Vediamo altri criteri di canonicità

CONDIZIONE DI LIE

Def. la trasf. di coord. $\begin{cases} p_h = u_h(\hat{p}, \hat{q}, t) \\ q_h = v_h(\hat{p}, \hat{p}, t) \end{cases}$ $\swarrow (\star)$ soddisfa

la condiz. di LIE se $\exists$ una cost. $c \neq 0$ e una funzione $F(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ tali che

$$c \sum_{h=1}^{m} u_h \, dv_h = \sum_{h=1}^{m} \tilde{p}_h \, d\tilde{q}_h + dF - K_0 \, dt$$

con $K_0 = \dfrac{\partial F}{\partial t} - c \sum_{h=1}^{m} u_h \dfrac{\partial v_h}{\partial t}$

A volte la condiz. è scritta come

$$c \, \underbrace{\bar{u} \cdot d\bar{v}}_{\bar{p} \cdot d\bar{q}} = \tilde{\bar{p}} \cdot d\tilde{\bar{q}} + dF - K_0 \, dt \qquad \bar{w} = (\bar{u}, \bar{v})$$

Scriviamo la CONDIZIONE di LIE nel formalismo compatto:

$$\bar{u} \cdot d\bar{v} = \frac{1}{2} \bar{u} \cdot d\bar{v} + \frac{1}{2} \bar{u} \cdot d\bar{v} = \frac{1}{2} \bar{u} \cdot dv + \frac{1}{2} d(\bar{u} \cdot \bar{v}) - \frac{1}{2} \bar{v} \cdot d\bar{u}$$

$$= \frac{1}{2} (\bar{u} \cdot d\bar{v} - \bar{v} \cdot d\bar{u}) + \frac{1}{2} d(\bar{u} \cdot \bar{v}) = -\frac{1}{2} \bar{w} \cdot E \, d\bar{w} + \frac{1}{2} d(\bar{u} \cdot \bar{v})$$

$$\tilde{\bar{p}} \cdot d\tilde{\bar{q}} = -\frac{1}{2} \tilde{\bar{x}} \cdot E \, d\tilde{\bar{x}} + \frac{1}{2} d(\tilde{\bar{p}} \cdot \tilde{\bar{q}})$$

$$\Rightarrow c \, \bar{w} \cdot E \, d\bar{w} = \tilde{\bar{x}} \cdot E \, d\tilde{\bar{x}} + d(\overbrace{c \, \bar{u} \cdot \bar{v} - \tilde{\bar{p}} \cdot \tilde{\bar{q}} - 2F}^{\equiv G}) + 2K_0 \, dt$$

$$\rightarrow \quad c \, \bar{w} \cdot E \, d\bar{w} = \tilde{\bar{x}} \cdot E \, d\tilde{\bar{x}} + dG + 2K_0 \, dt$$

Prop. Se la trasf. di coord. (*) soddisfa la condiz. di Lie allora essa è CANONICA con

$$K = c\tilde{H} + K_0$$

chiamata "valenza"

Viceversa, se (*) è canonica, allora $\exists\, c$ e F t.c. (*) soddisfa cond. Lie.

Dim. vedi dopo. //

Negli esempi precedenti

1) $c = 1$ $\quad F = \bar{a} \cdot \tilde{\bar{q}}$

2) $c = \dfrac{1}{\alpha\beta}$ $\quad F = 0$

3) $c = 1$ $\quad F = \dfrac{1}{2}\alpha t\ \bar{\tilde{p}} \cdot \bar{\tilde{p}}$

4) $c = 1$ $\quad F = \tilde{p} \sin\tilde{q} \cos\tilde{q}$

TRASF. CANONICHE E PARENTESI DI POISSON

$$\{f,g\} = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_l}\frac{\partial g}{\partial p_l} - \frac{\partial f}{\partial p_l}\frac{\partial g}{\partial q_l}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_i} E_{ij} \frac{\partial g}{\partial x_j} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}_n \\ \mathbb{1}_n & 0 \end{pmatrix}$$

P. di P. fondamentali : $\{x_i, x_j\} = E_{ij}$

<u>Def.</u> Una trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ PRESERVA LE PAR. DI POISSON se $\forall f(\bar{x}, t), g(\bar{x}, t)$ e indicando $F(\tilde{x}, t) = f(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)$ e $G(\tilde{x}, t) = g(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)$, si ha

$$\{f, g\}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t) = \{F, G\}(\tilde{x}, t)$$

