tilde{J} = J^{-1}$

Ora, se $x(t)$ soddisfa l'eq. diff. $\dot{x}_i(t) = f_i(x(t), t)$, allora

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_i \tilde{J}_{ji}(x(t),t)\, f_i(x(t),t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(x(t),t)$$

usando $x_i(t) = w_i(\tilde{x}(t), t)$, posso scrivere una relaz. tra $\dot{\tilde{x}}(t)$ e $\tilde{x}(t)$, cioè un'eq. diff. 1° ord per la funzione $\tilde{x}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}_j(t) = \sum_i \tilde{J}_{ji}(w(\tilde{x}(t),t),t)\, f_i(w(\tilde{x}(t),t),t) + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t}(w(\tilde{x}(t),t),t)$$

Diciamo ora che x_i sono buone coord. canoniche, cioè le eq. diff. del moto sono nella forma $\dot{x} = E\nabla_x H$, cioè

$$\dot{x}_i = \sum_l E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l}$$

Allora

$$\dot{\tilde{x}}_j = \sum_{i,l} \tilde{J}_{ji} E_{il} \frac{\partial H}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{w}_j}{\partial t} \qquad (*)$$

in forma vettoriale $\dot{\tilde{x}} = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$

La trasf. è CANONICA se $\exists K(\tilde{x},t)$ t.c. le eq. del moto nelle coord $\tilde{x}$ sono nella forma

$$\dot{\tilde{x}} = E \nabla_{\tilde{x}} K \qquad (\star)$$

Confrontando $(*)$ con $(\star)$ si vede che la trasf. $\tilde{x} = \tilde{w}(\tilde{x},t)$ è canonica se $\forall H$, $\exists K$ t.c.

$$\tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \nabla_{\tilde{x}} K$$

Espressa per bene con tutti gli argomenti espliciti:

$$\tilde{J}(w(\tilde{x},t),t)\, E\, \nabla_x H(w(\tilde{x},t),t) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}(w(\tilde{x},t),t) = E \nabla_{\tilde{x}} K(\tilde{x},t)$$

Esempi di trasf. canoniche

1) $p_h = \underbrace{\tilde{p}_h + \underset{\text{cost.}}{\underset{\uparrow}{a_h}}}_{\equiv u_h(\tilde{p},\tilde{q},t)}$ $\qquad q_h = \tilde{q}_h + \underset{\text{cost.}}{\underset{\uparrow}{b_h}}$ $\qquad K(\tilde{p},\tilde{q},t) = H(\tilde{p}+a, \tilde{q}+b, t)$

2) $p_h = \alpha \tilde{p}_h \qquad q_h = \beta \tilde{q}_h \qquad \alpha, \beta \neq 0 \qquad K(\tilde{p},\tilde{q},t) = \frac{1}{\alpha\beta} H(\alpha\tilde{p}, \beta\tilde{q}, t)$

3) $p_h = \tilde{p}_h \qquad q_h = \tilde{q}_h + \alpha t \tilde{p}_h \qquad K(\tilde{p},\tilde{q},t) = H(\tilde{p}, \tilde{q}+\alpha t \tilde{p}, t) - \frac{\alpha}{2}\tilde{p}^2$

↳ Es. particella libera

$H(\bar{p},\bar{q}) = \frac{\bar{p}^2}{2m}$ $\qquad \alpha = 1/m$ $\qquad K(\tilde{p},\tilde{q},t) = \frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\tilde{p}^2 = 0$

→ eq. di Ham. relative a K:

$$\dot{\tilde{p}}_h = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}_h} = 0 \qquad \dot{\tilde{q}}_h = +\frac{\partial K}{\partial \tilde{p}_h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_h(t) = \tilde{p}_h^{(0)} \qquad \tilde{q}_h(t) = \tilde{q}_h^{(0)} \quad \longrightarrow$$

usando la trasf. di coord. $\longrightarrow$

$$p_h(t) = \tilde{p}_h^{(0)}$$
$$q_h(t) = \tilde{q}_h^{(0)} + t\,\frac{\tilde{p}_h^{(0)}}{m}$$

Esempio di trasformazione NON-CANONICA

$p = \tilde{p}\cos\tilde{q} \qquad q = \tilde{p}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} \quad , \quad H = p^2/2m$

