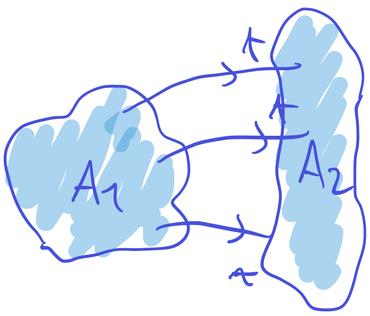
Corollario [TEOREMA DI LIOUVILLE

Le trasformazioni canoniche univalenti $(c=1)$ e tra esse il flusso Hamiltoniano, preservano il volume euclideo

$$dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n$$



la regione A_1 evolve nel tempo t in una regione A_2 dello sp. delle fasi t.c. $vol(A_1) = vol(A_2)$.

Dim.

$$vol(A_1) = \int_{A_1} \underbrace{dp_1 \cdots dp_n \, dq_1 \cdots dq_n}_{dx_1 \cdots dx_{2n}} =$$

$$= \int_{A_2} |\det J| \, d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n$$

siccome trasf. è canonica, $J^T E J = E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(E) = \det(J^T E J) = \det J^T \cdot \det E \cdot \det J$$

$$= (\det J)^2 \det E \Rightarrow (\det J)^2 = 1$$

$$= \int_{A_2} d\tilde{p}_1 \cdots d\tilde{p}_n \, d\tilde{q}_1 \cdots d\tilde{q}_n = vol(A_2) \, .//$$

Osservazione: $\dot{x} = E \nabla_x H$ ← un pto singolare per questo sistema non può essere ASINTOTICAM. STABILE

Infatti se lo fosse, avremmo che non si conserva il volume.

FUNZIONI GENERATRICI di trasf. canoniche

$$\begin{cases} p_h = u_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \\ q_h = v_h(\tilde{p},\tilde{q},t) \end{cases} \quad (\star)$$

se qte relazioni sono invertibili in $\tilde{p}$,
cioè se $\det\left(\frac{\partial v_h}{\partial \tilde{p}_k}\right) \neq 0$, allora
posso sostituire questo secondo set di relazioni
con $\tilde{p}_h = \tilde{p}_h(q,\tilde{q},t)$

Dall'inizio avrei potuto considerare le relaz.

$$(*) \begin{cases} p_h = p_h(q,\tilde{q},t) = u_h(\tilde{p}(q,\tilde{q},t),\tilde{q},t) \\ \tilde{p}_h = \tilde{p}_h(q,\tilde{q},t) \end{cases}$$

invertendo qte relazioni ottengo
le trasf. canoniche $(\star)$

$$F_1(q,\tilde{q},t) \equiv F(\tilde{p}(q,\tilde{q},t),\tilde{q},t)$$

Condizione di Lie

$$\bar{p}\cdot d\bar{q} - \bar{\tilde{p}}\cdot d\bar{\tilde{q}} + K_0\, dt = dF_1$$

Nella forma $(*)$ qti diventano
differenziali di coord. indip.

$$\nabla_{\bar{q}} F_1 \cdot d\bar{q} + \nabla_{\tilde{q}} F_1 \cdot d\bar{\tilde{q}} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\, dt$$

$\Downarrow$

<u>Prop.</u> Per ogni funzione regolare $F_1(q,\tilde{q},t)$ che soddisf.
la condiz. $\det\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_h \partial \tilde{q}_k}\right) \neq 0$, le relazioni

$$p_h(q,\tilde{q},t) = \frac{\partial F_1}{\partial q_h}(q,\tilde{q},t) \qquad \tilde{p}_h(q,\tilde{q},t) = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_h}(q,\tilde{q},t)$$

definiscono (implicitamente, cioè a meno di inversione) una trasf. CANONICA con

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$ K_0

- Si dice che F_1 genera una trasformazione canonica.

