SISTEMI DINAMICI

Teorema del ritorno

$\rightarrow$ sistemi dinamici hamiltoniani

$$\dot{x} = J \nabla H$$

$\hookrightarrow$ $\Sigma_{\bar{E}} = \{ x \in \mathbb{R}^{n} \mid H(x) = \bar{E} \}$

<u>Teo</u> $\Sigma_{\bar{E}} \subset \mathbb{R}^{2N}$ compatto $\nabla H(\xi) \neq 0$

per $\xi \in \Sigma_{\bar{E}}$ $\quad$ ($A \subset \Sigma_{\bar{E}}$ misurabile)

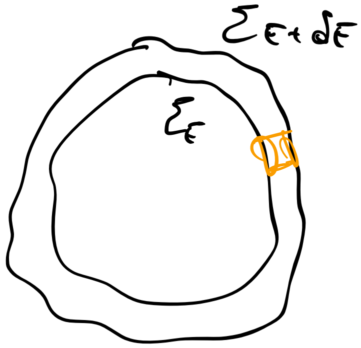
$$\mu(A) = \int_A d\sigma \, \frac{1}{|\nabla H|}$$

$$\mu(\varphi_T(A)) = \mu(A)$$

$\hookrightarrow$ comportamenti tipici

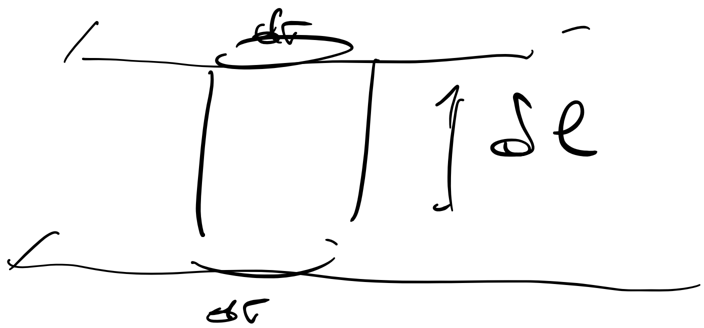
Dim [Sketch] Consideriamo la misura indotta su Σ_E

$\delta E \ll E$



Flusso hamiltoniano è parallelo alle due superfici

$$dV = d\sigma \cdot \delta \ell$$



$$\delta \ell = \delta E \, \frac{1}{|\nabla H|}$$

Vediamo perché:

$$H(x) = E$$

e usando

$$H(x+dx) = E + \delta E$$

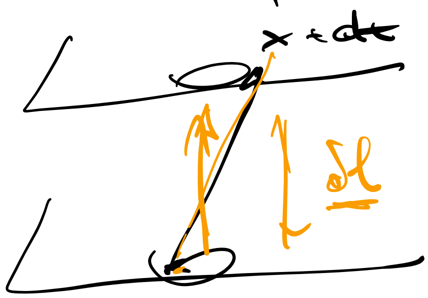
$$H(x) + \nabla H \cdot dx = E + \delta E$$

Sviluppando si vede $\delta E = \nabla H \cdot dx$

→ ∇H è ortogonale alle superfici ad energia costante :

$$\left[\nabla H \cdot f = \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0 \right]$$

$\rightarrow$ il prodotto $\nabla H \cdot dx$



$$\delta E = \nabla H \cdot dx = |\nabla H|\, \delta l$$

$$|A| = \int_A dV = \int_A d\sigma\, \delta l = \left(\int_A \underbrace{\frac{d\sigma}{|\nabla H|}}_{\substack{\text{è la misura indotta}\\ \text{sulla sup a energia costante.}}}\right)\delta E$$