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = p \end{cases} \xrightarrow[\text{mettiamo qte eq.}]{} \begin{cases} \dot{\tilde{p}}\cos\tilde{q} - \tilde{p}\dot{\tilde{q}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} = 0 \\ \dot{\tilde{p}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} + \tilde{p}\dot{\tilde{q}}\cos\tilde{q} = \tilde{p}\cos\tilde{q} \end{cases} \longrightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde p} = \tilde p \cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q \\ \dot{\tilde q} = \cos^2\tilde q \end{cases} \xleftarrow{?} \begin{matrix} -\dfrac{\partial k}{\partial \tilde q} \\ \dfrac{\partial k}{\partial \tilde p} \end{matrix} \quad \exists k \text{ t.c. } !$$

Se esistesse, allora dovrei trovare k t.c.

$$\frac{\partial k}{\partial \tilde q} = -\tilde p \cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q \quad \text{e} \quad \frac{\partial k}{\partial \tilde p} = \cos^2\tilde q$$

e dovrebbe poi valere

$$\frac{\partial}{\partial \tilde p}\left(\frac{\partial k}{\partial \tilde q}\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde q}\left(\frac{\partial k}{\partial \tilde p}\right)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ -\cos\tilde q \,\mathrm{sen}\,\tilde q & \neq & -2\cos\tilde q\,\mathrm{sen}\,\tilde q \end{matrix} \Rightarrow \text{trasf. non è canonica}$$

(perché $\nexists k$ t.c. ...)

4) Invece la trasf. di coord.

$$p = \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \qquad q = \sqrt{2\tilde p}\,\mathrm{sen}\,\tilde q$$

è canonica con $K = H(\sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q, \sqrt{2\tilde p}\,\mathrm{sen}\,\tilde q, t)$.

5) Trasformazioni PUNTUALI ESTESE

$$q_h = v_h(\tilde q, t) \qquad \text{(non dip. da } \tilde p\text{)}$$

$$p_h = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \tilde p_k \frac{\partial v_k}{\partial q_h}}_{u_h(\tilde p, \tilde q, t)} \qquad \text{(non generica)}$$

Prop. Se la trasf. è canonica, allora $\exists\, c$ (dipendente al più da t) t.c.

$$K(\tilde{x},t) = c\,\tilde{H}(\tilde{x},t) + K_0$$

dove $\tilde{H}(\tilde{x},t) = H(w(\tilde{x},t),t)$ e

K_0 è l'Hamiltoniana corrispondente a $H=0$, cioè

t.c. $\quad E\,\nabla_{\tilde{x}} K_0 = \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$ $\qquad$ K_0 è non banale quando trasf. canonica dipende dal tempo.

e c è t.c. $\quad -\tilde{J}E\tilde{J}^T E = c\,\mathbb{1}_{2n}$

Dim.

$$E\,\nabla_{\tilde{x}} K \overset{\text{trasf. canonica per ipotesi}}{=} \tilde{J}E\,\nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} =$$

$$= E^{-1}E\,\tilde{J}E\,\tilde{J}^T(\tilde{J}^T)^{-1}\nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} =$$

$E^{-1} = -E$

$$= -E\,E\,\tilde{J}E\,\tilde{J}^T\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H} + E\nabla_{\tilde{x}}K_0$$

$$\sum_i J^T_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial H}{\partial x_j} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}_i}$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{-E\tilde{J}E\tilde{J}^T\nabla_{\tilde{x}}\tilde{H}}_{\therefore} = \nabla_{\tilde{x}}(K-K_0)$$

cioè $\therefore$ è irrotazionale

Usiamo Lemma 4 (vedi ultima pagina) per dimostrare che
$$-E\tilde{J}E\tilde{J}^T = c\,\mathbb{1}_{2n}$$

$$\Rightarrow\ c\,\mathbb{1}_{2n}\nabla_{\tilde{x}}\hat{H} = \nabla_{\tilde{x}}(K-K_0)$$

$\Rightarrow K = c\tilde{H} + K_0$ a meno di una cost. irrilevante //

Riassunto:

Data trasf. coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ e

sua inversa $\tilde{x}_j = \tilde{w}_j(x, t)$,

qta è CANONICA se $\forall H(x,t)$, $\exists K(\tilde{x}, t)$ t.c.

se $x(t)$ soddisfa $\dot{x} = E \nabla_x H$, allora

$\tilde{x}(t) = \tilde{w}(x(t), t)$ soddisfa $\dot{\tilde{x}} = E \nabla_{\tilde{x}} K$

Qto avviene qndo $\exists K$ t.c.

$$E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} \qquad \text{dove } \tilde{J}_{ij} = \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_j}$$

Come si fa a capire se una trasf. è canonica (senza applicare la def.)?

