Completezza di Turing della programmazione tramite clausole di Horn

> Ogni funzione $\boldsymbol{g}$ computabile (parziale o totale) sui numeri naturali è specificabile alla Horn.

Dim. Ci contenteremo di delineare la dimostrazione, senza scendere in particolari. Le idee della dimostrazione dovrebbero comunque risultare intuitivamente chiare.

Ci riferiremo alla nozione di computabilità basata sulla ricorsione generale; ossia: $\boldsymbol{g}$ è COMPUTABILE (parziale) sui naturali sse esiste una lista

$$\boldsymbol{g}_0 \, , \dots , \, \boldsymbol{g}_M \, ,$$

con M numero naturale qualsiasi e $\boldsymbol{g}_M = \boldsymbol{g}$, di funzioni $\boldsymbol{g}_i$ tali che ogni $i = 0, \dots, M$ soddisfi almeno una delle sei condizioni elencate qui sotto:

(1) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione di arità $a_i = 1$ che manda ogni numero nello 0; $n \mapsto 0$

(2) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione di arità $a_i = 1$ che manda ciascun numero n nel suo successore immediato $n + 1$; $n \mapsto n+1$

(3) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione di arità $a_i > 0$ che manda—per qualche j con $0 < j \leqslant a_i$— ogni a_i-upla $\langle \, n_1 \, , \dots , \, n_{a_i} \, \rangle$ di numeri nella j-sima componente, n_j; $\langle \, n_1 \, , \dots , \, n_{a_i} \, \rangle \mapsto n_j$

(4) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per *composizione* da funzioni

$$\boldsymbol{g}_h \, , \, \boldsymbol{g}_{\ell_0} \, , \dots , \, \boldsymbol{g}_{\ell_m} \, , \ \text{ con } h \, , \, \ell_0 \, , \dots , \, \ell_m \, < \, i \, ,$$

dove ciascuna delle $\boldsymbol{g}_{\ell_k}$ ha arità uguale all'arità a_i di $\boldsymbol{g}_i$, mentre $\boldsymbol{g}_h$ ha arità $a_h = m + 1$.

Ciò significa che se in $\langle \, n_1 \, , \dots , \, n_{a_i} \, \rangle$ tutte le $\boldsymbol{g}_{\ell_k}$ sono definite, e definito è anche il valore

$$\boldsymbol{g}_h\Big(\, \boldsymbol{g}_{\ell_0}(\, n_1 \, , \dots , \, n_{a_i} \,) \, , \dots , \, \boldsymbol{g}_{\ell_m}(\, n_1 \, , \dots , \, n_{a_i} \,) \, \Big) \, ,$$

quest'ultimo valore verrà a coincidere con $\boldsymbol{g}_i(\, n_1 \, , \dots , \, n_{a_i} \,)$; altrimenti $\boldsymbol{g}_i(\, n_1 \, , \dots , \, n_{a_i} \,)$ rimarrà non definito;

(5) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per *ricorsione primitiva* da funzioni $\boldsymbol{g}_h$ e $\boldsymbol{g}_\ell$, con $h, \ell < i$, dove le arità a_i, a_h, a_ℓ di i, h, ℓ sono cosí legate fra loro: $a_\ell = a_i + 1 = a_h + 2$.

Cioè a dire, $\boldsymbol{g}_i$ risulta definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, 0) & = \boldsymbol{g}_h(n_1, \dots, n_{a_h}), \\ \boldsymbol{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, n+1) & = \boldsymbol{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_h}, n, \boldsymbol{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, n)), \end{cases}$$

che, per ogni a_h-upla $\langle n_1, \dots, n_{a_h} \rangle$ di numeri, consente di determinare il valore $\boldsymbol{g}_i(n_1, \dots, n_{a_i}, 0)$ sse $\boldsymbol{g}_h(n_1, \dots, n_{a_h})$ è definito e, in tal caso, fornisce anche i valori $\boldsymbol{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, m)$ per $m = 1, 2, 3, \dots$, sin quando—se mai ciò accade—non risulti *in*definito
$\boldsymbol{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_h}, m-1, \boldsymbol{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, m-1))$;

(6) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per *minimalizzazione* da una funzione $\boldsymbol{g}_\ell$, con $\ell < i$, dove vige $a_\ell = a_i + 1$ fra le arità di $\boldsymbol{g}_\ell$ e di $\boldsymbol{g}_i$. $\vec{x} \overset{\boldsymbol{g}_i}{\mapsto} \min_{n \geqslant 0} \boldsymbol{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$

Indichiamo con $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ la funzione di arità a_ℓ tale che $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(n_1, \dots, n_{a_i}, m)$ è definita sse vi è un $n \geqslant m$ tale che $\langle \vec{x}, m \rangle \overset{\widetilde{\boldsymbol{g}}_i}{\mapsto} \min_{n \geqslant m} \boldsymbol{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$

- $\boldsymbol{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, n) = 0$ ed inoltre (se $n > m$)
- $\boldsymbol{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, m), \boldsymbol{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, m+1), \dots, \boldsymbol{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, n-1)$ sono tutti definiti e diversi da 0.