μ : siccome Σ_E è limitata

$$\mu(\Sigma_E) = \int_{\Sigma_E} \frac{d\sigma}{|\nabla H|} = \Omega_E$$

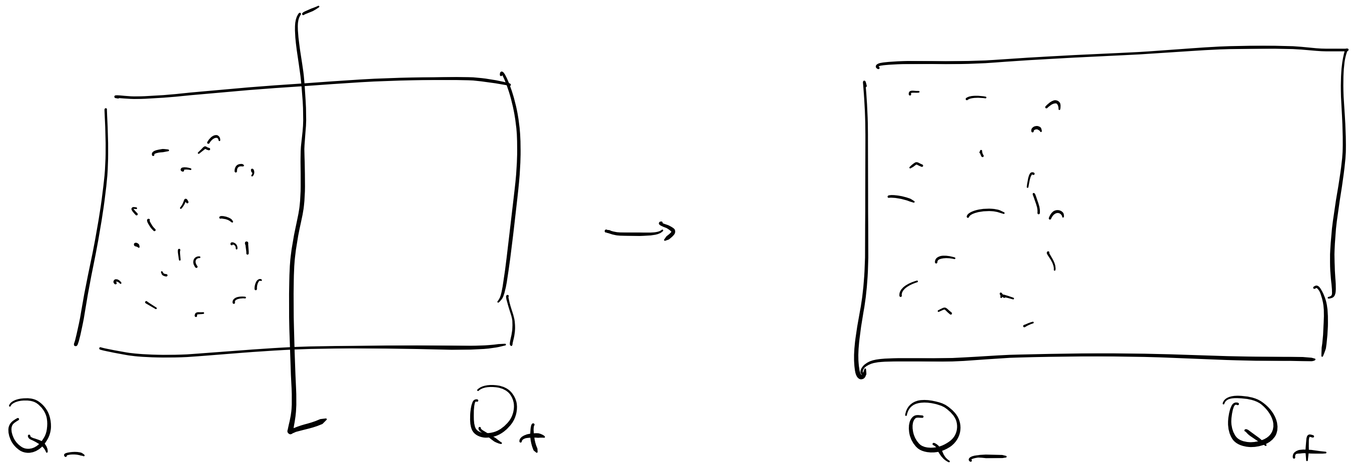
$$\mu^E = \frac{d\sigma}{\Sigma_E \, |\nabla H|}$$

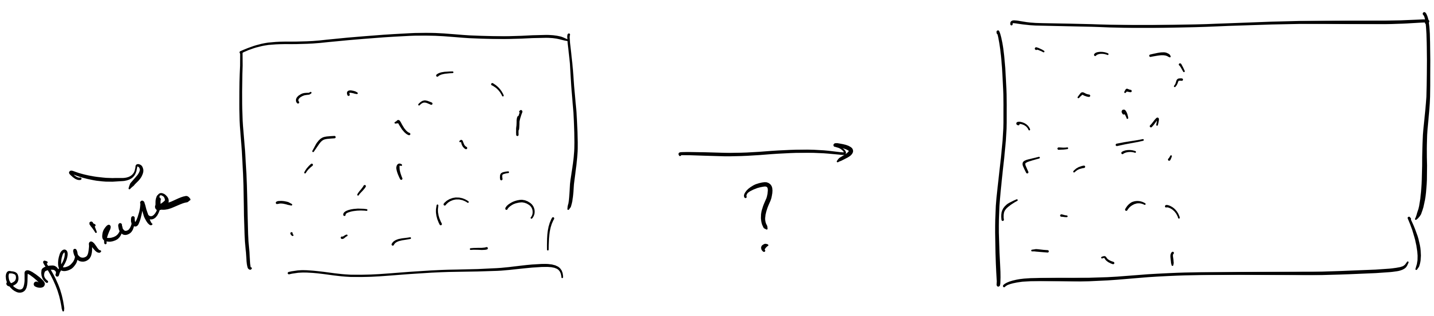
misura di probabilità (= misura microcanonica)

La densità di probabilità uniforme alle superfici ad energia fissata

---

Paradosso: prendiamo un gas





dopo un certo tempo

Boltzmann: ipotesi ergodica

il sistema spende nella regione

$W \subset \Sigma_E$ un tempo $\sim \mu(W)$

(proporzionale alla misura di W)

Quindi: il tempo di ricorrenza

è $\sim \frac{1}{\mu(W)} \longrightarrow \frac{\mu(\Sigma_E)}{\mu(W)}$

$$Q_- = \{(x,y,z) : -L \le x \le 0,\ |y| \le L,\ |z| \le L\}$$

$$Q_+ = \{(x,y,z) : 0 \le x \le L,\ |y| \le L,\ |z| \le L\}$$

$$Q = Q_- \cup Q_+ = [-L, L]^3$$

Particelle libere, $V = \begin{cases} 0 & \text{dentro} \\ \infty & \text{al bordo} \end{cases}$

$$\Sigma_E = \{(q,p) \in \mathbb{R}^{6N} : q \in Q^N,\ p^2 = 2mE\}$$

$\sum_i \frac{p_i^2}{2m} = E$

$\longrightarrow \quad q \in Q \longrightarrow \{ q_i = q_j \}$ rimuovere

Σ_E / S_N

$= Q^N \times S_E$

sfera di raggio $\sqrt{2mE}$

$\rightarrow$ siccome ∇H è costante, la misura μ è proporzionale al prodotto: vol $(Q^N) \times$ superficie (S_E)