↓

CRITERI di CANONICITÀ

Possiamo ora dimostrare il primo CRITERIO di CANONICITÀ:

<u>Prop</u>. La trasf. di coordinate $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$

è CANONICA $\iff$ $\exists\, c \neq 0$ t.c. $J E J^T = c E$

con $J_{ij} = \dfrac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$

<u>Dim</u> $\Rightarrow$: se è canonica, possiamo usare la prop. precedente e concludere che $\exists\, c \neq 0$ t.c.

$-\tilde{J} E \tilde{J}^T E = c\, \mathbb{1}_{2n}$, ovvero $\tilde{J} E \tilde{J}^T = c E$;

moltiplichiamo a sinistra per J e a destra per J^T e usiamo $J\tilde{J} = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ $J E J^T = c E$ //

$\Leftarrow$: (più interessante perché ci dà un criterio di canonicità)

Dobbiamo dim che se $\exists c$ t.c. $J E J^T = c E$ allora $\forall H$ $\exists K$ t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} K = \tilde{J} E \nabla_x H + \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$ $(*)$

equiv. a $\tilde{J} E \tilde{J}^T = c E$

Nella dim. della prop precedente abbiamo visto che

$$\tilde{J} E \nabla_x H = \tilde{J} E \tilde{J}^T \nabla_{\tilde{x}} \tilde{H}$$

$$\overset{\text{per ipotesi di } (\Leftarrow)}{=} E \nabla_{\tilde{x}} (c \tilde{H})$$

Se $\exists\, K_0$ t.c. $E \nabla_{\tilde{x}} K_0 = \dfrac{\partial \tilde{w}}{\partial t}$, allora $\exists\, K$ che soddisfa $(*)$ e cioè $K = c\tilde{H} + K_0$.

Qto è vero grazie a Lemmi 2 e 3 (vedi ultima pagina):

$\exists k_0$ s.t. $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} = E \nabla_{\tilde{x}} k \underset{\text{Lemma 3}}{\iff} \Lambda = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{w}(w(\tilde{x},t),t) \right)$ è t.c. $\Lambda^T E + E \Lambda = 0$

$$\Lambda_{ij} = \sum_{l=1}^{2n} \frac{\partial^2 \tilde{w}_i}{\partial t \, \partial x_l} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} = \left(\frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1} \right)_{ij}$$

che soddisfa per Lemma 2. //

Data una trasf. canonica che soddisfa

$$c \, J' E J'^T = E \qquad (A) \qquad J' = \frac{\partial w'}{\partial \tilde{x}}$$

riusciamo sempre a trovare una trasf. canonica che soddisfa

$$J E J^T = E \qquad (B) \qquad J = \frac{\partial w}{\partial \tilde{x}}$$

Infatti, la composizione di trasf. canoniche è una trasf. canonica. Possiamo quindi comporre la trasf. canonica (A) con

$$p = \alpha p' \qquad q = \beta q' \qquad \alpha = \beta = \sqrt{c} \qquad \bar{x} = \sqrt{c}\, \bar{x}'$$

$$\Rightarrow \quad \bar{w}(\tilde{x},t) = \sqrt{c}\, \bar{w}'(\tilde{x},t)$$

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j} = \sqrt{c} \frac{\partial w_i'}{\partial \tilde{x}_j} = \sqrt{c}\, J'$$

$$\Rightarrow \quad J E J^T = c \, J' E J'^T = E .$$

Possiamo quindi restringerci al caso $c=1$ e ottenere tutte le trasf. canoniche (con c generico) attraverso la composizione descritta sopra. Se $c=1$, trasf. è detta TRASF. CANONICA UNIVALENTE.