<u>Prop.</u> Tutte le parentesi di Poisson sono preservate se e solo se sono preservate le parentesi di Poisson fondamentali

cioè se

$$\{w_i, w_j\} = E_{ij}$$

ovvero $\{u_h, u_k\} = 0$
$\{v_h, v_k\} = 0$
$\{u_h, v_k\} = -\delta_{hk}$

<u>Dim.</u> $$\{F, G\} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} \left(\sum_m \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i}\right) E_{ij} \left(\sum_l \frac{\partial g}{\partial x_l} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j}\right)$$

$$= \sum_{m,l} \frac{\partial f}{\partial x_m} \underbrace{\left(\sum_{i,j} \frac{\partial w_m}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j}\right)}_{\{w_m, w_l\}} \frac{\partial g}{\partial x_l} =$$

$$= \sum_{m,l} \frac{\partial f}{\partial x_m} E_{ml} \frac{\partial g}{\partial x_l} = \{f, g\} \quad .//$$

Parentesi di Poisson fondamentali preservate

<u>Prop.</u> La trasf. di coord. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ preserva le par. di Poisson SE E SOLO SE $J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde{x}_j}$ è una MATRICE SIMPLETTICA $(2n \times 2n)$, cioè $J E J^T = E$

<u>Dim.</u> $\{w_k, w_l\} = \sum_{i,j} \frac{\partial w_k}{\partial \tilde{x}_i} E_{ij} \frac{\partial w_l}{\partial \tilde{x}_j} = \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} J_{lj} =$

$$= \sum_{i,j} J_{ki} E_{ij} (J^T)_{jl} = (J E J^T)_{kl}$$

sono preservate se e solo se $= E_{kl}$, cioè se e solo se $(J E J^T)_{kl} = E_{kl}$ .//

$\Downarrow$

<u>Prop.</u> La trasf. di coord. $x = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ è una TRASF. CANONICA UNIVALENTE se e solo se preserva le parentesi di Poisson.

In gen. $\bar{x} = \bar{w}(\tilde{x}, t)$ è CANONICA se e solo se $c\{w_i, w_j\} = \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = E_{ij}$.

Prop. Trasf. di coord. $x_i = w_i(\tilde{x}, t)$ preserva le par. di Poisson SE E SOLO SE soddisfa la condiz. di Lie.

$\Rightarrow$ Qto dimostra che condiz. di Lie è criterio di canonicità

Dim (prendiamo $c = 1$)

Condiz. Lie $\quad \sum_{ij} w_i E_{ij} \, dw_j = \sum_{ij} \tilde{x}_i E_{ij} \, d\tilde{x}_j + dG + 2K_0 \, dt$

Calcoliamo: $dw_j = \sum_e \frac{\partial w_j}{\partial \tilde{x}_e} d\tilde{x}_e + \frac{\partial w_j}{\partial t} dt = \sum_e J_{je} \, d\tilde{x}_e + \frac{\partial w_j}{\partial t} dt$

$$\sum_{i,j,e} w_i E_{ij} J_{je} \, d\tilde{x}_e + \sum_{i,j} w_i E_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{i,e} \tilde{x}_i E_{ie} \, d\tilde{x}_e + \sum_e \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_e} d\tilde{x}_e + \frac{\partial G}{\partial t} dt + 2K_0 \, dt$$

$$\sum_e d\tilde{x}_e \left(\sum_{i,j} w_i E_{ij} J_{je} - \sum_i \tilde{x}_i E_{ie} - \frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_e} \right) +$$

$$+ dt \left(\sum_{i,j} w_i E_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial t} - 2K_0 \right) = 0$$

$\Updownarrow$ si annullano i coeff. di $d\tilde{x}_e \; \forall e$ e di dt.

Coeff. $d\tilde{x}_e$ è nullo se e solo se

$$A_e \equiv \sum_{i,j} w_i E_{ij} J_{je} - \sum_i \tilde{x}_i E_{ie}$$

è il gradiente di una funzione, cioè se il suo rotore è zero

cioè $\quad \frac{\partial A_e}{\partial \tilde{x}_k} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_e} A_k = 0 \qquad$ (Vedi Lemma 1, Lezione 22)