- F_1 genera tutte e sole le trasf. canoniche che consentono di prendere q e $\tilde{q}$ come variabili indip.
Per es. F_1 **NON** può generare la trasf. identità

$$\begin{cases} p_h = \tilde{p}_h \\ q_h = \tilde{q}_h \end{cases}$$ non può essere scritta nella forma $(*)$

$$\rightarrow \det\left(\frac{\partial \tilde{q}_h}{\partial \tilde{p}_k}\right) = 0$$

Riarrangiando la condizione di Lie :

$$\left.\begin{aligned} &\bar{p}\cdot d\bar{q} \underbrace{- \bar{\tilde{p}}\cdot d\bar{\tilde{q}}} + K_0\, dt = dF \\ &\bar{p}\cdot d\bar{q} - d(\bar{\tilde{p}}\cdot\bar{\tilde{q}}) + \bar{\tilde{q}}\cdot d\bar{\tilde{p}} + K_0 dt = dF \end{aligned}\right\} \bar{p}\, d\bar{q} + \bar{\tilde{q}}\, d\bar{\tilde{p}} + K_0 dt = dF_2$$

Prop. Per ogni funzione regolare $F_2(\tilde{p}, q, t)$, con $\det\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial \tilde{p}_h \partial q_k}\right) \neq 0$, le relazioni

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h}(\tilde{p}, q, t) \qquad \tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h}(\tilde{p}, q, t)$$

definiscono (implicitam.) una trasf. CANONICA con

$$K = \tilde{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

- F_2 genera la maggior parte delle trasf. interessanti

• identità: $F_2(\tilde{p},q) = \sum_k \tilde{p}_k q_k \rightarrow$ $p_h = \frac{\partial}{\partial q_h} \sum_k \tilde{p}_k q_k = \tilde{p}_h$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial}{\partial \tilde{p}_h} \sum_k \tilde{p}_k q_k = q_h$$

• Trasf. puntuali estese: $F_2 = \sum_k \tilde{p}_k \hat{v}_k(q,t)$

$$p_h = \frac{\partial F_2}{\partial q_h} = \sum_k \tilde{p}_k \frac{\partial \hat{v}_k(q,t)}{\partial q_h}$$

$$\tilde{q}_h = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_h} = \hat{v}_h(q,t) \leftarrow \text{invertibile}$$

Esistono altri due tipi di funz. generatrici, giocando con condizione di Lie

$$F_3(p,\tilde{q},t) \rightarrow \quad q_h = -\frac{\partial F_3}{\partial p_h} \quad \tilde{p}_h = -\frac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}_h} \quad K = \tilde{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

$$F_4(p,\tilde{p},t) \rightarrow \quad q_h = -\frac{\partial F_4}{\partial p_h} \quad \tilde{q}_h = \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{p}_h} \quad K = \tilde{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}$$

ESEMPIO

Consideriamo la seguente trasf. di coord. nello spazio delle fasi (n=1)

$$\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}}\,\mathrm{sen}\,\tilde{q} \end{cases}$$

Verifichiamo che la trasf. di coord. data è canonica

1) PARENTESI DI POISSON (fondam.)

$$\{q,p\} = \{\sqrt{2\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q},\ \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q}\} =$$

$$= 2\left[\frac{\partial}{\partial\tilde{q}}\left(\sqrt{\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q}\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left(\sqrt{\tilde{p}}\cos\tilde{q}\right) - \frac{\partial}{\partial\tilde{q}}\left(\sqrt{\tilde{p}}\cos\tilde{q}\right)\frac{\partial}{\partial\tilde{p}}\left(\sqrt{\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q}\right)\right]$$

$$= \cancel{2}\left[\cancel{\sqrt{\tilde{p}}}\cos\tilde{q}\,\frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{\tilde{p}}}}\cos\tilde{q} - \cancel{\sqrt{\tilde{p}}}(-\text{sen}\,\tilde{q})\frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{\tilde{p}}}}\,\text{sen}\,\tilde{q}\right] =$$

