1) Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : I = [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, ct) \quad , \quad R, c > 0$$

SOLUZIONE

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t, c)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{4\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{R^2+c^2}\, dt$$

$$= \boxed{4\pi \cdot \sqrt{R^2+c^2}}$$

2) Calcolare la lunghezza della curva data dall'intersezione di due superfici

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+2z^2=1 \end{cases}$$

SOLUZIONE

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+2z^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2=z^2 \\ x^2+2z^2=1 \end{cases}$$

Questa curva sta in $\mathbb{R}^3$, ed è simmetrica (notate che compaiono solo ~~quadrati~~ potenze di 2). Possiamo dunque calcolare la lunghezza dell'arco che si ottiene prendendo $x, y, z \geq 0$ e poi moltiplicare per 8 (in $\mathbb{R}^3$ abbiamo 8 quadranti)

Con queste limitazioni si ottiene la curva

$$\gamma(z): \begin{cases} x=\sqrt{1-2z^2} \\ y=z \\ z=z \end{cases} \qquad z\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

z fa da parametro

$$\gamma'(z)=\left(\frac{-2z}{\sqrt{1-2z^2}},1,1\right) \Rightarrow \|\gamma'(z)\|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2z^2}}$$

$$\ell(\gamma)=8\int_0^{1/\sqrt{2}}\|\gamma'(z)\|\,dz=8\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2z^2}}\,dz=8\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(\sqrt{2}z)^2}}\,dz=8\arcsin 1 = \boxed{4\pi}$$

3) Calcolare

$$\int_{\gamma} (x+y^2)\, ds$$

essendo $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (|t|, t)$

<u>SOLUZIONE</u>

$$\int_{\gamma} (x+y^2)\, ds = \int_{\gamma_1} (x+y^2)\, ds + \int_{\gamma_2} (x+y^2)\, ds = (*)$$

γ_1 = "parte" di γ parametrizzata con $t \in [-1,0]$

γ_2 = ——— " ——— $t \in [0,1]$

$$(*) = \int_{-1}^{0} (-t+t^2)\sqrt{2}\, dt + \int_{0}^{1} (t+t^2)\sqrt{2}\, dt$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt{2}$$