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k}\left(\sum_{ij} w_i E_{ij} J_{je} - \sum_i \tilde{x}_i E_{ie} \right) - (k \leftrightarrow l)$$

$$= \Big[\sum_{ij} \underset{J^T_{ki}}{J_{ik}} E_{ij} J_{je} + \sum_{ij} w_i E_{ij} \underbrace{\frac{\partial^2 w_j}{\partial \tilde{x}_k \partial \tilde{x}_e}}_{\text{simm. in } ke} - \sum_i \delta_{ik} E_{ie} \Big]$$

$$- (k \leftrightarrow l)$$

$$\left[(J^T E J)_{ke} - E_{ke} \right] - \left[(J^T E J)_{ek} - E_{ek} \right]$$

$E^T = -E \qquad (J^T E J)^T = J^T E^T J = -(J^T E J)$

$$= 2 \left[(J^T E J) - E \right]_{ke}$$

Condiz. di Lie è soddisf. $\iff$ A_e è gradiente di una funz. $\iff$ $J^T E J = E$

$\iff$ traj di coord. preserva le parentesi di Poisson

($J E J^T = E \iff E J^T = J^{-1} E \underset{E^2 = 1}{\iff} J^T = -E J^{-1} E \iff$

$\iff J^T E J = -E J^{-1} E E J = E J^{-1} J = E$ //)

//

Esempio $\qquad p_h = \tilde{p}_h \qquad q_h = \tilde{q}_h + \alpha \tilde{p}_h t \qquad (c=1)$

$\qquad\qquad u_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t) \qquad\qquad v_h(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$

$$\{u_h, u_k\} = \{\tilde{p}_h, \tilde{p}_k\} = 0$$

$$\{v_h, v_k\} = \{\tilde{q}_h + \alpha \tilde{p}_h t, \tilde{q}_k + \alpha \tilde{p}_k t\} = \cancel{\{\tilde{q}_h, \tilde{q}_k\}} +$$

$$+\alpha t\{\tilde q_h, \tilde p_k\} + \alpha t\{\tilde p_h, \tilde q_k\} + (\alpha t)^2 \cancel{\{\tilde p_h, \tilde p_k\}}$$
$$= \alpha t(\delta_{hk} + (-\delta_{hk})) = 0$$

$$\{u_h, v_k\} = \{\tilde p_h, \tilde q_k + \alpha \tilde p_k t\} = \{\tilde p_h, \tilde q_k\} + \alpha t \cancel{\{\tilde p_h, \tilde p_k\}}$$
$$= \delta_{hk}$$

FLUSSO HAMILTONIANO come trasf. canonica

$$\dot{\bar x} = \bar f(\bar x, t) = E \bar\nabla_{\bar x} H$$

$\downarrow$

soluzione $\bar x = \bar x(t; \bar x_0)$: qto definisce una famiglia (al variare di t) di mappe nello spazio delle fasi, detto FLUSSO HAMILTONIANO

$$\Phi_t : T^*Q \to T^*Q$$
$$\bar x_0 \mapsto \Phi_t(\bar x_0) = \bar x(t; \bar x_0)$$

Prop. Consideriamo il sist. Hamiltoniano con Hamiltoniana H e indichiamo con $\bar x = \bar w(\tilde x, t)$, dove $\bar w(\tilde x, t) = \bar x(t, \tilde x)$, il flusso Hamiltoniano con DATI INIZIALI $\tilde x$.

Allora tale mappa è una TRASF. CANONICA.

(Φ_t è una trasf canonica $\forall t$)

Dim. Vogliamo dim. che $J E J^T = E$ ($\Leftrightarrow J^T E J = E$)

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde x_j} = \frac{\partial (\Phi_t)_i}{\partial \tilde x_j} = \frac{\partial x_i(t; \tilde x)}{\partial \tilde x_j}$$

Innanzitutto notiamo che $J^T E J = E$ in $t=0$; infatti

$$\left(\Phi_{t=0}(\vec{x})\right)_i = \tilde{x}_i \Rightarrow J_{t=0} = \mathbb{1} .$$

Calcoliamo

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j,k} \underbrace{J_{ji}}_{=J^T_{ij}} E_{jk} J_{kh}\right) = \frac{d}{dt}\left[\sum_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h}\right] =$$

$$= \sum_{jk}\left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\Big(\underbrace{\frac{\partial x_j}{\partial t}}_{=\sum_l E_{jl}\frac{\partial H}{\partial x_l}}\Big) E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_h}\Big(\underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial t}}_{=\sum_m E_{km}\frac{\partial H}{\partial x_m}}\Big)\right]$$