$$= \cos^2\tilde{q} + \text{sen}^2\tilde{q} = 1$$

$$\{q,q\} = 0 \qquad \{p,p\} = 0 \quad //$$

2) Identità di Lie

$$p\,dq = \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q}\ d\left(\sqrt{2\tilde{p}}\,\text{sen}\,\tilde{q}\right) = 2\sqrt{\tilde{p}}\cos\tilde{q}\left(\frac{1}{2\sqrt{\tilde{p}}}\,\text{sen}\,\tilde{q}\,d\tilde{p} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\tilde{p}}\cos\tilde{q}\,d\tilde{q}\right) =$$

$$= \cos\tilde{q}\,\text{sen}\,\tilde{q}\,d\tilde{p} + 2\tilde{p}\cos^2\tilde{q}\,d\tilde{q}$$

deve $\exists F$ t.c. $p\,dq = dF + \tilde{p}\,d\tilde{q}$ cioè

$$\cos\tilde{q}\,\text{sen}\,\tilde{q}\,d\tilde{p} + \tilde{p}(2\cos^2\tilde{q} - 1)\,d\tilde{q} = \frac{\partial F}{\partial\tilde{p}}\,d\tilde{p} + \frac{\partial F}{\partial\tilde{q}}\,d\tilde{q}$$

cioè cerchiamo F t.c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \tilde p} = \cos\tilde q \ \operatorname{sen}\tilde q & \leftarrow F = \tilde p \cos\tilde q \operatorname{sen}\tilde q + f(\tilde q) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \tilde q} = 2\tilde p \cos^2\tilde q - \tilde p \end{cases}$$

$\operatorname{sen}^2 = 1-\cos^2$

$$\underbrace{-\tilde p \operatorname{sen}^2\tilde q + \tilde p \cos^2 \tilde q}_{\underline{2\tilde p \cos^2\tilde q - \tilde p}} + f'(\tilde q) = \underline{2\tilde p\cos^2\tilde q - \tilde p}$$

$$\Downarrow$$

$f'(\tilde q) = 0$ cioè $f(\tilde q) = \text{cost.}$

$\Rightarrow \exists \ F = \tilde p \cos\tilde q \operatorname{sen}\tilde q + \text{cost.}$ t.c. cond. Lie soddisfatta.

3) Jacobiano simplettico:

$$J_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial \tilde x_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \tilde p} & \dfrac{\partial p}{\partial \tilde q} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \tilde p} & \dfrac{\partial q}{\partial \tilde q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \cos\tilde q & -\sqrt{2\tilde p}\operatorname{sen}\tilde q \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \operatorname{sen}\tilde q & \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \end{pmatrix}$$

$$J^T E J = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \cos\tilde q & \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \operatorname{sen}\tilde q \\ -\sqrt{2\tilde p}\operatorname{sen}\tilde q & \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \cos\tilde q & -\sqrt{2\tilde p}\operatorname{sen}\tilde q \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde p}} \operatorname{sen}\tilde q & \sqrt{2\tilde p}\cos\tilde q \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\ }} \operatorname{sen}\tilde q & -\dfrac{1}{\sqrt{\ }}\cos\tilde q \\ \sqrt{\ }\cos\tilde q & \sqrt{\ }\operatorname{sen}\tilde q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\ }}\cos\tilde q & -\sqrt{\ }\operatorname{sen}\tilde q \\ \dfrac{1}{\sqrt{\ }}\operatorname{sen}\tilde q & \sqrt{\ }\cos\tilde q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E \quad //$$

4) Esistenza funz. generatrice; per es. F_3

Trasf. $\begin{cases} p = \sqrt{2\tilde{p}}\,\cos\tilde{q} \\ q = \sqrt{2\tilde{p}}\,\sin\tilde{q} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tilde{p} = \dfrac{p^2}{2\cos^2\tilde{q}} & \leftarrow = -\dfrac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}} \\ q = p\,\mathrm{tg}\,\tilde{q} & \longleftarrow = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p} \end{cases}$

$$p\,\mathrm{tg}\,\tilde{q} = -\frac{\partial F_3}{\partial p} \Rightarrow F_3 = -\frac{p^2}{2}\mathrm{tg}\,\tilde{q} + f(\tilde{q})$$

