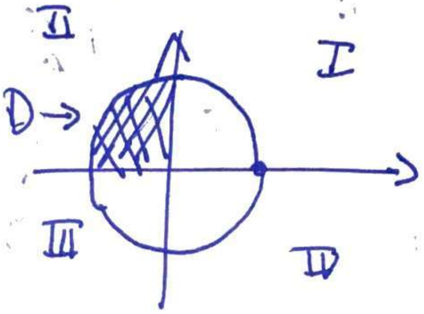
11 Sia D l'intersezione fra il 2° quadrante del piano cartesiano e il cerchio di raggio 1.
Calcolare

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

SOLUZIONE

Disegnamo il dominio



In coordinate polari $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ il dominio è

$$\tilde{D} = \left\{ (r,\theta) : r \in [0,1],\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \right\}.$$

Si ha allora

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

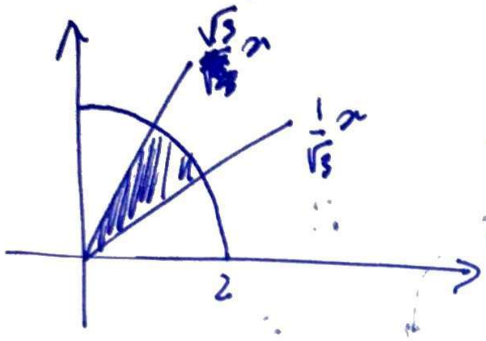
$$\Rightarrow \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \frac{1}{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^1 \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2\rho}{1+\rho^2}\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\ln(1+\rho^2)\Big]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\ln(2) = \boxed{\frac{\pi}{4}\ln(2)}$$

2) Calcolare $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ $\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4,\ \frac{1}{\sqrt{3}}x\leq y\leq \sqrt{3}x\}$

SVOLGIMENTO



$\rightsquigarrow \boxed{\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}}$

questi due li trovo dai coefficienti angolari delle due rette, tramite arctg(·)

$\boxed{0\leq\rho\leq 2}$

$$\Rightarrow \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 d\theta = \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{8}{3}$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{8}{3} = \boxed{\frac{4}{9}\pi}$$

3) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^2 y}{1+x^4+y^6}$$

SOLUZIONE

Osserviamo che

$$\frac{x^2y}{1+x^4+y^6} \simeq \frac{x^2y}{x^4+y^6} \quad \text{quando} \quad \begin{array}{l} x\to+\infty \\ y\to+\infty \end{array}$$

Possiamo dunque calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^2y}{x^4+y^6}$$

Raccogliamo x^4 al numeratore e denominatore

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{x^2y}{x^4+y^6} = \lim_{-''-} \frac{\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^6}{x^4}} \cdot \cancel{\frac{x^4}{x^4}}$$

$$\frac{y}{x^2} = \left(\frac{y^3}{x^6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{x^4}\,\frac{y^3}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim \ldots = \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}\,\frac{y^3}{x^2}}}{1+\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(\ )} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} \, \frac{\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}{1+\left(\frac{y^3}{x^2}\right)}$$

Osserviamo poi che

$$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}} < \frac{y^3}{x^2} \quad \text{per } x \text{ e } y \to +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \underbrace{\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}}_{0} \boxed{\frac{\left(y^3/x^2\right)^{1/3}}{1+\left(y^3/x^2\right)^2}} = 0 \quad , \text{ essendo}$$

questo è LIMITATO

$$\left|\frac{\left(y^3/x^2\right)^{1/3}}{1+\left(y^3/x^2\right)^2}\right| \le \left|\frac{y^3/x^2}{1+\left(y^3/x^2\right)^2}\right| \le 1$$

Ricorda $\left|\frac{t}{1+t^2}\right| \le 1 \quad \forall t$

4) Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$$

SOLUZIONE

Prendiamo restrizioni

$$y = ax^2$$

Ottengo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+a^2x^4}{ax^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{a}+ax^2\right) = \frac{1}{a}$$

Poichè il limite, nel caso di questa restrizione, dipende da "a", allora si può concludere che il limite NON ESISTE

5) Scrivere l'equazione del piano tangente a $z = f(x,y) = x^2 y$ nel punto $P = (\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{1})$

SOLUZIONE

Osserviamo prima di tutto che $P = (1,1,1)$ soddisfa l'equazione assegnata $z = x^2 y$, pertanto posso scrivere l'equazione del piano tangente, che è

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\nabla f = (2xy, x^2) \quad , \quad \nabla f(1,1) = (2,1)$$

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

$$= 1 + 2(x-1) + 1\cdot(y-1) = 1+2x-2+y-1$$

$\Rightarrow$ l'equazione cercata è

$$\boxed{z = 2x+y-2}$$

6) Calcolare l'equazione del piano tangente a $f(x,y) = \sqrt{9-xy}$ nel punto $P = (\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2)$

SOLUZIONE

$(\sqrt{5}, \sqrt{5}, 2)$ verifica $z = f(x,y) \Rightarrow$ posso calcolare il piano tangente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{2\sqrt{9-xy}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{2\sqrt{9-xy}}$$

$$z = -\frac{\sqrt{5}}{4}x - \frac{\sqrt{5}}{4}y + \frac{9}{2}$$

NOTA IMPORTANTE ←

In questi esercizi in cui si calcola il piano tangente, oltre a verificare che il punto in oggetto stia effettivamente sulla superficie (cioè che verifichi $z = f(x,y)$) è <u>FONDAMENTALE</u> anche verificare che le derivate parziali di f $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ siano continue nel punto considerato.

7) Trovare estremi assoluti di

$$f(x,y) := x^2+y^2-2y+1$$

su $E = \{\binom{x}{y} : 4x^2+y^2=4\}$.

SOLUZIONE

"E" è chiuso e limitato e f è continua su E
$\Rightarrow$ f è dotata di estremi assoluti in E.

Inoltre $f = x^2+y^2-2y+1$ e $g = 4x^2+y^2-4$ sono di classe C^∞, con

$$\nabla f = (2x, 2y-2) \qquad \nabla g = (8x, 2y)$$

Si ha $\nabla g = 0 \iff (x,y) = (0,0) \notin E$.

Applico il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} 2x = 8\lambda x \\ 2y-2 = 2\lambda y \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ (1-\lambda)y=1 \\ y^2=4 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \lambda = 1/4 \\ y = 4/3 \\ 4x^2 = 20/9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \\ \lambda = \frac{3}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x = -\sqrt{5}/3 \\ y = \frac{4}{3} \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases} ; \begin{cases} x = \sqrt{5}/3 \\ y = 4/3 \\ \lambda = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Si ottengono così i punti

$\underline{x}^1 = (0, -2)$, $\underline{x}^2 = (0, 2)$, $\underline{x}^3 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\underline{x}^4 = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Poiché

$f(\underline{x}^1) = 9$, $f(\underline{x}^2) = 1$, $f(\underline{x}^3) = f(\underline{x}^4) = \frac{2}{3}$

si conclude che

$$\max_{E} f = 9, \quad \min_{E} f = \frac{2}{3}$$