Stimiamo il volume $\Omega_k \subset \Sigma_E$ delle configurazioni con

k particelle in Q_-

$N-k$ particelle in Q_+

$$|\Omega_k| = |S_E| \binom{N}{k} \int_{Q_-} dq_1 \int_{Q_-} dq_2 \cdots \int_{Q_-} dq_k \cdots$$

particelle indistinguibili

$$\times \int_{Q_+} dq_{k+1} \cdots \int_{Q_+} dq_N$$

$$= |S_E| \frac{N!}{k!\,(N-k)!} (2L)^N \cdot (2L)^N \left(\frac{2L}{2}\right)^N$$

$$= \underbrace{|S_E|\,(2L)^{3N}} \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \frac{1}{2^N}$$

Vol spazio delle fasi corrispondente alle particelle in Q è $|S_E|\,(2L)^{3N}$

$$\frac{\mu(W)}{\mu(\Sigma_E)} = \boxed{\frac{N!}{k!\,(N-k)!} \frac{1}{2^N}} =: R(k)$$

Stima di $R(k)$. Supponiamo che

$k = \alpha N \qquad \alpha \in [0,1]$

Stirling $\quad n! \simeq n^n e^{-n}$

Calcoliamo:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log R(\alpha N)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \frac{N^N e^{-N+\alpha N+(1-\alpha)N}}{(\alpha N)^{\alpha N} ((1-\alpha)N)^{(1-\alpha)N} 2^N}$$

$$\frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{1}{2^N}$$

$$I(\alpha) := \underline{\log 2} - \underline{\alpha \log \alpha} - \underline{(1-\alpha)\log(1-\alpha)}$$

$$R(\alpha N) \sim e^{-N I(\alpha)}$$

$k = \alpha N$ $\qquad$ $\alpha = 0.1$

per $\alpha = 1$ tutte le particelle si trovano in Q_-

$$I(1) := \log 2$$

lo stato in cui tutte le particelle

si trovano in Q_-, occupa un

volume $\sim 2^{-N}$

Il tempo di ricorrenza vale

2^N.

Per un numero tipico $N = 10^{23}$

$\rightarrow$ tempo di ricorrenza $2^{10^{23}}$

Il sistema spende quasi tutto

il suo tempo quando $\alpha = \frac{1}{2}$

A volte l'ipotesi ergodica:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T d\tau \, f(\varphi_H^\tau(x)) =$$

$$= \frac{1}{Z} \int_{\Sigma_E} d\sigma \frac{1}{|\nabla H|} f(\xi)$$

$$Z = \int_{\Sigma_E} d\sigma \, \frac{1}{|\nabla H|}$$

CONIUGAZIONE TOPOLOGICA

Q : quando due sistemi dinamici descrivono lo stesso fenomeno naturale ?

Classificare i sistemi dinamici

Cosa vuol dire che due sistemi sono equivalenti ?

Def Due flussi $\varphi_t : A \to A$, $\psi_t : B \to B$ sono topologicamente coniugati se $\exists$ omeomorfismo $h : A \to B$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_t"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_\tau"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta

$$h(\varphi_t(x)) = \psi_\tau(h(x))$$

$$\forall\, x \in A,\ t \in \mathbb{R}$$

Ad esempio per due sistemi coniugati topologicamente, c'è una corrispondenza tra le traiettorie:

- x^* punto fisso $\varphi_t(x^*) = x^*$,

  allora $\psi_\tau(h(x^*)) \underset{\text{coniug. top}}{=} h(\varphi_t(x^*)) = h(x^*)$

  e quindi $h(x^*)$ è un punto fisso per ψ_τ.

Notiamo: questa definizione richiede che la parametrizzazione temporale sia la stessa.

Possiamo dare una definizione

più debole, che richiede solo che la direzione del tempo sia la stesse:

<u>Def</u> $\varphi_t : A \longrightarrow A$, $\psi_t : B \longrightarrow B$

sono topologicamente <u>equivalenti</u>

se $\exists$ omeomorfismo $h : A \longrightarrow B$

e una mappa $\tau : A \times \mathbb{R}_{\{t\}} \longrightarrow \mathbb{R}$

monotona e crescente in t tale che

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_{\tau(x,t)}"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "\psi_t"'] & B \end{tikzcd}$$

commuta

$$h(\varphi_{\tau(x,t)}(x)) = \psi_t(h(x))$$

$\forall x \in A$, $t \in \mathbb{R}$

<u>Teorema</u> Due flussi φ e ψ in $\mathbb{R}$ sono topologicamente equivalenti $\Leftrightarrow$ i loro punti fissi (ordinati lungo

la linea reale) possono essere messi in corrispondenza uno a uno, in modo che punti fissi corrispondenti abbiano lo stesso tipo topologico (pozzo, sorgente, semistabile)