$-\dfrac{\partial F_3}{\partial \tilde{q}}$

$$\rightarrow + \frac{p^2}{2}\frac{1}{\cos^2\tilde{q}} - f'(\tilde{q}) = \frac{p^2}{2\cos^2\tilde{q}} \rightarrow f' = 0 \quad //$$

$$\hookrightarrow H = \frac{\omega}{2}(p^2+q^2) \rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -\omega q \\ \dot{q} = \omega p \end{cases}$$

$p(t) = p(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t))$

$q(t) = q(\quad " \quad)$

$$\begin{cases} \dot{p} = \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}}\cos\tilde{q}\,\dot{\tilde{p}} - \sqrt{2\tilde{p}}\,\sin\tilde{q}\,\dot{\tilde{q}} \\ \dot{q} = \dfrac{1}{\sqrt{2\tilde{p}}}\sin\tilde{q}\,\dot{\tilde{p}} + \sqrt{2\tilde{p}}\,\cos\tilde{q}\,\dot{\tilde{q}} \end{cases} \rightarrow \text{sist. lin. in } \dot{\tilde{p}}, \dot{\tilde{q}}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\tilde{p}} = p\dot{p} + q\dot{q} \overset{\text{eq. Ham. di } H}{=} 0$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{1}{2\tilde{p}}(p\dot{q} - q\dot{p}) = \omega$$

$\rightarrow \exists K$ con $K = \omega\tilde{p}$.

Per l'oscillatore armonico (con $m = \frac{1}{\omega}$) $H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2) \rightarrow$

$\rightarrow$ diventa ($K_0 = 0$) $K = H(p(\tilde{p},\tilde{q}), q(\tilde{p},\tilde{q})) = \frac{\omega}{2}\left(2\tilde{p}\cos^2\tilde{q} + 2\tilde{p}\,\mathrm{sen}^2\tilde{q}\right) =$

$= \omega\tilde{p} \rightarrow$ eq. del moto (semplicissime):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial K}{\partial \tilde{q}} = 0 \\ \dot{\tilde{q}} = \frac{\partial K}{\partial \tilde{p}} = \omega \end{cases} \xrightarrow[\text{soluzioni}]{} \begin{array}{l} \tilde{p}(t) = \tilde{p}^0 \\ \tilde{q}(t) = \omega t + \tilde{q}^0 \end{array}$$

$\hookrightarrow$ utilizzando le trasf. di coord. possiamo trovare le soluz. relative alla H di partenza:

$$p(t) = p(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) = \sqrt{2\tilde{p}^0}\cos(\omega t + \tilde{q}^0)$$

$$q(t) = q(\tilde{p}(t), \tilde{q}(t)) = \sqrt{2\tilde{p}^0}\,\mathrm{sen}(\omega t + \tilde{q}^0)$$

COORDINATE CICLICHE in meccanica Hamiltoniana

Cosa succede se H non dip. da una coord. q? (CICLICA)

Diciamo $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_{n-1})$

$$\Rightarrow \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \rightarrow p_n \text{ è cost. del moto}$$

p_n ↑ mom. coniugato

$\Downarrow$

$p_n(t) = p_n^0$

Altre eq. di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{p}_h(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h}\left(p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), p_n^0, q_1(t), \dots, q_{n-1}(t)\right) \\ \qquad h = 1, \dots, n-1 \\ \dot{q}_h(t) = \dfrac{\partial H}{\partial p_h}\left(p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), p_n^0, q_1(t), \dots, p_{n-1}(t)\right) \end{cases}$$

$\downarrow$

Stesse eq. che si ottengono dall'Hamiltoniana ridotta

$$H^*(p_1, \dots, p_{n-1}, q_1, \dots, q_{n-1}; p_n^0) = H(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n^0, q_1, \dots, q_{n-1})$$

↑

problema a n-1 gradi di libertà