$x_j(t,\hat{x})$ soddisf. eq. di Ham. con Hamiltoniana H

$$= \sum_{jkla} E_{jl} \frac{\partial^2 H}{\partial x_a \partial x_l} \frac{\partial x_a}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_h} +$$

$$+ \sum_{jkmb} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_i} E_{jk} E_{km} \frac{\partial^2 H}{\partial x_b \partial x_m} \frac{\partial x_b}{\partial \tilde{x}_h} =$$

$$= \sum_{jkla} J^T_{ia} (\partial^2 H)_{al} E_{lj} (-1) E_{jk} J_{kh}$$

$$+ \sum_{jkmb} J^T_{ij} E_{jk} E_{km} (\partial^2 H)_{mb} J_{bh}$$

$$= \Big[-J^T(\partial^2 H) \overset{-\mathbb{1}}{\overset{\parallel}{E^2}} J + J^T \overset{-\mathbb{1}}{\overset{\parallel}{E^2}} (\partial^2 H) J\Big]_{ih}$$

$$= \left[J^T(\partial^2 H) J - J^T(\partial^2 H) J\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(J^T E J\right)_t = 0 \quad \Rightarrow \quad J^T E J_t \text{ è matrice cost. (in } t)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ J^T E J_{t=0} = E}}{\Rightarrow} J^T E J = E \quad \forall t \quad \Big) \quad //$$

Osservazione

Flusso Hamiltoniano è una trasf. canonica

$$x = w(\tilde{x}, t) \quad \text{con} \quad w(\tilde{x},t) = x(t,\tilde{x})$$

soluz., con dato iniziale $\tilde{x}$, di eq. del moto

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t;\tilde{x}) = E \nabla_x H$$

$\uparrow$ H definisce il flusso Hamilt.

Qual è l'Hamiltoniana K relativa all' Hamil. H ?

Prendiamo $\tilde{w}_i(w(\tilde{x},t),t) = \tilde{x}_i$, che nel nostro caso diventa

$$\tilde{w}_i(x(t,\tilde{x}),t) = \tilde{x}_i$$

e facciamo derivata totale rispetto al tempo

$$\sum_l \underbrace{\frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_l}}_{= \tilde{J}_{il}} \underbrace{\frac{\partial x_l(t,\tilde{x})}{\partial t}}_{= \sum_s E_{ls} \frac{\partial H}{\partial x_s}} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = 0$$

cioè

$$\underbrace{\tilde{J} E \nabla_x H + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t}}_{\nabla_{\tilde{x}} K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\tilde{x}} K = 0$$

cioè $\underline{\underline{K = 0}}$ (a meno di cost. irrilevante)

$\rightsquigarrow$ Il flusso Hamiltoniano generato da $H^{(*)}$, coniuga H stessa in $K=0$

(*) Posso generare TRASFORMAZIONI CANONICHE attraverso la scelta di una funzione $\hat{H}(p,q)$:

$$\hat{H}(p,q) \longrightarrow \dot{x} = E \nabla_x \hat{H} \longrightarrow x = \Phi_t^{\hat{H}}(\tilde{x})$$

- Una volta che ho $\Phi_t^{\hat{H}}$, posso applicarla a qlsiasi sist. Ham. con Hamiltoniana H e ottenere la K coniugata (come detto sopra, se scelgo $H = \hat{H}$, allora $K = 0$).

- In generale se ho famiglia a un parametro di trasformazioni canoniche, posso pensarla come il flusso Hamiltoniano di una qlche Hamiltoniana $\hat{H}$, che chiamo il GENERATORE di qle trasformazioni.

Osservazione :

Come visto precedentemente, data trasf. di coordinate

$$x = w(\tilde{x}, t) \qquad \text{e} \qquad \text{inversa} \qquad \tilde{x} = \tilde{w}(x, t)$$

se $\dot{x}_i = \sum_j E_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} = \{x, H\}$

allora $$\dot{\tilde{x}}_i = \sum_{lj} \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial x_l} E_{lj} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} = \left(\{\tilde{w}_i, H\} + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t} \right) \circ \bar{w}(\tilde{x}, t)$$

qto non stupisce, perché $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$ se f valutata su soluz. eq. di Hamilton

Quindi la condizione di CANONICITÀ può essere riscritta nel seguente modo: trasf. è canonica se $\forall H$ $\exists K$ t.c.

$$\{\tilde{x}_i, K\}(\tilde{x}, t) = \{\tilde{w}_i, H\}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t) + \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial t}(\bar{w}(\tilde{x}, t), t)$$

$\parallel$ se si preservano par. Poisson

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{H}\}$$