Quando queste condizioni sono soddisfatte poniamo $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(n_1, \dots, n_{a_i}, m) = n$ per definizione.

Si avrà allora, per come va intesa la minimalizzazione, che

$$\boldsymbol{g}_i(n_1 \dots, n_{a_i}) = \widetilde{\boldsymbol{g}}_i(n_1 \dots, n_{a_i}, 0),$$

per ogni a_i-upla $\langle n_1, \dots, n_{a_i} \rangle$.

Per ogni lista $\boldsymbol{g}_0\,,\,\boldsymbol{g}_1\,,\ldots,\,\boldsymbol{g}_M$ del tipo su descritto, costruiremo una base $\mathcal{B}$ di clausole (asserzioni e regole) nella quale compariranno solo la costante $\mathbf{0}$, il funtore monadico $\mathsf{s}(\_)$ e letterali

$$p_i(\,t_0\,,\ldots,\,t_{a_i}\,)\,,\quad q_i(\,t_0\,,\ldots,\,t_{a_i+1}\,)$$

e relative negazioni, dove $i\;=\;0\,,\,1\,,\ldots,\,M$. Ciascun simbolo predicativo p_i sta a rappresentare, nelle nostre intenzioni, la funzione $\boldsymbol{g}_i$, mentre il simbolo q_i svolge un ruolo ausiliario e rappresenta la funzione $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ quando $\boldsymbol{g}_i$ è definita per minimalizzazione.

Introduciamo i *numerali*, ponendo $\underline{0}\;=_{\text{Def}}\mathbf{0}$ ed $\underline{m+1}\;=_{\text{Def}}\mathsf{s}(\underline{m})$ per ogni numero naturale m. La nostra costruzione di $\mathcal{B}$ sarà tale che ogni domanda della forma $\neg\,p_i(\,Y\,,\underline{n_1}\,,\ldots,\,\underline{n_{a_i}}\,)$ ammetta risposte corrette se e solo se $\boldsymbol{g}_i(\,n_1\,,\ldots,\,n_{a_i}\,)$ è definito, in tal caso avendo come unica risposta la sostituzione $Y\;\mapsto\;\underline{\boldsymbol{g}_i(\,n_1\,,\ldots,\,n_{a_i}\,)}$. In altre parole,

$$\mathcal{B}\;\;\models\;\;\exists\,y\;\;p_i(\,y\,,\,\underline{n_1}\,,\ldots,\,\underline{n_{a_i}}\,)\quad\text{sse}$$
$$\boldsymbol{g}_i(\,n_1\,,\ldots,\,n_{a_i}\,)\text{ è definito}\,,$$

e in tal caso esiste uno e un solo numerale $\underline{m}$ per cui vale

$$\mathcal{B}\;\;\models\;\;p_i(\,\underline{m}\,,\,\underline{n_1}\,,\ldots,\,\underline{n_{a_i}}\,)$$

e si tratta proprio di quello per cui vale $m=\boldsymbol{g}_i(\,n_1\,,\ldots,\,n_{a_i}\,)$.

La costruzione procede per tappe. Poniamo, per cominciare, $\mathcal{B}_0\;=\;\emptyset$. All'i-sima tappa della costruzione otterremo $\mathcal{B}_{i+1}$ aggiungendo a $\mathcal{B}_i$ le clausole definienti p_i (assieme a q_i, se serve). Alla fine della M-sima tappa si porrà $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{M+1}$, la cui esistenza dimostra ciò che ci interessa, ossia che $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}_M$ è definibile alla Horn.