Le trasf. di coord. t.c. lo Jacobiano J soddisfa $JEJ^T = E$ sono dette TRASFORMAZIONI SIMPLETTICHE, le matrici A t.c. $AEA^T = E$ sono dette MATRICI SIMPLETTICHE. $A \in Sp(2n)$

[Le matrici ORTOGONALI sono t.c. $OO^T = \mathbb{1}$, cioè $O\mathbb{1}O^T = \mathbb{1}$. $O \in SO(N)$]

<u>Lemma 1</u>. Localmente, $\bar{v}$ è gradiente di una funz. F (cioè $\bar{v} = \bar{\nabla} F$) se e solo se il suo ROTORE è nullo, cioè $\partial_i v_j - \partial_j v_i = 0$. (Forme chiuse sono localmente esatte e viceversa.)

<u>Lemma 2</u>. Se $\tilde{J}$ t.c. $\tilde{J}^T E \tilde{J} = cE$, allora

$$B = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1} \quad \text{soddisfa} \quad B^T E + E B = 0,$$

cioè EB è simm.

<u>Dim</u>. Dimostriamo che $E \cdot \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \cdot \tilde{J}^{-1}$ è simmetrica:

differenziamo $\tilde{J}^T E \tilde{J} = cE \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E \tilde{J} + \tilde{J}^T E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} = 0$$

moltiplichiamo per $(\tilde{J}^T)^{-1}$ a sin. e $\tilde{J}^{-1}$ a des.

$$\rightarrow \underbrace{\tilde{J}^{-T} \frac{\partial \tilde{J}^T}{\partial t} E}_{= -\left(E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1}\right)^T} + E \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \tilde{J}^{-1} = 0$$

//

Lemma 3. Dato campo vett. $\bar{v}(x,t)$, può essere scritto come $\bar{v} = E \nabla_x F$, per qualche $F(x,t)$, $\iff$ $\Omega \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ soddisfa $\Omega^T E + E\Omega = 0$

cioè $E\Omega$ simm.

Dim. $\Rightarrow$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_k E_{ik} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} \leftrightarrow \Omega = E(\partial^2 F)$$

$\Rightarrow E\Omega$ è simm.

$\Leftarrow$: $\bar{u} \equiv E\bar{v} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = E\Omega$ simm.

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0 \underset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \exists F \text{ t.c. } \bar{u} = -\nabla_x F \Rightarrow$$

$\Rightarrow \bar{v} = E \nabla_x F$ //

Lemma 4. Sia $A(x,t)$ matrice $2n \times 2n$ (con $x \in \mathbb{R}^{2n}$)

Se $\forall$ funz. regolare $F(x,t)$, il campo vett. $A \nabla_x F$ è IRROTAZIONALE (cioè ha rotore nullo $\iff$ (localm.) $= \nabla_x(\cdots)$)

allora $\exists$ funz. $a(t)$ t.c. $A = a(t)\mathbb{1}$.

Dim. $A\nabla_x F$ irrotaz. $\overset{\forall F}{\longleftrightarrow}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l A_{jl} \frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l A_{il} \frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \quad \forall F \qquad (0)$$

Prendiamo $F = x_i \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii}$ (1)

" $F = x_i^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ji} x_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ii} x_i)$ (2)

$$(2) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ji} x_i) - \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{ii} x_i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji}\right) x_i + A_{ji} - \left(\frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii}\right) x_i - A_{ii}\delta_{ij}$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} A_{ji} = A_{ii}\delta_{ij} \quad (3) \quad \Rightarrow A \text{ è matrice diagonale}$$

Inoltre $(1),(3) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ji} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ii}\,\delta_{ij} \Rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} A_{ii} = 0$ per $j \neq i$

$\Rightarrow A_{ij}(x,t) = a_i(x_i,t)\,\delta_{ij}$

Mettiamo in (0):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_l a_j(x_j,t)\delta_{jl}\frac{\partial F}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l a_i(x_i,t)\,\delta_{il}\frac{\partial F}{\partial x_l} = 0 \qquad \forall F$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_j(x_j,t)\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x_i,t)\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \forall F$$

per $i \neq j$ $\quad \left[a_j(x_j,t) - a_i(x_i,t)\right]\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \forall F$

$$\underset{\text{indip. da } x_i}{a_j(x_j,t)} = \underset{\text{indip. da } x_j}{a_i(x_i,t)} \qquad i \neq j$$

$\rightarrow \quad a_i(x_i,t) = a(t) \quad \forall i$ //