<u>Dim</u> Se abbiamo h, per definizione punti fissi di φ corrispondono a punti fissi di ψ e hanno lo stesso carattere. (perché h monotona)

Viceversa:

Supponiamo di avere un numero finito di punti fissi

φ : $x_1^* < \dots < x_n^*$

ψ : $y_1^* < \dots < y_n^*$

Definiamo $h(x_i^*) = y_i^*$

Prendiamo degli α_i, β_i tali che

$$\alpha_0 < x_1^* < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < x_n^* < \alpha_n$$

$$\beta_0 < y_1^* < \beta_1 < \dots < \beta_{n-1} < y_n^* < \beta_n$$

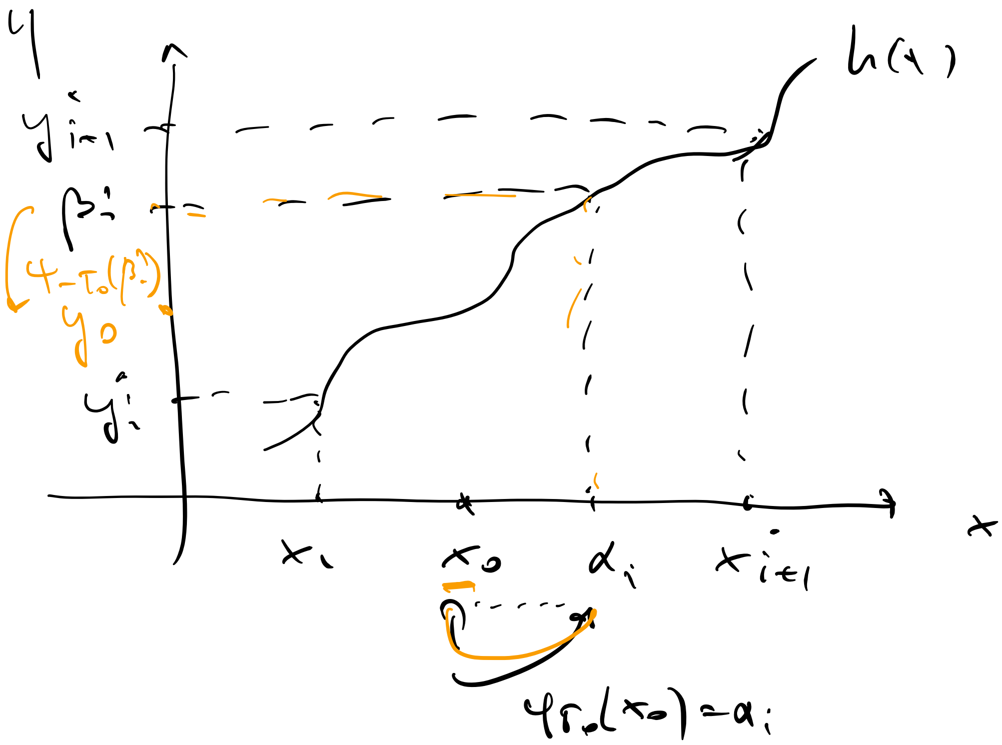
Definiamo $h(\alpha_i) = \beta_i$

Usiamo questi dati per definire h su tutti gli intervalli:

Prendiamo $x_0 \in (x_i^*, x_{i+1}^*)$,

il flusso nell'intervallo è monotono

$\rightarrow \exists !\ t_0$ tale che $\varphi_{t_0}(x_0) = \alpha_i$



Per ogni x_0 definiamo

$h(x_0) =$

$= \psi_{-t_0}(\beta_i)$

$=: y_0$

Stesso vale (x_{n}^{*}, ∞), $(-\infty, x_{1}^{*})$

Per finire: $\varphi_{t_0 - t}(\varphi_t(x_0)) = \alpha_i$

segue

$$h(\varphi_t(x_0)) = \psi_{-(t_0 - t)}(\beta_i) =$$

$$= \psi_t(\psi_{-t_0}(\beta_i)) = \psi_t(h(x_0))$$

$\longrightarrow$ stabilisce la coniugazione topologica

$\smile$