Indichiamo per ciascuno dei casi (1)–(6) contemplati piú su quali siano le clausole che formano $\mathcal{B}_{i+1}\setminus\mathcal{B}_i$ (se i ricade in piú di un caso, ci si regola utilizzando solo il caso che viene per primo):

(1) $p_i(\,\mathbf{0}\,,\;X\,)$;

(2) $p_i(\,\mathsf{s}(X)\,,\;X\,)$;

(3) $p_i(\,X_j\,,\;X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,)$;

(4) $p_i(Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,)\;\leftarrow$

$$\begin{array}{ll} p_h(\,Y\,,\,Y_{\ell_1}\,,\ldots,\,Y_{\ell_{a_h}}\,) & \& \\ p_{\ell_0}(\,Y_{\ell_0}\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,) & \& \\ \cdots & \\ \quad\cdots & \& \\ p_{\ell_{a_h}}(\,Y_{\ell_{a_h}}\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,)\,; & \end{array}$$

(5) $p_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,\mathbf{0}\,)\leftarrow p_h(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,)\,,$

$p_i(\,Y_\ell\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,\mathsf{s}(X)\,)\leftarrow$

$$\begin{array}{l} p_\ell(\,Y_\ell\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,X\,,\,Y_i\,)\,\& \\ p_i(\,Y_i\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,X\,)\,; \end{array}$$

(6) $p_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,)\leftarrow q_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,\mathbf{0}\,)\,,$

$q_i(\,Z\,,\;X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,Z\,)\leftarrow p_\ell(\,\mathbf{0}\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,Z\,)\,,$

$q_i(\,Y_i\,,\;X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,Z\,)\leftarrow$

$$\begin{array}{l} p_\ell(\,\mathsf{s}(Y)\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,Z\,)\,\& \\ q_i(\,Y_i\,,\;X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,\mathsf{s}(Z)\,)\,. \end{array}$$

—Fine della costruzione / dimostrazione—

Riepilogo sinottico

Funzioni iniziali (dove $0 < j \leqslant a$):

$$\mathsf{zero}(\mathbf{0}, X). \qquad n \mapsto 0$$

$$\mathsf{succ}(\mathsf{s}(X), X). \qquad n \mapsto n+1$$

$$\mathsf{proj}_{a,j}(X_j, X_1, \ldots, X_a). \qquad \langle n_1, \ldots, n_a \rangle \mapsto n_j$$

Composizione di funzioni:

Qui, come nelle clausole che seguono, ',' sta per '&'

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{comp}_{g,\vec{f}}(Y, X_1, \ldots, X_a) & \leftarrow & g(Y, F_0, \ldots, F_m), \\ & & f_0(F_0, X_1, \ldots, X_a), \\ & & \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \\ & & f_m(F_m, X_1, \ldots, X_a). \end{array}$$

Ricorsione primitiva:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{ricors}_{base,elab}(Y, X_1, \ldots, X_{a-1}, \mathbf{0}) & \leftarrow & base(Y, X_1, \ldots, X_{a-1}). \\ \mathsf{ricors}_{base,elab}(Y, X_1, \ldots, X_{a-1}, \mathsf{s}(X_a)) & \leftarrow & \mathsf{ricors}_{base,elab}(R, X_1, \ldots, X_a), \\ & & elab(Y, X_1, \ldots, X_a, R). \end{array}$$

Minimizzazione:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{min}_f(Y, X_1, \ldots, X_a) & \leftarrow & \mathsf{min}_f^+(Y, X_1, \ldots, X_a, \mathbf{0}). \\ \mathsf{min}_f^+(X_{a+1}, X_1, \ldots, X_a, X_{a+1}) & \leftarrow & f(\mathbf{0}, X_1, \ldots, X_a, X_{a+1}). \\ \mathsf{min}_f^+(Y, X_1, \ldots, X_a, X_{a+1}) & \leftarrow & f(\mathsf{s}(\_), X_1, \ldots, X_a, X_{a+1}), \\ & & \mathsf{min}_f^+(Y, X_1, \ldots, X_a, \mathsf{s}(X_{a+1})). \end{array}$$

Richiamo :

$$\begin{array}{rcl} \left(g \circ \vec{f}\right)(n_1, \ldots, n_a) & = & g\Big(f_0(n_1, \ldots, n_a), \ldots, f_m(n_1, \ldots, n_a)\Big); \\ \mathsf{ric}_{b,e}(n_1, \ldots, n_{a-1}, 0) & = & b(n_1, \ldots, n_{a-1}), \\ \mathsf{ric}_{b,e}(n_1, \ldots, n_{a-1}, \kappa + 1) & = & e\Big(n_1, \ldots, n_{a-1}, \kappa, \mathsf{ric}_{b,e}(n_1, \ldots, n_{a-1}, \kappa)\Big); \\ (\min_{\ell \geqslant \kappa})\,[\, f(n_1, \ldots, n_a, \kappa) = 0\,] & = & \cdots . \end{array}$$